数理解析研究所講究録
900巻 1995年 10-27

確率微分方程式の基礎理論

立命館大・理工 山田俊雄
(Toshio Yamada)

確率微分方程式の基礎理論, すなわち, 解の概念の分析, 一意性の意味, 比較定理, Picard 近似, Euler-Maruyama 近似, Newton法について解説を試みるのが本稿の目的である。講演においては Brown 運動, 確率積分と Ito 公式について簡単な説明を行ったが, その部分は本稿では省略する。

§1 確率微分方程式の解と一意性

$b(t,x)$, $\sigma(t,x)$ を $[0,\infty)\times R^1$ で定義された2変数に関するBorel 可測関数とする。

$$(1.1)\quad X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t \sigma(s, X_s(\omega))\,dB_s + \int_0^t b(s, X_s(\omega))\,ds$$

微分形で形式的に (1.1) を次のように表す

$$(1.2)\quad dX_t = \sigma(t, X_t)\,dB_t + b(t, X_t)\,dt$$

これを1次元 (Ito 型) 確率微分方程式と呼ぶ。

一般次元の確率微分方程式も勿論定義できるが簡単のため1次元を例としてとりあげる。$\int dB_s$ は Brown 運動による確率積分を意味する。

定義 1・1　SDE の弱い意味の解

以下，確率微分方程式（Stochastic differential equation）を SDE と略記する。

SDE (1・1) の解とは通常の性質をもつ Filter 付けられた確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P : \mathcal{F}_t)$ 上で定義された確率過程の組 $(X_t(\omega), B_t(\omega))$ で以下の性質をみたすものをいう。

(i) $X_t(\omega)$, $B_t(\omega)$ はともに $\mathcal{F}_t$ に適合，すなわち t を固定すると $\mathcal{F}_t$ に関して可測である。

(ii) $t \longmapsto X_t(\omega)$ は連続 (a.s. P)

(iii) $B_t(\omega)$ は $\mathcal{F}_t$-Brown 運動である。

(iv) (1・1) $X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t \sigma(s, X_s(\omega))dB_s + \int_0^t b(s, X_s(\omega))ds$ をみたす。 ■

一意性について述べるために，2，3の準備を行う。

$W = \{ w(t) : [0, \infty)$ で定義され $t \longmapsto w(t)$ は連続 $\}$

とおく。W に広義一様収束を導く距離を入れておく。

$$d(w, \tilde{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left\{ \left(\sup_{0 \le t \le n} |w(t) - \tilde{w}(t)| \right) \wedge 1 \right\}$$

距離空間 (W, d) 上の Borel 集合族を $\mathbb{F}$ で表しておく。$Y = \{Y_t(\omega)\}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathcal{F}_t)$ 上で定義された連続確率過程としよう。このとき $\mu_Y(A) = P(\{\omega : Y_\cdot(\omega) \in A\})$ $A \in \mathbb{F}$ とおくと $(W, \mathbb{F}, \mu_Y)$ は確率空間となる。μ_Y を Y の法則という。

Remark 1・2 Y と $\tilde{Y}$ が異った確率空間上で定義されている，2つの連続確率過程である場合でも μ_Y と $\mu_{\tilde{Y}}$ は同一の $(W, \mathbb{F})$ 上に定義された2つの確率測度となる。■

定義 1・3 （分布の意味の一意性）

(1・1) に対して、2つの解 (X_t, B_t) と $(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)$ があり（2つの解は一般には，異った確率空間上で定義されている）X_0 と $\tilde{X}_0$ が同じ法則に従っているときには必ず μ_X と $\mu_{\tilde{X}}$ が一致するとき，(1・1) の解に対し"分布の意味での一意性がなりたつという。■

もう一つの一意性概念を導入しよう。

定義 1・4 （道ごとの一意性）

(1・1) に対して，同一の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathcal{F}_t)$ 上に定義された2つの解 (X_t, B_t)，$(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)$ で $X_0(\omega) = \tilde{X}_0(\omega)$ (a.s. P) 且つ $B_t(\omega) \equiv \tilde{B}_t(\omega)$ (a.s. P) となるものが存在すれば必らず $X_t(\omega) \equiv \tilde{X}_t(\omega)$ (a.s P) となるとき (1・1) の解に対し"道ごとの一意性"がなりた

つという。ここで $B_t(\omega) \equiv \tilde{B}_t(\omega)$ (a.s. P) とは、

$P(\{\omega : B_t(\omega) = \tilde{B}_t(\omega),\ 0 \leq t < \infty\}) = 1$ を意味する。

$X_t(\omega) \equiv \tilde{X}_t(\omega)$ (a.s. P) についても同様。■

さて弱い意味の解に対して強い意味の解を定義しよう。

定義 1・5　（強い意味の解の存在）

$W_0 = \{w ;\ w \in W,\ w(0) = 0\}$ とおく。

写像　$F : R \times W_0 \longrightarrow W$

が存在して (1・1) の任意の解 (X_t, B_t) に対して、

$X_\cdot(\omega) = F(X_0(\omega), B_\cdot(\omega))$ が成り立ち、逆に X_0 とそれに独立な Brown 運動 B_t を与えると、

$X_\cdot(\omega) = F(X_0(\omega), B_\cdot(\omega))$ が (1・1) をみたすとき、(1・1) は "一意的な強い意味の解をもつ" という。■

これから、強弱 2 つの解の概念、一意性についての 2 つの解の概念の間に成り立つ基本的な関係についてのべよう。

常微分方程式に於て Peano の定理に対応する確率微分方程式に対する弱い解の存在定理は、A.V. Skorohod によって示された。(1961年)

定理 1・6　（Skorohod の解の存在定理）

$\sigma(t, x)$ 及び $b(t, x)$ がともに 2 変数に関して連続であるとする。このとき (1・1) は弱い意味の解をもつ。■

Remark 1・7　上の定理は正確にのべると、　σ, 及

び b について $t\to\infty$, $|x|\to\infty$ のときの増大度に関する仮定が必要である。■

証明の手段は後にのべる Euler - Maruyama 近似と確率過程の族のコンパクト性に関する Ascoli - Arzelà 型の定理を用いる。常微分方程式での Peano の定理の証明の方針を素直に確率過程に対して実行したといえる証明である。(参照文献 5. 10. 14, 17)

1970年代初頭に以下の存在及び一意性に関する関係が主として日本の確率論学者によって確認された。

定理 1・8

道ごとの一意性が成り立つならば，分布の一意性が成り立つ。■

定理 1・9

弱い意味の解が存在して且つ道ごとの一意性が成り立つとき，一意的な強い意味の解が存在する。■

σ 及び b に対して適当な条件を仮定して解の一意性を保障する議論は後に行うこととして，こゝでこの節を終える。なお定理 1・8，1・9 については文献 9. 10. 12. 14. 17. 20 等で詳しく解説されている。

§2 Picard 近似 － K. Ito の方法 －

K. Ito (1942) は (1・1) に対し，Picard 近似を

用いて解を構成し，解の一意性を示した。 これが確率微分方程式論の誕生であった。

係数 σ, 及び b に対して Lipschitz 条件を仮定する。

(2.1) $|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K|x-y|$

$$|b(t,x)-b(t,y)| \leq K|x-y|$$

こゝに K は正定数。

(1.1) に対する Picard 近似とは，

(2.2) $X_t^{(0)} \equiv X_0$

$$X_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\,dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})\,ds$$

K. Ito の結果を現在の用語で表すと

<u>定理 2.1</u>　(K. Ito　1942)

Lipschitz 条件の下で Picard 近似は (1.1) の解 X_t に次の意味で収束し，(1.1) に対し道ごとの一意性が成り立つ。 各 $S>0$ に対し，

(2.3) $\lim_{n\to\infty} E[\sup_{0\leq t\leq S} |X_t^{(n)}-X_t|^2] = 0$ ∎

Ito の原論文は文献 1 であるが英訳が 2 であり，こちらの方は入手しやすい。

さて，常微分方程式論に於ては，Cauchy問題で解が存在し

且つ一意性がしている場合でも Picard 近似が解に収束しない例が知られている。SDE に於て，これと類似の例があるかどうかは知られていない。常微分方程式論では係数に Osgood 型の条件を仮定して，Picard 近似が解に収束する結果が導かれている。SDE でも類似の結果を導くいくつかの研究があるが Picard 近似の成立限界について決定的な結果とは言えないようである。

Example 2.2

(2.4) $dX_t = X_t\, dB_t \;,\; X_0 \equiv 1$

この方程式は定理 2.1 によって，解の存在と一意性（道ごとの）が保障されている。解を具体的に表すと，

(2.5) $X_t = \exp[B_t - \frac{t}{2}]$ であることが Itô 公式より直ちに導ける。

(2.4) に Picard 近似を適用しよう。

(2.6) $X_t^{(0)} \equiv 1 \;,\; X_t^{(1)} = 1 + \int_0^t dB_s$

$$X_t^{(2)} = 1 + \int_0^t dB_s + \int_0^t dB_{t_1} \int_0^{t_1} dB_{t_2}, \cdots$$ と続く。

こゝで $Z_t^{(0)} \equiv 1 \,,\; Z_t^{(n)} = \int_0^t dB_{t_1} \int_0^{t_1} dB_{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} dB_{t_n}$ とおくと $X_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} Z_t^{(k)}$ よって (2.5) の X_t は

(2.7) $X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_t^{(n)}$ と表現できる。

この Picard 近似を別の側面から見よう。

(2.8) Hermite多項式 $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

と 一般化されたHermite多項式

(2.9) $$H_n(t,x)=\frac{t^{n/2}}{n!\,2^{n/2}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$$

を用意する。 次の等式

(2.10) $$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n H_n(t,x)=e^{-\frac{\gamma^2 t}{2}+\gamma x}$$

が成り立つ。 こゝでSDE

(2.11) $$dX_t(\gamma)=\gamma X_t(\gamma)dB_t\ ,\quad X_0(\gamma)\equiv 1$$

の解は (2.4) と同様に Ito公式より直ちに,

(2.12) $X_t(\gamma)=e^{-\frac{\gamma^2 t}{2}+\gamma B_t}$ であることが分る。

(2.10) を用いて,

(2.13) $$X_t(\gamma)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n H_n(t,B_t)$$

$\gamma=1$ とおいて

(2.4) の解 X_t は次のように表現される。

(2.14) $$X_t=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(t,B_t)$$

$X_t(\gamma)$ の Picard 近似は

(2.15) $$X_t(\gamma)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n Z_t^{(n)}$$

(2.13) と (2.15) より

(2.16) $$H_n(t,B_t)=Z_t^{(n)}=\int_0^t dB_{t_1}\int_0^{t_1}dB_{t_2}\cdots\int_0^{t_{n-1}}dB_{t_n}$$

を得る。

Example 2・4 （Langevin 方程式）

Brown 粒子（例えば水中の花粉粒子）の質量を m, 速度を v, 粘性を示す係数を ζ とする。, Langevin 方程式,

$$(2.17) \quad m\frac{dv}{dt} = -\zeta v + F(t)$$

（こゝで $F(t)$ は Brown 粒子の受ける random な外力）

の数学的モデルの1つとして,

$$(2.18) \quad dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t, \quad \alpha>0, \ \sigma>0$$

を考える。 (2.18) の解は

$$(2.19) \quad X_t = e^{-\alpha t}\{X_0 + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma dB_s\}$$

である。 これを Ornstein - Uhlenbeck の Brown 運動という。

§3 Euler - Maruyama 近似

確率微分方程式

$$(3.1) \quad \begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt \\ X_0 = X(0) \end{cases}$$

を考える。 区間 $[0, T]$ の分割を $\Delta ; 0 = t_0 < \cdots < t_m = T$ とする。 次の確率過程 X_t^{Δ} を (3.1) に対する Euler - Maruyama 近似と呼ぶ。

$$(3.2) \quad X_t^{\Delta} = X(0) + \sum_{k=0}^{m} \sigma(t\wedge t_k, X_{t\wedge t_k}^{\Delta})(B_{t\wedge t_k} - B_{t\wedge t_{k-1}})$$

$$+\sum_{k=0}^{m} b(t\wedge t_k, X^{\Delta}_{t\wedge t_k})(t\wedge t_{k+1}-t\wedge t_k)$$

すなわち、 $X^{\Delta}_0 = X(0)$

$0=t_0<t\leq t_1$ で

$$X^{\Delta}_t = X^{\Delta}_0+\sigma(0, X^{\Delta}_0)(B_t-B_0)+b(0, X^{\Delta}_0)(t-t_0)$$

$t_{k-1}<t\leq t_k$ で

$$X^{\Delta}_t = X^{\Delta}_{t_{k-1}}+\sigma(t_{k-1}, X^{\Delta}_{t_{k-1}})(B_t-B_{t_{k-1}})+b(t_{k-1}, X^{\Delta}_{t_{k-1}})(t-t_{k-1})$$

ときまってゆく。

G. Maruyama は 1955 の論文（文献 4）に於て次のことを示した。

定理 3・1

σ, b はともに Lipschitz 条件をみたすとする。このとき、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ 上の $\mathcal{F}_t$-Brown 運動 B_t と、それを用いて構成した Euler-Maruyama 近似 X^{Δ}_t (3.2) に対して、ある確率過程 X_t が同一の確率空間上に存在して、(3・3) $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} E[\sup_{0\leq t\leq T}|X^{\Delta}_t - X_t|^2]=0$

が成り立ち、

(X_t, B_t) は (3・1) の解である。また (3・1) に道ごとの一意性がなりたつ。■

このMaruyamaの方法の重要性はA.V. Skorohodによって認識され§1にのべた解の存在定理として実を結んだ。

Euler-Maruyama近似はどこまで適用可能であるかについてはH. Kaneko - S. Nakaoによって決定的な結果が得られている。 (Séminaire de Probabilités XXII (1988) pp 155-162)

大雑把な言い方をすると, "道ごとの一意性が成り立つとき, Euler-Maruyama近似は解に収束する"。

§4 一意性条件について再説

1次元SDEの場合, 解の道ごとの一意性を保障する係数に関する条件として, Lipschitz条件よりゆるやかな条件が知られている。

定理 4・1 (½ - Hölder条件)

(4・1) $dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$

に於て σ, b に以下の仮定 (A・I) (A・II) をおく。

(A・I) $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \rho(|x-y|)$

こゝで ρ は $[0, \infty)$ で非負, 連続増加関数で

$$\int_{0+} \frac{du}{\rho^2(u)} = \infty$$

(A・II) $|b(t, x) - b(t, y)| \leq K(|x-y|)$

K は $[0, \infty)$ で非負, concaveで増加, $\int_{0+} \frac{du}{K(u)} = \infty$

このとき，(4・1) に対し，道ごとの一意性がなりたつ。

■

Remark 4・2

$\rho(u) = u^{1/2}$ ($\frac{1}{2}$-Hölder 条件)，$\rho(u) = u^{1/2}(\log(\frac{1}{u}))^{1/2}$，… 等は (A・I) をみたす。

(A・II) は Osgood 条件として知られている。■

こゝで定理4・1 で解の一意性が保障される例をのべておく。

Example 4・3 (集団遺伝学に現れる SDE)

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \sqrt{x(1-x)} & 0 < x < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$dX_t = \sigma(X_t)\,dB_t$$ ■

Example 4・4 (Bessel 過程の 2 乗を記述する SDE)

$\mathbb{B}_t = (B_t^{(1)}, \cdots B_t^{(d)})$ d 次元 Brown 運動とする。

$Y_t = (\sum_{k=1}^{d} B_t^{(k)\,2})^{1/2}$ は d 次元 Bessel 過程

$X_t = Y_t^2$ とおくと

$$\begin{cases} dX_t = 2\sqrt{(X_t)_+}\,dB_t + d\,dt \\ X_0 = 0 \end{cases}$$ ■

次に解の一意性の破れる例をのべる。

Example 4・5 (Girsanov, 1962 参照 文献 8)

$$(4.2)\quad \begin{cases} dX_t = |X_t|^{\alpha} dB_t & (0<\alpha<1/2) \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

に於て $X_t \equiv 0$ は明らかに (4.2) の解である。

$T_t = \int_0^t |B_s|^{-2\alpha} ds$ の逆関数 T_t^{-1} を考えると、

$\tilde{X}_t = B_{T_t^{-1}}$ とおくと、これは (4.2) の別の解を与える。■

1次元SDEの一意性条件をもう一つ紹介しよう。

定理 4.6 (Nakao - Le Gall)

$$(4.3)\quad dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$$

に於て、σ と b はともに有界Borel可測関数とする。さらに次の (C.I) (C.II) を仮定する。

(C.I) ある $\varepsilon > 0$ が存在して、

$\sigma(x) > \varepsilon \quad ({}^{\forall}x \in R^1)$ が成り立つ。

(C.II)

$$(\sigma(x) - \sigma(y))^2 \leq |f(x) - f(y)| \quad ({}^{\forall}x, {}^{\forall}y \in R^1)$$

こゝで f は $(-\infty, \infty)$ で有界増加関数である。

このとき (4.3) に対して道ごとの一意性が成り立つ。■

この節の最後にSDEに関する比較定理をのべよう。

定理 4.7 (比較定理)

$$(4.4)\quad dX_t^{(i)} = \sigma(t, X_t^{(i)})dB_t + b_i(t, X_t^{(i)})dt, \quad i=1,2$$

σ は (A・I) 条件をみたすとする。

b_i は Lipschitz 条件をみたし, $b_1(t,x) \le b_2(t,x)$

$(^\forall t \in [0,\infty) \ ^\forall x \in R^1)$ とする。

(4.4) の解を $X_t^{(i)}$ $i=1,2$ とするとき

$X_0^{(1)} \le X_0^{(2)}$ であれば $X_t^{(1)} \le X_t^{(2)}$ (a.s P)

がすべての $t \in [0,\infty)$ で成り立つ。■

この節については文献表の 10, 14, 17, 19, 22 に詳しい記述がある。■

§5 Newton 法

常微分方程式の Cauchy 問題

(5.1) $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$

で f については適当な滑らかさについての仮定をおく。

(5.1) に対して次の Chaplygin 法と呼ばれる近似が知られている。

(5.2) $u'_{n+1} = f(t, u_n(t)) + f_x(t, u_n(t))(u_{n+1}(t) - u_n(t))$

$u_{n+1}(t_0) = x_0$

この近似は関数空間を適当に設定して

Operator $F(x)(t) = x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$

を考えると, この Operator に対する Newton 法と理解できる。(G. Vidossich, J. Math. Anal. Appl. 66 (1978), 188-206)

さてChaplygin法のAnalogyをSDEで実行してみよう。

$$(5\cdot3)\quad \begin{cases} dX(t) = \sigma(t, X(t))dB_t + b(t, X(t))dt \\ X(0) = \xi \end{cases}$$

に於て σ, b, $\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \sigma_x$, $\frac{\partial b}{\partial x} = b_x$ はすべて有界連続としよう。(5・2)に対応して,

$$(5\cdot4)\quad X_0(t) \equiv \xi$$

$$X_{n+1}(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(s, X_n(s))dB_s + \int_0^t b(s, X_n(s))ds$$
$$+ \int_0^t \sigma_x(s, X_n(s))(X_{n+1}(s) - X_n(s))dB_s$$
$$+ \int_0^t b_x(s, X_n(s))(X_{n+1}(s) - X_n(s))ds$$

を考える。(5・4)が(5・3)に対するNewton法になっていることを示そう。

$$(5\cdot5)\quad \mathcal{L}_T \equiv \{ \varphi : \varphi \text{は} [0, \infty) \times \Omega \to R^1 \text{写像}$$
$$\varphi(t, \omega) \text{は} \mathcal{F}_t \text{適合}, \ t \mapsto \varphi(t, \omega) \text{は連続} \ (a.s.\ P)$$
$$E[\sup_{0 \le t \le T} |\varphi(t, \omega)|^2] < \infty \},$$

ノルム $\|\varphi\| = \left(E[\sup_{0 \le t \le T} |\varphi(t, \omega)|^2] \right)^{1/2}$

このとき $(\mathcal{L}_T, \|\ \|)$ はBanach空間である。

Operator $F : \mathcal{L}_T \to \mathcal{L}_T$ を

$$(5\cdot6)\quad F(Z) = F(Z)(t) = Z(t, \omega) - Z(0, \omega)$$
$$- \int_0^t \sigma(s, Z(s, \omega))dB_s - \int_0^t b(s, Z(s, \omega))ds$$ と定義

。 こゝでFに対して $Z \in \mathcal{L}_T$ に於る Gâteaux 微分

(5・7) $\displaystyle \lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{u}\{F(Z+uh) - F(Z)\} \in \mathcal{L}_T \quad (\forall h \in \mathcal{L}_T)$

の存在が示せる。 これを

(5・8) $dF(Z:h) = dF(Z:h)(t)$ で表す。

Gâteaux微分を具体的に書くと

(5・9) $$dF(Z:h)(t) = h(t,\omega) - h(0,\omega) - \int_0^t \sigma_x(s, Z(s,\omega))h(s,\omega)\,dB_s - \int_0^t b_x(s, Z(s,\omega))h(s,\omega)\,ds$$ となる。

$\varphi \in \mathcal{L}_T$ を与えると

(5・10) $\varphi(t,\omega) = dF(Z:h)(t)$

をみたす h は (5・10) を書き直して,

(5・11) $$\varphi(t,\omega) = h(t,\omega) - h(0,\omega) - \int_0^t \sigma_x(s, Z(s,\omega))h(s,\omega)\,dB_s - \int_0^t b_x(s, Z(s,\omega))h(s,\omega)\,ds$$

(5・11) は $h(t,\omega)$ について解けて適ことに一意.

∴ $dF^{-1}(Z)$ の存在が示された。

そこで Operator F について Newton 法を実行すると

, (5・12) $X_0(t) = X(0,\omega) = \xi$

$$X_{n+1}(t) = X_n(t) - dF^{-1}(X_n(\cdot))(F(X_n(\cdot)))(t)$$

これより，$dF(X_n; X_{n+1}-X_n) = -F(X_n)$
これを書き直すと (5.4) になる。

<u>定理 5.1</u>　(S. Kawabata - T. Y)

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{0\le t\le T} |X_n(t) - X(t)|^2\right] = 0$$

ここで $X(t)$ は (5.3) の解。 ■

この§5については S. Kawabata - T. Y (Séminaire de Probabilités. XXV (1991), 121-137).
に詳しい。

References

1. 伊藤清 Markoff過程を定める微分方程式, 全国紙上数学談話会誌, 1077(1942), 1352-1400
2. Ito, K. Differential Equations Determining a Markoff Process, Kiyoshi Ito Selected Papers, Edited by D.W.Stroock and S.R.S.Varadhan, Springer Verlag New York, (1987), 42-76
3. 伊藤清 確率論, 岩波書店 (1953)
4. Maruyama, G. Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend.Circ.Mat. Palermo Ser.2, 4(1955), 48-90
5. Skorohod, A.V. Studies in the Theory of Random Processes, Addison-Wesley (1965) (The original Russian edition was published in 1961 by the Kiev University Press)
6. Ito, K. Lectures on stochastic processes, Tata Institute, 24, Bombay (1961)
7. Dynkin, E.B. Markov Processes vol.1 and vol.2, Springer Verlag Berlin New York (1965)
8. McKean, H.P.Jr. Stochastic Integrals, Academic Press New York, (1969)
9. Priouret, P. Processus de Diffusion et Équations Différentielles stochastiques, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour III Lect.Note Math.390, Springer Verlag Berlin New York (1974), 37-113
10. 渡辺信三 確率微分方程式, 産業図書 (1975)
11 伊藤清 確率論 III 岩波講座 基礎数学 岩波書店 (1978)
12. Stroock, D.W., and Varadhan, S.R.S. Multidimensional Diffusion Processes, Springer Verlag Berlin New York, (1979)
13. Gikhman, I.I., and Skorohod, A.V. Theory of Stochastic Processes I, II, III. Springer Verelag Berlin New York (1974, 1975 , 1979)
14. Ikeda, N. and Watanabe, S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland / Kodansha, Amsterdam New York Tokyo (1981, Second Edition 1989)
15. Métivier, M. Semimartingales (a Course on Stochastic Processes) Walter de Gruyter Berlin New York (1982)
16. Elworthy, K.D. Stochastic Differential Equations on Manifolds, Cambridge Univ.Press, Cambridge (1982)
17. Rogers, L.C.G. and Williams, D. Diffusions, Markov Processes, and Martingales vol.2 Ito Calculus, John Wiley & Sons , Chichester New York (1987)
18. Gard, T.C. Introduction to Stochastic Differential Equations, Marcel Dekker, Basel New York (1988)
19. Karatzas, I. and Shreve, S.E. Brownian motion and Stochastic Calculus, Springer Verlag Berlin New York (1988)
20. Chung, K.L. and Williams, R. Introduction to Stochastic Integration, Second Ed. Birkäuser Boston (1990)
21. von Weizsäcker, H. and Winkler, G. Stochastic Integrals, Friedr.Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden (1990)
22. Revuz, D. and Yor, M. Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer Verlag Berlin New York (1991, Second Edition 1994)
23. 楠岡成雄 確率と確率過程, 岩波講座 応用数学 岩波書店 (1993)