数理解析研究所講究録
905巻 1995年 157-165

摩擦項をもつ波動方程式の解の漸近挙動

東京都立大理　望月　清 (Kiyoshi Mochizuki)
同　中澤秀夫 (Hideo Nakazawa)

次の初期値問題を考える:

(1) $$u_{tt} - \Delta u + b(x,t)u = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$$

(2) $$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

ここに $b(x,t)$ は非負の有界連続関数である。初期データは

(3) $$\{u_0(x), u_1(x)\} \in H^2(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$$

とする。以下 $w(t) = \{u(\cdot,t), u_t(\cdot,t)\}$ と書く。(1) の解のエネルギーは

(4) $$\|w(t)\|_E^2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \{w_t(x,t)^2 + |\nabla w(x,t)|^2\}\,dx$$

で定義されるが，すぐわかるように，エネルギー有限の解に対して次の等式が成り立っている:

$$(5) \qquad \|w(t)\|_E^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} b(x,t)\, u_t(x,t)^2 dx = \|w(0)\|_E^2 .$$

このことから解のエネルギーは t とともに減少していくことがわかる。エネルギーは $t \to \infty$ で減衰(decay)してしまうのか，それとも正値で残るのか。後者の場合，解はどのような漸近挙動をするのか。これが我々の問題である。

エネルギー減衰については [Ma] の結果があり，非減衰漸近挙動については [Mo 1] の結果がある。これらはすこし改良されて [Mo 2] にまとめられている。我々の目的はこれをさらに改良することであるが，まず [Mo 2] の結果を述べることにする。

定理 1. (エネルギー減衰) $b(x,t)$ に次の条件を仮定する：

$$(6) \qquad \begin{cases} b_0 (1+r+t)^{-1} \leq b(x,t) \leq b_1, & b_0,\, b_1 > 0 \\ b_t(x,t) \leq 0 & (r = |x|) \end{cases}$$

初期データが (3) 以外に条件

$$(7) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \left[(1+r) \left\{ u_1(x)^2 + |\nabla u_0(x)|^2 \right\} + (1+r)^{-1} u_0(x)^2 \right] dx < \infty$$

を満たしていれば，$\mu = \min\{1, b_0/2\}$ に対して

$$(8) \qquad \|w(t)\|_E^2 \leq C(w(0))\,(1+t)^{-\mu}, \qquad C(w(0)) > 0$$

が成り立つ。

定理2.（エネルギー非減衰と漸近挙動）$N \geqq 3$ とする。また $b(x,t)$ に次の条件を仮定する：

(9) $$0 \leqq b(x,t) \leqq b_3(1+r)^{-1-\delta}, \quad b_3>0, \ \delta>0.$$

(i) エネルギー空间 $E=\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)\times L^2(\mathbb{R}^N)$ に属す任意の $\{f_0,f_1\}\neq 0$ に対して $\{u_0,u_1\}=U_0(\sigma)\{f_0,f_1\}$ とおく。ここに $U_0(t)$ は free な d'Alembert 方程式の解を表す E 上のユニタリー群である。$\sigma>0$ を充分大きくとれば，この初期データ $\{u_0,u_1\}$ に対する (1) の解のエネルギーは減衰しない。(ii) 任意のエネルギー有限の (1) の解 $w(t)=\{u(\cdot,t),u_t(\cdot,t)\}$ に対し $f^+=\{f_0^+,f_1^+\}\in E$ が存在して

(10) $$\|w(t)-U_0(t)f^+\|_E \to 0 \quad \text{as } t\to\infty.$$

これらの定理は weighted energy method によって証明されるが，そのために次の等式が用いられる。$u(x,t)$ を (1) の解とし，$\varphi=\varphi(x,t)$, $\psi=\psi(x,t)$ を滑らかな関数とする。このとき (1) に $\varphi u_t+\varphi_t u$, また $\psi(u_r+\frac{N-1}{2r}u)$ 乗じれば

(11) $$\partial_t X+\nabla\cdot Y+Z=0;$$

(12) $$\partial_t \tilde{X}+\nabla\cdot\tilde{Y}+\tilde{Z}=0;$$

ただし

$$X = \frac{1}{2}\varphi(u_t^2 + |\nabla u|^2) + \varphi_t u_t u + \frac{1}{2}(-\varphi_{tt} + b\varphi_t)u^2$$

$$Y = -\nabla u(\varphi u_t + \varphi_t u)$$

$$Z = (b\varphi - 2\varphi_t)u_t^2 + \frac{1}{2}\varphi_t(u_t^2 + |\nabla u|^2) + \varphi_r u_r u_t + \varphi_{rt} u_r u + \frac{1}{2}(\varphi_{ttt} - b\varphi_{tt} - b_t\varphi_t)u^2.$$

また

$$\tilde{X} = \psi u_t\left(u_r + \frac{N-1}{2r}u\right)$$

$$\tilde{Y} = -\frac{1}{2}\psi\left\{\frac{x}{r}\left(u_t^2 - |\nabla u|^2 + \frac{N-1}{2r^2}u^2\right) + 2\nabla u\left(u_r + \frac{N-1}{2r}u\right)\right\}$$

$$\tilde{Z} = (b\psi - \psi_t)u_t\left(u_r + \frac{N-1}{2r}u\right) + \left(\frac{1}{r}\psi - \psi_r\right)\left(|\nabla u|^2 - u_r^2 + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}u^2\right) + \frac{1}{2}\psi_r\left(u_t^2 + \left|\nabla u + \frac{N-1}{2r}\frac{x}{r}u\right|^2 + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}u^2\right).$$

定理1を示すのに (11) で $\varphi = (1+r+t)^{\mu}$ とおき，両辺を $\mathbb{R}^N \times (0,t)$ で部分積分する。$\mu \leq 1$ となること及び $b(x,t)$ の条件から $\int_0^t\int Z\,dxdt \geq 0$ が従い，$\int X\,dx$ を評価すれば (7) の仮定から (8) が得られる。

定理2を示すのに (12) を用いて free な d'Alembert 方程式の解 $w_0(t) = U_0(t)f = \{u^0(x,t), u_t^0(x,t)\}$ に対して，不等式

$$(13) \qquad \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}(1+r)^{-1-\delta}\{u_t^0(x,t)^2 + |\nabla u^0(x,t)|^2\}\,dxdt \leq C\|f\|_E^2$$

が成り立つことを示す。そのために，(12) で $b(x,t) \equiv 0$ とし，

$\psi=\psi(x)=1-\alpha(1+x)^{-\delta}$, $0<\alpha\leqq\dfrac{1}{1+\delta}$, とおく。これを $\mathbb{R}^N\times(0,t)$ で部分積分する。$\tilde{X}$ に関する積分とエネルギー等式 $\|w_0(t)\|_E^2=\|f\|_E^2$ から $\int_0^t\int Z\,dxdt\leqq\tilde{C}\|f\|_E^2$ が得られるが，今は $b\psi-\psi_t\equiv 0$ であるから，$\mathcal{P}$ の形よりこれは (13) の不等式を示すことになる。

さて $w(t)$ を (1) の解，$w_0(t)$ を free equation の解とすると次の等式が成り立つ。

$$(14)\qquad (w(t),w_0(t))_E+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}2b(x,t)\,u_t(x,t)\,u_t^0(x,t)\,dxdt=(w(0),w_0(0))_E.$$

$f\in E$ に対して $w(0)=w_0(0)=U_0(\sigma)f$ とおく。$\|w(t)\|_E\to 0$ as $t\to\infty$ と仮定すると $U_0(t)$ のユニタリー性と (5) を用いて

$$4\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}b(x,t)\,u_t^0(x,t+\sigma)^2\,dxdt\geqq\|f\|_E^2$$

が得られる。$b(x,t)$ の条件と (13) より $\sigma>0$ を充分大きくとると矛盾となる。(ii) も (14) から導びかれる。$\forall f\in E$ に対して $w_0(0)=f$ とおくと (14) から $0<s<t<\infty$ に対し，

$$(U_0(-t)w(t),f)-(U_0(-s)w(s),f)=-\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N}2b(x,t)\,u_t\,u_t^0\,dxdt$$

が得られる。これと (13) とより $\{U_0(-t)w(t)\}$ が $t\to\infty$ で強収束することがわかる。$f^+=s\text{-}\lim_{t\to\infty}U_0(-t)w(t)$ とおけば (10) が得られる。

さて上の2つの定理で $b(x,t)\approx(1+r)^{-1}$ がエネルギー減衰，非減衰の境になることがわかる。ここではこれをもう少し精密にして $b(x,t)\approx(1+x)^{-1}[\log(e+x)]^{-1}$ が境界になっていることを示す。可積分性の議論と同様，これはどこまでも続けていける。

(11) で $\varphi=[\log(e+r+t)]^{\mu}$, $0<\mu\leqq\min\{1, b_0/2\}$ とおくことにより次の定理が証明される。

<u>定理 1′</u> $b(x,t)$ が次の条件をみたすとする：

$$
(6)' \quad \begin{cases} b_0(e+r+t)^{-1}[\log(e+r+t)]^{-1}\leqq b(x,t)\leqq b_1, \\ b_t(x,t)\leqq 0, \qquad b_0, b_1>0. \end{cases}
$$

初期データが (3) 以外に条件 (7) を満たしていれば

$$
(8)' \quad \|w(t)\|_E^2\leqq C(w(0))[\log(1+t)]^{-\mu}, \quad C(w(0))>0.
$$

(12) で $\psi=\psi(x)=1-\alpha[\log(e+r)]^{-\delta}$, $0<\alpha\leqq\frac{1}{1+\delta}$，とおくことにより次の定理が証明される。

<u>定理 2′</u> $N\geqq 3$ とし，$b(x,t)$ が次の条件を満たすとする。

$$
(9') \quad 0\leqq b(x,t)\leqq b_3(e+r)^{-1}[\log(e+r)]^{-1-\delta}, \quad \delta>0, \ b_3>0.
$$

このとき，(1), (2) の解は一般に減衰せず，$t\to\infty$ で free equation の解にエネルギーノルムの意味で漸近する。

証明の方法は上に述べた通りである。

注意 1　定理 1′ は滑らかな境界をもつ $\mathbb{R}^N$ の領域における初期境界値問題に対してもそのまま成り立つ。境界条件は Dirichlet 0 でも Neumann 0 でもよい。

注意 2　定理 2′ は $\mathbb{R}^N$ の星状領域に対する Neumann 問題又，星状領域の補集合に対する Dirichlet 問題に対してもそのまま成り立つ。

注意 3　定理 1′ はもっと一般の非線形波動方程式

$$u_{tt} - \nabla\cdot\{\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u\} + b(x,t)u_t = 0 \tag{15}$$

に対しても成り立つ。ただし $\sigma(s) = 1/\sqrt{1+s}$ である。

注意 4　定理 1′ では $b(x,t)$ が領域全体に support をもっている場合を扱っているが，これは本質的でない。$b(x,t)$ の support が無限遠の近傍だけにある場合，例えば

$$b_0(1+r+t)^{-1} \leq b(x,t) \leq b_1(1+r)^{-\delta}, \quad r > R,\ \delta > 0 \tag{16}$$

なる条件のもとで (8) の結論を得ることができる。証明には (11) で $|x| < R$ の部分に欠陥が生じるが，それを (12) から得られる評価式で補うことができる。このときに $b(x,t)$ が遠方で $(1+r)^{-\delta}$ なる decay order を持つことが使われる。これが本当に必要なものかどうか，今の所わかっていない。

局所的な dissipation に対するエネルギー減衰は [Z], [N] 等で有界領域の問題に対して研究されているが，無限に広がった領域での問題に対しては，境界上の dissipation の場合も含めて，まだよく研究されていない。

注意 1～3 の詳細は [MN] を，また注意4については [Mo3] を参照されたい。

参考文献

[Ma] A. Matsumura, Energy decay of solutions of dissipative wave equations, Proc. Japan Acad., 53 (1977), 232-236.

[Mo1] K. Mochizuki, Scattering theory for wave equations with dissipative term, Publ. RIMS., Kyoto Univ., 12 (1976), 383-390.

[Mo2] 望月 清, 波動方程式の散乱理論, 紀伊國屋書店 1984.

[Mo3] K. Mochizuki, Energy decay for wave equations with damping distributed near infinity, in preparation.

[MN] K. Mochizuki and H. Nakazawa, Energy decay and asymptoti behavior for wave equations with dissipative term, preprint 1994.

[N] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation, preprint 1994.

[Z] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, Comm. P.D.E., 15 (1990), 205-235.