

非有界 subnormal 作用素について

九州芸工大 太田昇一 (Schôichi Ôta)

1. 1960年代前半の Biruk and Coddington 等の論文に見られるように、近年非有界作用素の (同じ Hilbert 空間又は、それを含むより大きな Hilbert 空間上への) normal extension の研究が多くの人々によってされてきた。特に、quantum creation 作用素が、Bargmann 空間上への normal extension が ± 71 同値の意味で実現されることから、Stochel and Szafraniec 等によって組織的に研究されてきた。

McDonald and Sundberg は subnormal 作用素の定義にもっと強い条件を付加した strongly subnormal なる概念を与えた (彼らは単に subnormal と呼んでゐるが)。これまで知られてゐた subnormal 作用素は、全て strongly subnormal であり、そこで subnormal 作用素は strongly subnormal なのかという疑問が生じた。ここではこの非有界作用素に対する subnormality の定義に関連したこの疑問について考察する。

2. S を稠密な定義域をもつ Hilbert 空間上の作用素とする。

もし以下の条件を満たすとき、 S は subnormal であると言う:

\Leftrightarrow 適当な Hilbert 空間 $K \supseteq \mathcal{H}$ と、その上のある normal 作用素 N で、

$$\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H}, \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{かつ, } Sf = Nf \quad \text{for all } f \in \mathcal{D}(S)$$

を満たすものが存在する。

上の定義において、(1)の等号が成立するとき、i.e.,

$$\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H}$$

S を strongly subnormal と言うことにする。

S が subnormal ならば、closable であり formally hyponormal ($\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(S^*)$ and $\|Sx\| \geq \|S^*x\|$ for all $x \in \mathcal{D}(S)$).

さらに、strongly subnormal 作用素は、つねに closed であることに注意する。

3. closed symmetric 作用素

• subnormal weighted shift の closure

(これは、1 で述べた quantum creation 作用素を含む)

• unbounded Toeplitz 作用素 T_φ ($\varphi \in H^2$)

は strongly subnormal である。

4. 非有界作用素に対する実部、虚部の和に分けることを明確にさせるために、Cartesian 分解を定義する: 作用素 T が

$$T = T_1 + i T_2, \quad T_1 \subseteq T_1^*, \quad T_2 \subseteq T_2^* \quad \text{with } \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2) \text{ なる}$$

とき、 T は Cartesian 分解をもつと言う。明らかに、このとき、 $D(T) \subseteq D(T^*)$ であり、この分解は、

$$T_1 = \frac{T+T^*}{2}, \quad T_2 = \frac{T-T^*}{2i}$$

で与えられる。

又、selfadjoint 作用素 S_1, S_2 の spectral projections が互いに可換のとき、 S_1 と S_2 は strongly commute と言う。

定理 T を Hilbert 空間 H 上の closed subnormal 作用素で、その Cartesian 分解を $T = T_1 + iT_2$ とする。さらに各 T_i は essentially selfadjoint で、その closure $\overline{T_1}$ と $\overline{T_2}$ は strongly commute と仮定する。このとき、 N を T の任意の normal extension (to a possibly larger Hilbert 空間) とすると、 N の H への制限は normal 作用素 $\overline{T_1} + i\overline{T_2}$ と一致する。

系 T を closed subnormal で、normal でないとする。上記の定理の仮定を満たすとき、 T は strongly subnormal でない。

この系により、subnormal で strongly subnormal でない例が構成出来る。

以上は下記の References の Ôta の "On strongly normal extensions of unbounded operators" の一部です。

REFERENCES

- [1] G. Biriuk and E. A. Coddington, *Normal extensions of unbounded formally normal operators*, J. Math. Mech. **12** (1964), 617–638.
- [2] G. McDonald and C. Sundberg, *On the spectra of unbounded subnormal operators*, Can. J. Math. **38** (1986), 1135–1148.
- [3] S. Ôta, *A quasi-affine transform of an unbounded operator*, to appear in Studia Math.
- [4] S. Ôta, *On strongly normal extensions of an unbounded operator*, in preparation.
- [5] J. Stochel and F. H. Szafraniec, *On normal extensions of unbounded operators III*, Publ. RIM, Kyoto Univ **25** (1989), 105–139.