

## 知識命題の標準形を用いる妥当性検証

大芝 猛 (Takeshi OSHIBA)\*  
小橋 一秀 (Kazuhide KOBASHI)†

$m$  個の命題変数  $p_1, \dots, p_m$  に対し、論理記号  $\wedge, \vee, \supset, \neg$  の他に、異なる  $n$  人に対する “know” 記号  $K_1, \dots, K_n$  を用いてうる知識論理式全体を  $\mathcal{L}$  とする。そのうち know 記号の operate の深さが  $k$  のものを  $\mathcal{L}^{(k)}$  とする<sup>1</sup>。

演繹体系  $K$  は言語  $\mathcal{L}$  について、次の公理と推論からなる。

- a0 トートロジー論理式
  - a1  $K_i(A) \supset A$
  - a2  $K_i(A) \supset K_i(K_i(A))$
  - a3  $\neg K_i(A) \supset K_i(\neg K_i(A))$
  - a4  $K_i(A) \wedge K_i(B) \supset K_i(A \wedge B)$
  - a5  $K_i(A \supset B) \supset (K_i(A) \supset K_i(B))$
- $$\frac{A \quad A \supset B}{B} \text{ (MP-rule)} \quad \frac{A}{K_i(A)} \text{ (K}_i\text{-rule)}$$

この体系  $K$  で論理式  $A$  が証明可能なことを “ $\vdash A$ ” で表わす。

以下 “strictly know” なる概念に対応する記号  $K_i[\ ]$  とこれにもとづく world なる式を導入し、さらに論理式  $A$  に対する一種の  $\wedge$ - $\vee$  標準形展開を意味する world の集合  $W_A$  を定義する。その上で  $W_A$  を用いて “ $\vdash A$ ” を判定する 1 つのシンタクティカルなアルゴリズムを提起する (定理 17)。

定義 1  $W^{(k)}$ : degree  $k$  の world の集合

$$W^{(0)} = \left\{ p_1^{\delta_1} \wedge \dots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_m \in \{0, 1\} \right\}, \quad p^\delta = \begin{cases} p & (\delta = 1) \\ \neg p & (\delta = 0) \end{cases}$$

$$W^{(k+1)} = \left\{ \left\langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid g \in W^{(k)}, U_1, \dots, U_n \subseteq W^{(k)} \right\}$$

記法  $f = \left\langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \in W^{(k+1)}$  に対し  $g = f^{<k+1}$ ,  $U_i = f_i^{(k+1)}$  とおく

定義 2 strictly know  $K_i[\ ]$  等の論理的意味付け “\*”

- $U \subseteq W^{(k)}$  に対し、

$$*K_i[U] \stackrel{\text{def}}{=} K_i(*U) \wedge \bigwedge_{U \subseteq V \subseteq W^{(k)}} \neg K_i(*V)$$

\*名古屋工業大学

†名古屋工業大学

<sup>1</sup> $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} \cup \mathcal{L}^{(1)} \cup \dots$  ( $\mathcal{L}^{(0)}$  は命題論理式全体)

- $U = \{g_1, \dots, g_d\}$  のとき、 $*U \stackrel{\text{def}}{=} *g_1 \vee \dots \vee *g_d$
- $f = \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle$  に対し、 $*f \stackrel{\text{def}}{=} *g \wedge \bigwedge_{i=1}^n *K_i[U_i]$

補助定理 0  $U, V \subseteq W^{(k)}$  に対し、

$$\vdash *K_i[U] \wedge K_i(*V) \equiv \begin{cases} *K_i[U] & \text{if } U \subseteq V & (1) \\ \perp (\text{矛盾}) & \text{if } U \not\subseteq V & (2) \end{cases}$$

補助定理 1  $U, V \subseteq W^{(k)}$  に対し、 $U \neq V \Rightarrow \vdash (*K_i[U] \wedge *K_i[V] \equiv \perp)$

補助定理 2  $f, g \in W^{(k)}$  に対し、

$$f \neq g \Rightarrow \vdash *f \wedge *g \equiv \perp$$

但し、 $U = V$  は集合の等号、 $f = g$  は式としての等号。

補助定理 3  $U, V \subseteq W^{(k)}$  に対し、 $U \cap V = \phi \Rightarrow \vdash *U \wedge *V \equiv \perp$

補助定理 4  $U, V$  に対し、 $\vdash *(U \cap V) \equiv *U \wedge *V$

定理 5  $U \subseteq W^{(k)}$  に対し、

$$\vdash *K_i[U] \equiv K_i(*U) \wedge \bigwedge_{V \not\subseteq U} \neg K_i(*V)$$

定理 6  $U \subseteq W^{(k)}$  に対し、

$$\vdash K_i(*U) \equiv \bigvee_{V \subseteq U} *K_i[V] \quad [\text{定理 5 を用いる}]$$

定理 7  $\vdash *W^{(k)}$  [定理 6 を用いる]

定義 3  $\text{deg}(A) = A$  内の  $K_1, \dots, K_n$  演算の深さの最大値

$$\mathcal{L}^{(k)} = \{A \in \mathcal{L} \mid \text{deg}(A) = k\}$$

定義 4 *world* の集りの “条件なし拡張” と “限定”

$$\begin{aligned} U \subseteq W^{(k)} \quad \text{に対し} \quad U' &= \left\{ \left\langle f, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid f \in U, U_1, \dots, U_n \subseteq W^{(k)} \right\} \\ V \subseteq W^{(k+1)} \quad \text{に対し} \quad 'V &= \left\{ \left\langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \in V, \text{ for some } U_1, \dots, U_n \subseteq W^{(k)} \right\} \end{aligned}$$

定義 5  $U \subseteq W^{(k)}$   $l \geq k$  に対し  $U^{<l>} \stackrel{\text{def}}{=} U^{\overbrace{\dots}^{l-k}}$

補助定理 8  $U \subseteq W^{(k)}$  に対し  $'(U') = U$

補助定理 9  $U, V \subseteq W^{(k)}$  に対し

$$(U \cap V)' = U' \cap V' \quad (1)$$

$$(U \cup V)' = U' \cup V' \quad (2)$$

$$(W^{(k)} - U)' = W^{(k+1)} - U' \quad (3)$$

補助定理 10  $U \subseteq W^{(k)}$  に対し  $\vdash^*(U') \equiv *U$

補助定理 11  $U \subseteq W^{(k)}$ ,  $l \geq k$  に対し  $\vdash^*(U^{<l>}) \equiv *U$

定義 6 論理式  $A$  に対する *world* の集合  $W_A$  (一種の  $\wedge - \vee$  標準系展開)

$$W_{p_j} = \left\{ p_1^{\delta_1} \wedge \cdots \wedge p_{j-1}^{\delta_{j-1}} \wedge p_j \wedge p_{j+1}^{\delta_{j+1}} \wedge \cdots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \delta_{j+1}, \dots, \delta_m \in \{0, 1\} \right\} \quad (4)$$

$$W_{B \wedge C} = W_B^{<k>} \cap W_C^{<k>} \quad k = \max(\deg(B), \deg(C)) \quad (5)$$

$$W_{B \vee C} = W_B^{<k>} \cup W_C^{<k>} \quad k = \max(\deg(B), \deg(C)) \quad (6)$$

$$W_{\neg B} = W^{(k)} - W_B \quad k = \deg(B) \quad (7)$$

$$W_{K_i(B)} = \left\{ f \in W^{(k+1)} \mid f_i^{(k+1)} \subseteq W_B \right\}, \text{ 但し } f = \langle f^{<k+1>} , \begin{pmatrix} K_1[f_1^{(k+1)}] \\ \vdots \\ K_i[f_i^{(k+1)}] \\ \vdots \\ K_n[f_n^{(k+1)}] \end{pmatrix} \rangle \quad (8)$$

また  $B \supset C$ :  $\neg B \vee C$  または  $W_{B \supset C} = (W^{(k)} - W_B^{<k>}) \cup W_C^{<k>}$ ,  $k = \max(\deg(B), \deg(C))$

定理 12

$$\vdash A \equiv *W_A$$

[付録参照]

定義 7  $\vdash A$  を規定するため *world* の部分集合  $S^{(k)} \subseteq W^{(k)}$  を導入する。

$$S^{(0)} = W^{(0)} \quad (9)$$

$$S^{(1)} = \left\{ \langle g , \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid \begin{array}{l} 0) \quad g \in S^{(0)} \\ 1) \quad \forall i (g \in U_i \subseteq S^{(0)}) \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$S^{(k+2)} = \left\{ \langle g , \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid \begin{array}{l} 0) \quad g \in S^{(k+1)} \\ 1) \quad \forall i (g \in U_i \subseteq S^{(k+1)}) \\ 2) \quad \forall i (\forall f \in U_i \Rightarrow f_i^{(k+1)} = g_i^{(k+1)}) \\ 3) \quad \forall i (U_i = g_i^{(k+1)}) \end{array} \right\} \quad (k \geq 0) \quad (11)$$

但し  $U \subseteq S^{(l)}$  に対し  $U \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{<l>} \mid f \in U\}$  (restrictions of  $U$ )

補助定理 13  $\forall k (f \in W^{(k)} - S^{(k)} \Rightarrow \vdash^* f \equiv \perp)$

定理 14  $\forall k (\vdash *S^{(k)})$

$$\begin{aligned}
 *S^{(k)} &\equiv *S^{(k)} \vee \perp \\
 &\equiv *S^{(k)} \vee *(W^{(k)} - S^{(k)}) \quad \text{補助定理 13} \\
 &\equiv *(S^{(k)} \cup (W^{(k)} - S^{(k)})) \\
 &\equiv *W^{(k)} \\
 \text{従って 定理 7 より } &\vdash *S^{(k)}
 \end{aligned}$$

補助定理 15  $A$  が  $a_0 \sim a_5$  の公理のとき

$$\deg(A) = k \Rightarrow W_A \cap S^{(k)} = S^{(k)}$$

補助定理 16

(1) 推論  $\frac{A \quad A \supset B}{B}$  (M.P.) に関して、 $\deg(A) = d, \deg(B) = l, \max(d, l) = k$  のとき、

$$W_A \cap S^{(d)} = S^{(d)}, W_{A \supset B} \cap S^{(k)} = S^{(k)} \Rightarrow W_B \cap S^{(l)} = S^{(l)}$$

(2) 推論  $\frac{A}{K_i(A)}$  ( $K_i$ ) に関して、 $\deg(A) = k$  のとき、

$$W_A \cap S^{(k)} = S^{(k)} \Rightarrow W_{K_i(A)} \cap S^{(k+1)} = S^{(k+1)}$$

[ 付録参照 ]

定理 17  $\deg(A) = k$  のとき

$$\begin{aligned}
 \vdash A &\iff W_A \cap S^{(k)} = S^{(k)} \\
 &[\iff S^{(k)} \subseteq W_A]
 \end{aligned}$$

“ $\Rightarrow$  part” は補助定理 15 と補助定理 16 から、

“ $\Leftarrow$  part”:

$$\begin{aligned}
 W_A \cap S^{(k)} = S^{(k)} \Rightarrow *S^{(k)} &\equiv *(W_A \cap S^{(k)}) \\
 &\equiv *W_A \wedge *S^{(k)} \quad \text{補助定理 4} \\
 &\equiv *W_A \quad \text{定理 14} \\
 &\equiv A \quad \text{定理 12}
 \end{aligned}$$

従って、再び定理 14 から  $\vdash A$

## 参考文献

- [1] R. Fagin, J. Y. Halpern, M. Y. Vardi: *A Model-Theoretic Analysis of Knowledge Preliminary Report, 25thFOCS*
- [2] J. Hintikka: *Knowledge and belief, Cornell University Press 1962*
- [3] M. Sato: *A study of Kripke-type Models for some Modal Logics by Gentzen's Sequential Method Publications Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, 1977*

付録

定理 12 の証明:

A 内の論理記号または  $K_i$  記号の個数に関する帰納法を用いる。  $\wedge, \vee, \neg, \supset$  に関しては省略。

$A = K_i(B)$  の場合:  $\text{deg}(K_i(B)) = k (\geq 1)$  とおく

$$\begin{aligned}
 K_i(B) &\equiv K_i(*W_B) \quad (\text{帰納法の仮定}) \\
 &\equiv *W^{(k)} \wedge K_i(*W_B) \quad \text{補助定理 7} \\
 &\equiv \left( \bigvee_{f \in W^{(k)}} *f \right) \wedge K_i(*W_B) \\
 &\equiv \bigvee_{f \in W^{(k)}} (*f \wedge K_i(*W_B)) \\
 &\equiv \bigvee_{\substack{f \in W^{(k)} \\ f_i^k \subseteq W_B}} (*f \wedge \underline{K_i(*W_B)}) \vee \bigvee_{\substack{f \in W^{(k)} \\ f_i^k \not\subseteq W_B}} (*f \wedge \underline{K_i(*W_B)}) \\
 &\quad \left( \begin{array}{l} f \in W^{(k)} \\ f_i^k \subseteq W_B \end{array} \right) \downarrow \quad \left( \begin{array}{l} f \in W^{(k)} \\ f_i^k \not\subseteq W_B \end{array} \right) \downarrow \begin{array}{l} f_i^{(k)} \not\subseteq W_B \text{ と補助定理 0-(2) から} \\ K_i[f_i^{(k)}] \wedge \underline{K_i(*W_B)} \equiv \perp \end{array} \\
 &\equiv \underbrace{\left( *f <^k \wedge \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n *K_j[f_j^{(k)}] \wedge *K_i[f_i^{(k)}] \right)}_{\equiv K_i[f_i^{(k)}]} \wedge \underline{K_i(*W_B)} \quad f_i^{(k)} \subseteq W_B \text{ と補助定理 0-(1) から} \\
 &\equiv \bigvee_{\substack{f \in W^{(k)} \\ f_i^k \subseteq W_B}} *f \\
 &\equiv * \left\{ f \in W^{(k)} \mid f_i^{(k)} \subseteq W_B \right\} \\
 &\equiv *W_{K_i(B)}
 \end{aligned}$$

補助定理 16 の証明:

(1)  $\frac{A \quad A \supset B}{B}$  MP について  $\text{deg}(A) = d, \text{deg}(B) = l, \max(d, l) = k$  のとき

$$\begin{aligned}
 &\boxed{W_A \cap S^{(d)} = S^{(d)}}, W_{A \supset B} \cap S^{(k)} = S^{(k)} \implies \\
 S^{(k)} &= ((W^{(k)} - \underbrace{W_A^{(k-d)}}_{\dots}) \cup \underbrace{W_B^{(k-l)}}_{\dots}) \cap S^{(k)} \\
 &= ((W^{(k)} \cap S^{(k)}) - \underbrace{(W_A^{(k-d)} \cap S^{(k)})}_{\dots}) \cup \underbrace{(W_B^{(k-l)} \cap S^{(k)})}_{\dots} \\
 &\quad \boxed{S^{(d)} \subseteq W_A}, S^{(k)} \subseteq S^{(d)} \underbrace{\dots}_{k-d} \subseteq \underbrace{W_A^{(k-d)}}_{\dots} \text{ であるから} \\
 &= ((S^{(k)} - \underbrace{S^{(k)}}_{\dots}) \cup \underbrace{(W_B^{(k-l)} \cap S^{(k)})}_{\dots}) \\
 &= \underbrace{W_B^{(k-l)} \cap S^{(k)}}_{\dots} \\
 \text{即ち } S^{(k)} &= \underbrace{W_B^{(k-l)} \cap S^{(k)}}_{\dots} \text{ 従って}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\quad}_{\dots}^{k-l} \mathbf{S}^{(k)} &= \underbrace{\quad}_{\dots}^{k-l} (\mathbf{W}_B \underbrace{\quad}_{\dots}^{k-l} \cap \mathbf{S}^{(k)}) \\ &= \underbrace{\quad}_{\dots}^{k-l} (\mathbf{W}_B) \underbrace{\quad}_{\dots}^{k-l} \cap \underbrace{\quad}_{\dots}^{k-l} \mathbf{S}^{(k)} \end{aligned}$$

よって  $\mathbf{S}^{(l)} = \mathbf{W}_B \cap \mathbf{S}^{(l)}$

(2)  $\frac{A}{\mathbf{K}_i(A)}$  ( $\mathbf{K}_i$ ) について  $\deg(A) = k$  のとき

$\mathbf{W}_A \cap \mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)}$  即ち  $\mathbf{S}^{(k)} \subseteq \mathbf{W}_A$  を仮定

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\mathbf{K}_i(A)} \cap \mathbf{S}^{(k+1)} &= \left\{ \left\langle f, \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_i[\mathbf{U}_i] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid f \in \mathbf{W}^{(k)}, \mathbf{U}_i \subseteq \mathbf{W}_A, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{W}^{(k)} \right\} \\ &\cap \left\{ \left\langle f, \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid f \in \mathbf{S}^{(k)}, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{S}^{(k)} \right\} \\ &= \left\{ \left\langle f, \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_i[\mathbf{U}_i] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid f \in \mathbf{S}^{(k)}, \underbrace{(\mathbf{U}_i \subseteq \mathbf{W}_A \ \& \ \mathbf{U}_i \subseteq \mathbf{S}^{(k)})}_{\updownarrow \text{仮定より}}, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{S}^{(k)} \right\} \\ &= \mathbf{S}^{(k+1)} \end{aligned}$$