数理解析研究所講究録
903巻 1995年 123-129

Radical Banach $L^1(G)$-modules の例

山形大工 高 橋 眞 映 (Sin-Ei Takahasi)

1。可換 Banach 環 A 上の Banach module X を考える。A の carrier 空間 Φ_A の各元 $\varphi \in \Phi_A$ 対して、M_φ を対応する A の極大正則 ideal とし、

$$X^\varphi = \overline{\mathrm{span}}\{M_\varphi X + (1 - e_\varphi)X\}$$

と置く。ここで e_φ は $\varphi(e_\varphi) = 1$ を満たす A の元である。今各 $\varphi \in \Phi_A$ 対して、$X_\varphi = X/X^\varphi$ と置き、Φ_A 上の X_φ に関するベクトル場の全体を $\prod X_\varphi$ で表わす。また各 $\varphi \in \Phi_A, x \in X$ に対して、

$$\pi_\varphi(x) \equiv \hat{x}(\varphi) = x + X^\varphi$$

と置く。特に $\pi_\varphi = 0\ (\forall\varphi \in \Phi_A)$ の場合は何も見えないと言うことで、X はラジカルであると呼ぶことにする。さてベクトル場 $\sigma \in \prod X_\varphi$ は、次の不等式を満たす正数 $\beta > 0$ が存在するとき BSE と呼ぶ：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(\sigma(\varphi_i))\right| \leq \beta \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \circ \pi_{\varphi_i}\right\|_{X^*}$$

$$(\forall\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi_A, \forall f_1 \in (X_{\varphi_1})^*, \dots, \forall f_n \in (X_{\varphi_n})^*, \forall n = 1, 2, \dots)$$

そのような β の下限を $\|\sigma\|_{BSE}$ で表わす。このとき、BSE ベクトル場の全体 $\prod_{BSE} X_\varphi$ はノルム $\|\sigma\|_{BSE}$ のもとで、Banach A-module となることが分かる。従って、不等式：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(\sigma(\varphi_i))\right| \leq \|\sigma\|_{BSE} \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \circ \pi_{\varphi_i}\right\|_{X^*}$$

$$(\forall\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi_A, \forall f_1 \in (X_{\varphi_1})^*, \dots, \forall f_n \in (X_{\varphi_n})^*, \forall n = 1, 2, \dots)$$

を BSE-不等式と呼ぶことにする。A から X への連続な A- 準同型写像を multiplier と呼びその全体を M(A, X) で表わす。このとき各 $T \in M(A, X)$ に対して、

$$(Ta)\hat{}(\varphi) = \varphi(a)\hat{T}(\varphi) \ (\forall a \in A, \forall \varphi \in \Phi_A)$$

を満たすベクトル場 $\hat{T}$ が一意に定まる。今

$$\hat{M}(A, X) = \{\hat{T} : T \in M(A, X)\}$$

と置く。更に連続な BSE ベクトル場の全体を $\prod^c_{BSE} X_\varphi$ で表わす。ここでベクトル場 $\sigma \in \prod X_\varphi$ が連続であるとは、次の意味である：積位相を導入した空間 $\Phi_A \times X$ を考え、

$$\pi(\varphi, x) = (\varphi, \hat{x}(\varphi)) \ (\varphi \in \Phi_A, \ x \in X)$$

で定義される $\Phi_A \times X$ から $\bigcup_{\varphi \in \Phi_A} \{\varphi\} \times X_\varphi$ への写像 π に関する商位相を $\bigcup_{\varphi \in \Phi_A} \{\varphi\} \times X_\varphi$ に導入したとき、Φ_A から $\bigcup_{\varphi \in \Phi_A} \{\varphi\} \times X_\varphi$ への写像: $\varphi \to (\varphi, \sigma(\varphi))$ が連続である。

我々の興味は $\hat{M}(A, X) = \prod^c_{BSE} X_\varphi$ となる場合である。このような Banach module X を BSE と呼んでおり、これは multiplier の Gelfand 変換が BSE-不等式で完全に特徴付けられることを意味している。可換 Banach 環はそれ自身の上の Banach module と見ることができるが、それが BSE であるとき、BSE-環と呼ぶ。円板環、ハーディ環、群環、(可換) C*-環などは BSE-環の代表的なものである (cf. [1, 2])。また擬中心的 C*-環はその中心上の BSE Banach module である。更にコンパクト可換群 G に対して、C(G), $L^p(G)$ $(1 \le p \le \infty)$, M(G) は皆 BSE-Banach $L^1(G)$-module である ([4])。しかしながら G がコンパクトでない場合はこれらの定理が成り立つかどうか定かでなく、[4] の中で、問題として残しておいた。その後 M(G) は肯定的に解かれた ([3])。$L^\infty(G)$ を除く残りの問題に対しては、次の定理がその解答を与える。

定理。If G is non-compact, then both $C_0(G)$ and $L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$ *are radical.*

つまり、radical Banach module は定義から常に BSE であるから、この場合も肯定的に解かれた。しかし $L^\infty(G)$ についてはまだ定かでない。この定理を導く最初の原動力となった疑問：

『ℓ^p $(1< p < \infty)$ *の中で、総和がゼロとなる* ℓ^1*– 数列の生成する閉部分空間の余次元はいくつか？*』

に対して明快にゼロと答えて下さった奈良女子大教授の薮田公三先生に感謝の意を表する。

2。定理の証明。Let G be a non-compact locally compact Abelian group and μ the Haar measure on G.

Lemma 1. Given a compact subset K of G, there exists a compact subset H of G such that $H \cap K = \varnothing$ and $\mu(K) \leq \mu(H)$.

Proof. Let $K_0 = (K \cup \{0\}) - (K \cup \{0\})$ and then K_0 is a compact subset of G containing K. Choose an element x of G which doesn't belong to K_0 and set $H = x + K_0$. Then H is a desired set. Q. E. D.

Lemma 2. Given a compact subset K of G and a positive integer n, there exists a compact subset K_n of G such that $K_n \cap K = \emptyset$ and $n\mu(K) \leq \mu(K_n)$.

Proof. By Lemma 1, we can find compact subsets $H_1, \ldots, H_n$ of G such that

$$H_i \cap (K \cup H_1 \cup \ldots \cup H_{i-1}) = \emptyset,\ \ \mu(K \cup H_1 \cup \ldots \cup H_{i-1}) \leq \mu(H_i)$$

for each $i = 1, \ldots, n$. Set $K_n = H_1 \cup \ldots \cup H_n$. Then K_n is a desired set. Q. E. D.

We identify the dual group $\hat{G}$ of G and the carrier space of $L^1(G)$.

Lemma 3. Let $X = C_0(G)$ or $L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$ and $\gamma \in \hat{G}$. Then $M_\gamma \cap X \subset M_\gamma * X + (1 - e_\gamma) * X$.

Proof. Since $C_{00}(G)$ is L^1–dense in $L^1(G)$, there is a function $g \in C_{00}(G)$ with $\hat{g}(\gamma) \neq 0$. Set $e'_\gamma = \frac{1}{\hat{g}(\gamma)} g$. Then $\hat{e'}_\gamma(\gamma) = 1$ and $e'_\gamma \in C_{00}(G) \subset X$. Moreover

$$f = f * e'_\gamma + (1 - e'_\gamma) * f \in M_\gamma * X + ((1 - e'_\gamma) * X$$

for all $f \in M_\gamma \cap X$. Hence

$$M_\gamma \cap X \subset M_\gamma * X + (1 - e'_\gamma) * X = M_\gamma * X + (1 - e_\gamma) * X.$$

Q. E. D.

(i) Let $X = L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$ and $\gamma \in \hat{G}$. Then we show that $X = X^\gamma$. Let $f \in X$ be arbitrary nozero function and $\varepsilon > 0$. Since $C_{00}(G)$ is L^p–dense in $L^p(G)$, there is a function $h \in C_{00}(G)$ with $\| f - h \|_p < \varepsilon$. Let K be the support of h and hence $\mu(K) > 0$. For each positive integer n, there exists a compact subset K_n of G such that $K_n \cap K = \emptyset$ and $0 < n\mu(K) \le \mu(K_n)$ by Lemma 2. Set

$$h_n(x) = \begin{cases} -\dfrac{\hat{h}(\gamma)}{\mu(K_n)}\gamma(x), & \text{if } x \in K_n \\ h(x), & \text{if } x \notin K_n . \end{cases}$$

Then $h_n \in C_{00}(G) \subset X$ and $\hat{h}_n(\gamma) = \hat{h}(\gamma) - \dfrac{\hat{h}(\gamma)}{\mu(K_n)} \displaystyle\int_{K_n} \overline{\gamma(x)}\gamma(x)d\mu(x) = 0$. Therefore $h_n \in M_\gamma \cap X$. We also have

$$\| h_n - h \|_p = \sqrt[p]{\int_{K_n} \left| \frac{\hat{h}(\gamma)}{\mu(K_n)}\gamma(x) \right|^p d\mu(x)}$$

$$= \left| \frac{\hat{h}(\gamma)}{\mu(K_n)} \right| |\mu(K_n)|^{1/p} = \frac{|\hat{h}(\gamma)|}{(\mu(K_n))^{1-1/p}}$$

$$\le \frac{|\hat{h}(\gamma)|}{(\mu(K))^{1-1/p}} \frac{1}{n^{1-1/p}} \to 0 \ (\text{as } n \to +\infty)$$

and hence $\| f - h_N \|_p \le \| f - h \|_p + \| h - h_N \|_p \le 2\varepsilon$ for suffciently large number N. Consequently, $M_\gamma \cap X$ is L^p–dense in X and hence $X = X^\gamma$ by Lemma 3.

(ii) Let $X = C_0(G)$ and $\gamma \in \hat{G}$. Then we show that $X = X^\gamma$. Denote by 1 a unit element of $\hat{G}$. We first show that $X = X^1$. Let $\varepsilon > 0$ and g be any nozero positive continuous function on G with compact support K. By Lemma 2, there exists a compact subset K_ε of G such that $K_\varepsilon \cap K = \emptyset$ and $\mu(K_\varepsilon) \ge \frac{1}{\varepsilon} \int_G g(x)\,d\mu(x)$. Set $\delta = \dfrac{1}{\mu(K_\varepsilon)} \displaystyle\int_G g(x)\,d\mu(x)$ and hence $0 < \delta \le \varepsilon$. Let $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ be the net of compact neighbourhoods of K_ε. For each $\lambda \in \Lambda$, choose a continuous function h_λ on G such that $h_\lambda | K_\varepsilon = \delta$, $h_\lambda | G \setminus K_\lambda = 0$ and $0 \le h_\lambda \le \delta$. Then we have $\int_G g(x)d\mu(x) \le \int_G h_\lambda(x)d\mu(x)$ for all $\lambda \in \Lambda$ and $\lim_\lambda \int_G h_\lambda(x)d\mu(x) = \int_G g(x)d\mu(x)$. Moreover, choose a compact subset K_0 of G and a continuous function f_0 on G such that $0 \le f_0 \le \delta$, $0 < \int_{K_0} f_0(x)d\mu(x)$ and $K_0 \cap (K \cup K_\varepsilon) = \emptyset$. Then there exists

$\lambda_0 \in \Lambda$ such that $0 \le \int_G h_{\lambda_0}(x)d\mu(x) - \int_G g(x)d\mu(x) < \int_{K_0} f_0(x)d\mu(x)$. Set

$$\alpha = \frac{\int_G h_{\lambda_0}(x)d\mu(x) - \int_G g(x)d\mu(x)}{\int_{K_0} f_0(x)d\mu(x)}$$

and

$$h(x) = \begin{cases} g(x), \text{ if } x \in K \\ -h_{\lambda_0}(x), \text{ if } x \in K_{\lambda_0} \\ \alpha f_0(x), \text{ if } x \in K_0 \\ 0, \text{ otherwise}. \end{cases}$$

Then $h \in C_{00}(G)$ and

$$\hat{h}(1) = \int_G h(x)d\mu(x) = \int_K g(x)d\mu(x) + \int_{K_0} \alpha f_0(x)d\mu(x) - \int_{K_{\lambda_0}} h_{\lambda_0}(x)d\mu(x) = 0,$$

hence $h \in M_1 \cap X$, where $M_1 = \{f \in L^1(G) : \hat{f}(1) = 0\}$. Also,

$$\| g - h \|_\infty = \max(\| h_{\lambda_0} \|_\infty, \| \alpha f_0 \|_\infty) \le \delta \le \varepsilon.$$

Then g belongs to the L^∞–closure of $M_1 \cap X$. Since an arbitrary continuous function on G with compact support is wrtten by the linear conbination of four positive continuous functions on G with compact supports, it follows that $M_1 \cap X$ is L^∞–dense in X and hence $X = X^1$ by Lemma 3.

For the general case, let $\gamma \in \hat{G}$ and $(T_\gamma f)(x) = \gamma(x)f(x)$ $(x \in G,\ f \in X)$. Then T_γ is a linear isometry of X onto itself. By the simple computation, we see that $T_\gamma(M_1 \cap X) = M_\gamma \cap X$. But since $M_1 \cap X$ is L^∞–dense in X, so is $M_\gamma \cap X$ and hence $X = X^\gamma$ by Lemma 3. Q. E. D.

References

1. S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein type theorem, Proc. Amer. Math. Soc. **110**(1990), 149-158.
2. S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras and BSE-inequalities, Math. Japonica, **37**(1992), 607-614.
3. S.-E. Takahasi, BSE Banach modules, 第 1 回関数空間セミナー報告集、北海道大学数学講究録、Series #26, 1993, pp 23-28.
4. S.-E. Takahasi, BSE Banach modules and Multipliers, J. Funct. Analysis, 125(1994), 67-89.