氏　　　名　石戸谷（いしとや）　公（きみ）　直（なお）

学位の種類　理　学　博　士

学位記番号　論 理 博 第 1126 号

学位授与の日付　平 成 3 年 3 月 23 日

学位授与の要件　学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当

学位論文題目　SQUARING OPERATIONS IN THE HERMITIAN SYMMETRIC SPACES

（エルミート対称空間における平方作用素）

論文調査委員　（主　査）教 授 戸田　宏　教 授 土方弘明　教 授 上野健爾

論 文 内 容 の 要 旨

コンパクト型の既約エルミート対称空間は，次の6つのタイプに分類される。

AⅢ	$W(m, n)=U(m+n)/(U(m)\times U(n))$	$(m, n\geq 1)$
BDⅠ	$Q_n=SO(n+2)/(SO(2)\times SO(n))$	$(n\geq 3)$
CⅠ	$S_p(n)/U(n)$	$(n\geq 3)$
DⅢ	$SO(2n)/U(n)$	$(n\geq 4)$
EⅢ	$E_6/(Spin(10)\cdot T^1)$	$(Spin(10)\cap T^1\cong \mathbf{Z}_4)$
EⅦ	$E_7/(E_6\cdot T^1)$	$(E^6\cap T^1\cong \mathbf{Z}_3)$

これらはいずれも，コンパクト単純リー群の，適当な1次元トーラスの中心化群による商空間であり，その整係数コホモロジー環はtorsionがなく偶数次数の元で生成されている。

申請者石戸谷公直は，本論文において，既約エルミート対称空間のmod 2コホモロジー環のSteenrod代数上の構造を決定した。

このため，申請者はまず，ただ一つ未決定であったQ_{2m}の整係数コホモロジー環を次のように決定した（定理1.2）。

$$H^*(Q_{2m}; Z)=Z[t, s]/(t^{m+1}-2st, s^2-\delta_m st^m),$$
$$s\in H^{2m}, t\in H^2, \delta_m=1+(-1)^m$$

位相空間のmod 2コホヒロジー環のSteenrod代数上の構造を決定するには，生成元に対する平方作用素Sq^iの作用を定めればよい。

古典型エルミート対称空間のうち，AⅢ，CⅠ タイプについては，生成元がChern類で与えられていること，DⅢタイプについては，生成元がChern類の懸垂像で与えられていることから，Wuの公式によって平方作用素の作用が定められる。

定理1.2の生成元sに対する平方作用素の作用は，次の式（定理1.4）で与えられる。

$$Sq^{2i}s=\binom{m+1}{i}st^i (i\geq 0)$$

生成元 t については，$Sq^i t=0(i\neq 0,\ 2)$，$Sq^0 t=t$，$Sq^2 t=t^2$ であるので，Q_{2m} における平方作用素が定まり，Q_{2m-1} から Q_{2m} への自然な射入を通して，Q_{2m-1} における平方作用素が定まる。

例外型エルミート対称空間 EⅢ，EⅦ については，申請者は次のように平方作用素を決定した。

EⅢ，EⅦ を単連結例外群 G の商空間 G/K で表し，T を K に含まれる G の極大トーラスとする。このとき，mod 2 コホモロジー群の対応 $H^*(G/K)\to H^*(G/T)$ は単射であることから，問題は $H^*(G/T)$ における平方作用素の作用の決定に帰着される。

次に，G の分類空間 BG の 4-連結ファイバー空間 $B\tilde{G}$ と，誘導されるファイバーリング

$$G/T \xrightarrow{\tilde{i}} B\tilde{T} \longrightarrow B\tilde{G}$$

について，$H^*(B\tilde{T})$ の構造を定め，$\tilde{i}^*: H^*(B\tilde{T})\to H^*(G/T)$ が全射であることを用いて，$H^*(G/T)$ における平方作用素の作用が決定される。その結果は次のようになる（定理 2.4）。

$H^*(EⅢ)$ において（$t\in H^2,\ w'\in H^8$），

$Sq^2 w'=w't,\ Sq^4 w'=t^6,\ Sq^8 w'=w'^2,$

$H^*(EⅦ)$ において（$u\in H^2,\ v\in H^{10},\ w\in H^{18}$），

$Sq^2 v=0,\ Sq^4 v=vu^2+u^7,\ Sq^8 v=w+vu^4+u^9,$

$Sq^2 w=u^{10},\ Sq^4 w=vu^6+u^{11},\ Sq^8 w=vu^4+u^{13},\ Sq^{16} w=vu^{12}$

なお，EⅢ，EⅦの Wu 類及び Stiedel-Whiteney 類も決定されている（定理 3.1，系 3.2）。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

各点を中心とする点対称をもつような，連結なリーマン多様体を対称空間といい，2つの対称空間の直積に分解されない対称空間は既約であるという。既約対称空間は E. Cartan によって分類されている。

コンパクト既約エルミート対称空間については，その整係数コホモロジー環の構造が比較的簡単なためよく研究されており，ほとんどの場合にはその環構造が決定されている。

申請者石戸谷公直は，コンパクト既約エルミート対称空間 M の mod 2 コホモロジー環 $H^*(M)$ の Steenrod 代数上の構造を決定した。

申請者は主論文において，まず，未決定であった Q_{2m} の整係数コホモロジー環の構造を決定し，次に，古典型のコンパクト既約エルミート対称空間のコホモロジー環の Steenrod 代数上の構造を，Wu の公式を主要手段として決定した。

例外型の EⅢ，EⅦについては，対称空間を例外群 G の商空間 G/K で表し，T を K の極大トーラスとするとき，$H^*(G/K)\to H^*(G/T)$ が単射であることから，問題を $H^*(G/T)$ の構造に帰着させる。さらに，BG の 4-連結ファイバーリング $B\tilde{G}$ に付随するファイバーリング $G/T\to B\tilde{T}\to B\tilde{G}$ において，$H^*(B\tilde{T})\to H^*(G/T)$ が全射であることから，問題を $H^*(B\tilde{T})$ の構造に帰着させて解決した。

なお，応用として，EⅢ，EⅦにおける Wu 類及び Stiefel-Whitney 類も決定した。

以上のような主論文における結果は，この方面の研究発展に寄与するところ大であると認められる。

参考論文 9 篇は，対称空間，リー群，分類空間等のコホモロジーに関する研究であり，本論文の前駆をなすとともに，申請者の研究能力を十分に示すものといえる。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。

なお，主論文及び参考論文に報告されている研究業績を中心として，これに関連した研究分野について試問した結果合格と認めた。