数理解析研究所講究録
905巻 1995年 141-156

弾性方程式のレゾルベントの正則性と局所エネルギーの減衰について

茨城大学 教育学部 川下美潮 (Mishio Kawashita)

§0 序

0.1 問題の背景

Ω は $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$, n は奇数) 内の外部領域で、smooth かつコンパクトな境界 Γ を持つものとする。次の混合問題を考える。

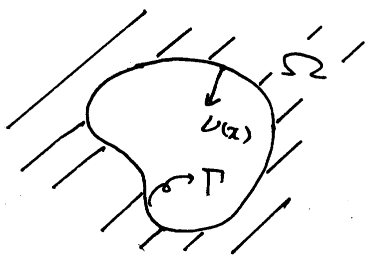
$$
(\mathrm{EN}) \begin{cases} (\partial_t^2 - A(\partial_x))u(t,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega \\ N(\partial_x)u(t,x) = 0 & \text{on } \mathbb{R}\times\Gamma \\ u(0,x) = f_1(x), \quad \partial_t u(0,x) = f_2(x) & \text{on } \Omega \end{cases}
$$

ただし、上で

$$
A(\partial_x)u = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}u) \qquad u = {}^t(u_1, \cdots, u_n)
$$

$$
a_{ij} = \left(a_{ipjq} \;\middle|\; \begin{matrix} i \downarrow 1, \cdots, n \\ j \to 1, \cdots, n \end{matrix} \right)
$$

であり、境界作用素 $N(\partial_x)$ は $A(\partial_x)$ の余法線微分 (Neumann 微分)，すなわち、$x \in \Gamma$ における Ω に対する単位外向き法線ベクトル



$$
\nu(x) = {}^t(\nu_1(x), \cdots, \nu_n(x))
$$

に対して $N(\partial_x)u = \sum_{i,j=1}^{n} \nu_i(x) a_{ij} \partial_{x_j} u|_{\Gamma}$ で表わされるものである。

本稿では以下、一様な等方性の弾性体に対する方程式, i.e.

$$a_{ipjq} = \lambda \delta_{ip}\delta_{jq} + \mu(\delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$$

で、Lamé 定数 λ, μ は (t,x) によらない定数である場合のみを考える。

<u>注意</u> 本稿における議論は、次元 $n(\geq 4)$ が偶数の場合でも、またより一般的な非等方性の弾性体で、a_{ij} があるコンパクト集合上で x にのみ依存するという場合にも成立する([8] 参照)。しかし、本稿の設定でも問題の本質は充分に盛り込まれているので、繁雑さを避ける為にも奇数次元かつ一様な等方性弾性体の場合に限って話を進める。

領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ に対して (EN) の解 $u(t,x)$ の D 内の局所エネルギーを

$$E(u,D,t) = \frac{1}{2}\int_D \Big\{\sum_{i,p,j,q=1}^{n} a_{ipjq}\partial_{x_j}u_q(t,x)\overline{\partial_{x_i}u_p(t,x)} + |\partial_t u(t,x)|^2\Big\}dx$$

で定める。以下、次の仮定をおく。

<u>仮定</u> $\lambda + \frac{2}{n}\mu > 0$, $\mu > 0$

この仮定は, (EN) の全エネルギー $E(u,\Omega,0)$ (これは保存される) が $\|\nabla_x f_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_2\|^2_{L^2(\Omega)}$ と同値なノルムを与えることを保障する(例えば、柴田, 曽我 [14], 伊東 [5] 参照)。それ故、波

動方程式や一階双曲系に対する Lax and Phillips [9] の散乱理論と同様な議論を行なうことができる([14])。

散乱理論にある様に、局所エネルギーの挙動に関する次の結果は基本的である。

(I) $D \subset \mathbb{R}^n$ は有界であるならば $\lim_{t\to\infty} E(u, D, t) = 0$ が成立する。

この様にエネルギーは除々に遠方に抜け出すわけであるが、これは (EN) に対する reduced elastic wave equation

$$(\mathrm{REN})\quad \begin{cases} (A(\partial_x) + z^2)v(x:z) = f(x) & \text{in} \quad \Omega \\ N(\partial_x)\, v(x:z) = 0 & \text{on} \quad \Gamma \end{cases}$$

が $z \in \mathbb{R}$ に対して L^2- 零解 (i.e. $f(x)=0$ に対する自明でない (REN) の L^2- 解) を持たないことと同値である([9], [14])。

この事実は $\mathrm{Im}\, z < 0$ 上の $B(L^2(\Omega), H^2(\Omega))$- 値正則関数と考えられるレゾルベント $R(z)$ (i.e. $R(z)f(x) := v(x:z)$ で定義される (REN) の解作用素のこと) を用いると次の様に述べることができる([6])。

(II) $R(z)$ は $\mathrm{Im}\, z \leq 0$ 上の $B(L^2_a(\Omega), H^2(\Omega_a))$ - 値正則関数である。

ただし上で $a>0$ は $\Gamma \subset B_a$ ($B_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < a\}$) となるもので、$\Omega_a := \Omega \cap B_a$, $L^2_a(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid f(x) = 0 \ \text{ if } |x| > a\}$ である。

この様に「(EN) の解の時間発展に対するエネルギーの挙動」は「レゾルベント $R(z)$ の正則性」と深い関係があることがわかる。本稿では、(EN) に対する上記の関係をより深く考察することが問題である。

岩下，柴田[6]はまた、次のことも示している。

「$R(z)$は$\mathbb{C}$上の $B(L^2_a(\Omega), H^2(\Omega_a))$-値有理型関数に解析接続される。」

それ故、$\mathrm{Im}\, z>0$ には$R(z)$の極が現われる可能性がある。この極の位置（すなわち、$R(z)$の正則性）と(EN)の解の局所エネルギーの挙動とは、大まかに言えば、(EN)の解の特異性の伝播の状況を介して互いに関係付けられると解釈されている。

上記の関係に関する仕事の中で、次の Vainberg [18]（本質的な構想は Lax and Phillips [10] で既に表われている）による仕事が最も基本的であると思われる。

定理0.1 (1) 次の(SNT)を仮定する。

(SNT)「$\forall a>0$, $\Gamma\subset B_a$ に対して $\exists T_a>0$ s.t.
$u(t,x)\in C^\infty([T_a,\infty)\times(\overline{\Omega}\cap B_a))$ が初期data $f_1=0$, $f_2\in L^2_a(\Omega)$ に対する(EN)の解 $u(t,x)$ に対して成り立つ。」

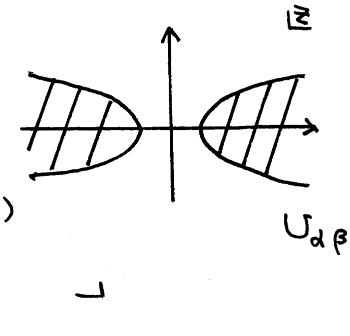
このとき，以下に述べる(A)が成り立つ。

(A) 「$\exists\alpha,\beta>0$ s.t. $R(z)$は $U_{\alpha\beta}=\{z\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z|<\alpha\log|\mathrm{Re}\, z|-\beta\}$ 上で正則でありかつ次の評価をみたす。

$\forall a>0, \Gamma\subset B_a$: $\exists C_a>0$, $\exists T_a>0$ s.t.

$$\|R(z)f\|_{H^{2-j}(\Omega_a)}\le C_a|z|^{1-j}e^{T_a|\mathrm{Im}\, z|}\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$(\forall f\in L^2_a(\Omega),\ \forall z\in U_{\alpha\beta},\ \forall j=0,1,2)$ 」



(2) (1)の(A)を仮定すると、次が成り立つ。

「$\exists \gamma>0$, s.t. $\forall a>0$, $\Gamma\subset B_a$ に対しても $\exists C_a>0$ s.t.

$P_{0,a}(t)\leq C_a e^{-\gamma t}$ $(\forall t>0)$ となる。」

ただし、$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して (EN)の解の局所エネルギーの一様減衰の速さ $P_{m,a}(t)$ を

$$P_{m,a}(t)=\sup\left\{\frac{E(u,\Omega_a,t)}{\|\nabla_x f_1\|^2_{H^m(\Omega)}+\|f_2\|^2_{H^m(\Omega)}}\ \middle|\ 0\neq f={}^t(f_1,f_2)\in C_0^\infty(\overline{\Omega}\cap B_a)\right\}$$

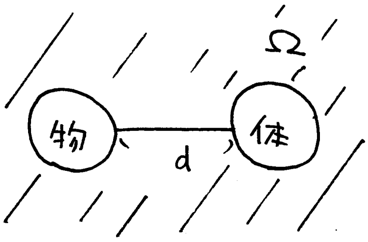
で定めた。この様に(EN)の解の特異性が境界によって拘束されなければ、レゾルベントの極は実軸から少なくとも log の作る曲線だけ離れてしまう。さらに、log の曲線の内部での $R(z)$ の評価が Morawetz [11] が扱った一様な局所エネルギー減衰を引き起こすわけである。

上記の定理の逆、すなわち、(SNT), (A)と一様局所エネルギー減衰との間の関係を完全に付けることは容易なことではない。しかし、スカラー値関数に対する波動方程式に対してはこの方面に対しても多くの仕事が成されている。

まず、Ralston [13] は幾何光学の ray に沿ってエネルギーが集中して伝わる解を漸近解を用いて構成した。解の特異性は通常は幾何光学の ray に沿って伝わることに注意すれば、Ralston [13] の結果は (SNT) が正しくなければ (EN)の解は局所

エネルギー減衰を起こさないことを主張している。

また、井川[2]は二つの狭い意味で凸な物体が作る外部領域の場合(物体間の距離dを与える線分がこの場合の唯一のtrapped rayとなる)、レゾルベントの極は格子 $z_j = ic_0 + \frac{\pi}{d} j$



($j = \pm 1, \pm 2, \cdots$)に漸近して出現することを示した。(ただし、上で $c_0 (>0)$ はtrapped rayの反射点の曲率から決まる定数である。) Gérard [1]はさらに $\mathrm{Im}\, z > c_0$ での極の出現する位置について調べた。また、井川[3]は反射点の曲率が0になる場合には実軸に近づく極が存在することを示した。これらの仕事は定理0.1の(1)の逆に相当するものであると考えられる。

一方、波動方程式の場合は、もし物体 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ が凸ならば、(SNT)が成立することが知られている。それ故、(A)と一様指数減衰が成り立つわけである。この様に波動方程式の場合は定理0.1にある三つの概念には深い関係があることがわかる。

0.2 考察すべき問題

(EN)に対しては、Rayleigh波と呼ばれている境界上を伝わる波が存在する(Rayleigh波は最初、半空間の場合にRayleighによって発見された)。一般の境界の場合は、Taylor [17]によ

り、特異性伝播の意味でその存在が確かめられている(中村[12]及びその文献表も参照)。故に(EN)の場合は(SNT)は成立しない。それ故、次の命題が成立する([7])。

命題 0.2　(EN)の場合、$^{\forall}a>0$, $\Gamma \subset B_a$ に対しても

$$\lim_{t\to\infty} P_{0,a}(t) \neq 0 \quad \text{である。}$$

これは前述のRalston[13]の結果に対応するものである。

上記の結果と波動方程式の場合との考察とを鑑みると、次に考えるべき問題は(EN)のレゾルベントの極に関することである。

問題1　$R(z)$の極は$U_{\alpha\beta}$内のどこに現れるか(現れないか)。

問題2　$m \geq 1$のとき、$P_{m,a}(t)$の$t\to\infty$のときの挙動はどうなるか。

注意　Walker[20]は波動方程式の場合に、Rallichのコンパクト埋め込み定理と局所エネルギー減衰(I)のみを用いて$m \geq 1$のときは$\lim_{t\to\infty} P_{m,a}(t) = 0$であることを示した。もちろん、Walkerの方法は(EN)でも通用する。そこで、$P_{m,a}(t)$の挙動が問題になる。

0.3 諸結果

この方面に対する出発点となる仕事は池畠、中村[4]による次のものである。

定理 0.3 $n=3$ とし、$\Gamma = S^2$ ($\mathbb{R}^3$内の単位球面) とすると $^\forall m \in \mathbb{N}$, $^\forall a > 0$, $\Gamma \subset B_a$, $^\forall \gamma > 0$ に対して次が成立する。

$$\lim_{t \to \infty} e^{\gamma t} P_{m,a}(t) = \infty$$

(すなわち、$P_{m,a}(t) \leq C e^{-\gamma t}$ ―① の型の評価は成り立たない。)

①はLaplace変換によりレゾルベントの極は $\mathrm{Im}\, z < \gamma$ 内には現われないことを意味することがわかる。そこで、池畠、中村[4]は特殊関数を用いて(REN)の解で実軸に近づく極を持つものを構成し、定理0.3を示した。実はレゾルベントの極の集合は[4]に既に表われている特殊関数の積の和で表わされる正則関数 $\Delta_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ の零点の全体の作る集合と一致する。この事実に着目し、$\Delta_n(z)$ の零点の挙動を詳しく調べ、以下に述べるレゾルベントの極に関する詳しい結果を導いたのが、Stefanov and Vodev [15]である。

定理 0.4 $n=3$, $\Gamma = S^2$ とすると $^\exists C_1, C_2 > 0$ s.t.

$0 < \mathrm{Im}\, z < C_1 |z|^{1/3} - C_2$ 内のレゾルベントの極はRayleigh波

に対応するもののみである。それらは、$\{z_n\}_{n=1,2,\dots}\cup\{-\bar{z}_n\}_{n=1,2,\dots}$ で表わされ、さらに、$^\exists d_1, d_0 \in \mathbb{R}$, $^\exists \gamma>0$ $^\exists C>0$ s.t.

$$z_n = d_1 n + d_0 + O(n^{-1}) \quad (n\to\infty), \quad \mathrm{Im}\, z_n \le Ce^{-\gamma n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

が成り立つ。

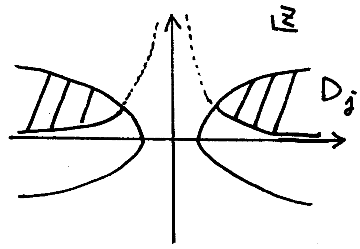
この様にRayleigh波に対する極は実軸に指数的に近づき、かつRayleigh波に対応する極とその他の極とは分れて出現すると考えられる。その理由としては、Γが球の場合はRayleigh波以外の特異性は境界によって拘束されないということが考えられる。実際、Rayleigh波に対応する特異性以外の特異性は物体$\mathbb{R}^n\setminus\Omega$によって拘束されないという状況を一般的に設定して以下に述べる様な定理を示すことができる([8]参照)。しかし一般的に述べると記述が繁雑になることと、山本[21]よりΓが狭い意味で凸ならば上記の状況が実際に起こることがわかるので、以下、Γは狭い意味で凸であるとして話を進めることにする。

<u>定理 0.5</u>　Γは狭い意味で凸とすると次が成り立つ。

(1) $^\exists \alpha, \beta>0$ s.t. $^\forall j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $^\exists c_j>0$ s.t.

$$D_j = \{z\in U_{\alpha\beta} \mid \mathrm{Im}\, z \ge c_j |\mathrm{Re}\, z|^{-j}\}$$

上で $R(z)$ は正則である。



(2) $\forall a>0$, $\Gamma\subset B_a$ $\exists C_a>0$, $\exists T_a>0$ s.t.

$$\|R(z)f\|_{H^{2-\ell}(\Omega_a)}\le C_a|\mathrm{Im}\,z|^{-1}|z|^{7-\ell}e^{T_a|\mathrm{Im}\,z|}\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$(\forall f\in L^2_a(\Omega),\ \forall \ell=0,1,2,\ \forall z\in D_j,\ \forall j=0,1,2,\cdots)$$

定理0.5の(2)の評価とLaplace変換より次のことが背理法によって示せる。

<u>定理0.6</u>　Γは狭い意味で凸とする。このとき、$\forall a>0$, $\Gamma\subset B_a$, $\forall \gamma>0$, $\forall m\in\mathbb{N}$ に対して $\lim_{t\to\infty}t^{\gamma}P_{m,a}(t)=\infty$ となる。

すなわち $P_{m,a}(t)\le Ct^{-\gamma}$ — ② とはならない。これは[4]の結果の一つの拡張になっている。

極の存在に関しては最近 Stefanov and Vodev [16] により次のことが示された。

<u>定理0.7.</u>　$n=3$で、Γは狭い意味で凸とする。このとき、

(i)　定理0.5の(1)が成立する。

(ii)　実軸に近づく$R(z)$の極の列が存在する。

この様に上記の問題に関して一応の解答が得られている。

注意　§1で述べる様に[16]では $n=3$、かつ Γ は狭い意味で凸という仮定は本質的である。また定理0.6の証明法と、定理0.5と、[16]の極の非存在性のみよりレゾルベントの評価(§1の⑤)を出す方法とを合わせると、Rayleigh波以外の特異性が拘束されないという設定のみより極の存在を示すこともできる([8])。

§1 証明について

定理0.5の証明には(REN)に対するNeumann作用素(Dirichlet to Neumann mapとも呼ばれている)を用いる。Neumann作用素 $T^+(z)$ は非斉次Dirichlet境界値問題

$$\begin{cases} (A(\partial_x)+z^2)v^+(x;z)=0 & \text{in } \Omega \\ v^+(x;z)=g(x) & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

の解作用素 $U^+(z)$ ($U^+(z)g(x)=v^+(x;z)$) に対して

$$T^+(z)g(x)=N(\partial_x)U^+(z)g|_\Gamma$$

で定義されるものである。$U^+(z)$ は $\mathrm{Im}\, z<0$ では $B(H^{3/2}(\Gamma), H^2(\Omega))$-値正則関数であるが、$\Gamma$ が狭い意味で凸のときはVainberg[18]により $^\exists\alpha, \beta>0$ が存在して $U_{\alpha\beta}$ 上の $B(H^{3/2}(\Gamma), H^2(\Omega_a))$-値正則関数に解析接続できる。故に次が成り立つ。

$T^+(z)$ は $U_{\alpha\beta}$ 上の $B(H^{3/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))$-値正則関数である。

命題1.1　次の(i)〜(iii)は同値である。

(i)　$z_0 \in U_{\alpha\beta}$ は $R(z)$ の極である。

(ii)　$\mathrm{Ker}\,T^+(z_0) = \{0\}$ となる。

(iii)　z_0 は $(T^+(z))^{-1}$（これは $B(H^{1/2}(\Gamma), H^{3/2}(\Gamma))$-値正則関数と見なせる）の極である。

命題1.1よりレゾルベントの正則性を示すには $T^+(z)$ の下からの評価を求めれば良いことがわかる。Neumann作用素の下からの評価は次で保障される。

命題1.2　Γ は狭い意味で凸とする。このとき、$\forall T_1 > 0$ を固定すると、それに対して $\exists T > 0$, $\exists C > 0$ が存在して

$$|\hat{\chi}(z)|\,\|g\|_{-1/2} \le C|\mathrm{Im}\,z|^{-1}|z|^3 e^{T|\mathrm{Im}\,z|}\{\|\chi\|_{H^1(\mathbb{R})} + |\hat{\chi}(z)|\}\|T^+(z)g\|_{-3/2}$$
$$+ C_j|\mathrm{Im}\,z|^{-1}|z|^{3-j} e^{T|\mathrm{Im}\,z|}\|\chi\|_{H^1(\mathbb{R})}\|g\|_{-1/2}$$
$$(\forall \chi \in C_0^\infty((-T_1, T_1)),\ \forall g \in H^{3/2}(\Gamma),\ \forall z \in U_{\alpha\beta}\setminus\mathbb{R},\ j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ。上で $C_j > 0$ は T_1 と j 以外にはよらない定数である。また、$\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}$ である。

$z \in U_{\alpha\beta}\setminus\mathbb{R}$ に対して、$\chi(t) = e^{izt}m(t)$（$m \in C_0^\infty((-T_1, T_1))$, $\int_{-\infty}^{\infty} m(t)\,dt = 1$, m は z によらない）とすれば、命題1.2より

$$\|g\|_{-1/2} \le C|\mathrm{Im}\, z|^{-1}|z|^4 e^{T|\mathrm{Im}\, z|}\|T^+(z)g\|_{-3/2} + C_j|\mathrm{Im}\, z|^{-1}|z|^{4-j} e^{T|\mathrm{Im}\, z|}\|g\|_{-1/2}$$

となるが、$\exists p \in \mathbb{N}$ s.t. $e^{T|\mathrm{Im}\, z|} \le |z|^p$ ($\forall z \in U_{\alpha\beta}$) だから結局、

$$\|g\|_{-1/2} \le C|\mathrm{Im}\, z|^{-1}|z|^4 e^{T|\mathrm{Im}\, z|}\|T^+(z)g\|_{-3/2} \qquad \text{— ③}$$
$$(\forall g \in H^{3/2}(\Gamma),\ \forall z \in D_j,\ j=0,1,2,\cdots)$$

を得る。よって、定理0.5 の(1)が示せた。レゾルベントの評価を示すには② と同様の評価を incoming Neumann 作用素 $T^-(z)$ に対しても示しておき、その評価と部分積分より示せる等式

$$(T^+(z)g,\ h)_{L^2(\Gamma)} = (g,\ T^-(\bar{z})h)_{L^2(\Gamma)} \quad (\forall z \in U_{\alpha\beta},\ \forall g, h \in H^{3/2}(\Gamma))$$

と、Sobolev norm の性質

$$\|g\|_s \le C(s) \sup_{0 \ne h \in C^\infty(\Gamma)} \left\{ \frac{(g,\ h)_{L^2(\Gamma)}}{\|h\|_{H^{-s}(\Gamma)}} \right\} \qquad (\forall g \in H^s(\Gamma))$$

とに注意すると

$$\|g\|_{3/2} \le C|\mathrm{Im}\, z|^{-1}|z|^4 e^{T|\mathrm{Im}\, z|}\|T^+(z)g\|_{1/2} \qquad (\forall z \in D_j,\ \forall g \in H^{3/2}(\Gamma))$$

を得る。故に Dirichlet 問題に対するレゾルベントの評価と、$U^+(z)$ の評価とを合わせて定理0.5 の(2)の評価を得る。

定理0.6 は背理法で示す。もし、定理0.6 が成立しないならば、$P_{m,a}(t)$ は ② の様な評価を受けることになる。だから、Laplace 変換により、$\exists \ell \in \mathbb{N}$ が存在してレゾルベント $R(z)$ は $|\mathrm{Im}\, z| \le \frac{1}{2}|\mathrm{Re}\, z|^{-\ell}$ で正則であり、さらに、

$$\|R(z)f\|_{H^{2-j}(\Omega_a)} \leq C|z|^{\ell-j}\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$(\forall f\in L^2_a(\Omega),\ \forall z\in\mathbb{C},\ |\mathrm{Im}\,z|\leq\frac{1}{2}|\mathrm{Re}\,z|^{-\ell},\ \forall j=0,1,2,\cdots)$$

と評価されることがわかる。故に、定理0.5 の(2)の評価と合わせると Vainberg [18] の方法を用いて一様局所エネルギー減衰、より詳しく、 $P_{0,a}(t)\leq Ce^{-\delta t}$ となることがわかり、命題0.2 に反する。故に定理0.6 を得る。(定理0.5、0.6 の証明の詳細については[8]参照。)

最後に Stefanov and Vodev [16]の極の存在を示す手法について述べる。彼らの方針はまず Γ は狭い意味で凸という仮定より parametrix を作り、それを用いて Neumann 作用素の log の曲線上 (i.e $\partial U_{\alpha\beta}$ 上)での評価を求める。Elliptic region では、Neumann 作用素は一階の擬微分作用素であり、その主シンボルは $\sigma_p(T^+(z))(q,\xi_q)=z-C_R\|\xi_q\|_\Gamma$ ($C_R>0$ は Rayleigh 波の伝播速度、$\|\cdot\|_\Gamma$ は Riemann metric から決まる $T^*(\Gamma)$の fiber metric) であるから

$$\|g\|_{3/2}\leq C(\log|\mathrm{Re}\,z|)^{-1}\|T^+(z)g\|_{3/2}\quad \text{on } \partial U_{\alpha\beta}\quad -④$$

を得る。(注意、実際に④を得るには大変な労力を要する。)

次に彼らはもし極が $U_{\alpha\beta}$ の内部になければ、すなわち、$U_{\alpha\beta}$ 内で $R(z)$ は正則であるならば、実は Vodev [19] にある様なレゾルベントを巧みに cut off した上、trace 作用素の諸理論を用いて $R(z)$ は

$$\|R(z)f\|_{H^{2-\delta}(\Omega_a)} \leq Ce^{C|z|^4} \quad \text{— ⑤}$$
$$(\forall f \in L^2_a(\Omega),\ \forall z \in U_{\alpha\beta})$$

と評価できることを示した。だから最大値原理より④の評価が $U_{\alpha\beta}$ 内で成立し、その評価が矛盾を与えるわけである。

この様に、極が存在しないという仮定のみから⑤の様なレゾルベントの評価を導き出せるという点が[16]の idea の優れた点である。

参考文献

[1] C. Gérard, Bull. S. M. F. 116 n°31 (1988)

[2] M. Ikawa, J. Math. Kyoto Univ. 23(1983), 127-194.

[3] M. Ikawa, Osaka J. Math. 22(1985), 657-689.

[4] M. Ikehata and G. Nakamura, Japan J. Appl. Math. 6(1989) 83-95.

[5] H. Ito, J. Elasticity, 24 (1990) 43-78.

[6] H. Iwashita and Y. Shibata, Glasnik Math. 43 (1988), 291-313.

[7] M. Kawashita, Duke Math. J. 67 (1992), 333-351.

[8] M. Kawashita, to appear in Indiana Math. J.

[9] P.D. Lax and R.S. Phillips, "Scattering Theory" Academic Press

[10] P. D. Lax and R.S. Phillips, Arch. Rat. Mech. Anal. 40 (1971), 268-280.

[11] C. S. Morawetz, Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 439−444.

[12] G. Nakamura, "Modern theory of anisotropic elasticity and applications", SIAM, Philadelphia, 1991, pp. 215−231.

[13] J. Ralston, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969) 807−823.

[14] Y. Shibata and H. Soga, Publ. RIMS Kyoto Univ. 25 (1989), 861−887.

[15] P. Stefanov and G. Vodev, Ann. Inst. H. Poincaré (Physique Théorique) 60 (1994) 303−321.

[16] P. Stefanov and G. Vodev, to appear in Duke Math. J.

[17] M. Taylor "Proc. Conf. on PDE and Geometry" Marcel Dekker, 273−291.

[18] B. R. Vainberg, Russian Math. Surveys 30 (1975), 1−58.

[19] G. Vodev, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 42 (1992), 625−635.

[20] H. F. Walker, J. Diff. Eq. 23 (1977), 459−471.

[21] K. Yamamoto, Japan J. Math. 14 (1988) 119−163.

—。—。—。—。—。—。—

最近，Stetanov and Vodev が $n=3$ の場合に，Γの仮定なしに実軸に近づく極の存在を示すことに成功した。[16] の極の非存在性からレゾルベントの評価を得ることより矛盾を導くという手法をより精密にした方法で証明している。この仕事により問題1はほぼ解決されたわけである。