

Title	2次元オルタネイティング $o(\log\log m)$ 領域計算量クラスの補集合に関する非閉包性(アルゴリズムと計算量理論)
Author(s)	伊藤, 暁; 井上, 克司; 王, 躍
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 906: 104-111
Issue Date	1995-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/59455">http://hdl.handle.net/2433/59455</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

2次元オルタネイティング $o(\log\log m)$ 領域計算量クラスの補集合に関する非閉包性

伊藤 暁 (Akira ITO), 井上 克司 (Katsushi INOUE), 王 躍 (Yue WANG)  
(山口大学工学部)

1. ま え が き

2次元オートマトンとは, 1次元文字列のかわりに, 2次元方形配列を入力テープとするオートマトンである<sup>(1-3)</sup>. その入力ヘッドは入力テープ上を上下左右の4方向に動くことができるが, 入力パターンの4辺を取り囲む境界記号#をはみ出すことはない.

最近 Jiang らは, 2次元オルタネイティング有限オートマトンで受理される集合族が補集合に関して閉じていないことを示した<sup>(4)</sup>.

本論文では, 彼等の結果が $o(\log\log m)$ 領域限定2次元オルタネイティングチューリング機械の場合にまで拡張できることを示す. ここに,  $m$ は正方形入力テープの行(列)数である. また, 全称状態のみの $o(\log\log m)$ 領域限定2次元オルタネイティングチューリング機械で受理される集合族は決定性機械で受理される集合族, あるいはその補集合族のいずれとも一致しないことを示す. なお, 1次元の場合には,  $o(\log\log n)$ 領域限定オルタネイティングチューリング機械で受理される言語族は正規言語族であることが知られている<sup>(5)</sup>.

彼等は, 2部グラフを平面上に埋め込んだ2次元テープ集合をテスト集合として用いたが, 我々は, より馴染み易い上下対象図形を用いる. また, 不可能性の証明において, 通常の通過列論法のように一つの分割線を横切る計算状況の系列(crossing sequence)を単純に数え上げる手法を用いると所望の結果を導くことができない. そのため, 系列の並び順序を無視し, 計算状況(の対)の集合自体を数え上げることにより矛盾を導く.

2. 諸 定 義

【定義2.1】  $\Sigma$ を記号の有限集合とする.  $\Sigma$ 上の2次元テープとは,  $\Sigma$ の要素からなる2次元方形配列である. 空テープを除いた,  $\Sigma$ 上の全ての2次元テープの集合を  $\Sigma^{2+}$ と表す.

2次元テープ  $x \in \Sigma^{2+}$  に対して,  $Q_1(x)$  を  $x$  の行数,  $Q_2(x)$  を  $x$  の列数とする. もし  $1 \leq i \leq Q_1(x)$  かつ  $1 \leq j \leq Q_2(x)$  ならば,  $x(i, j)$  は座標  $(i, j)$  に位置する記号を表す. 更に,  $1 \leq i \leq i' \leq Q_1(x)$  かつ  $1 \leq j \leq j' \leq Q_2(x)$  なる  $i, i', j, j'$  に対して,

$$x[(i, j), (i', j')]$$

を次の条件を満足する2次元テープ  $z$  として定義する:

(i)  $Q_1(z) = i' - i + 1$  かつ  $Q_2(z) = j' - j + 1$ ,

(ii) 各  $k, r$  ( $1 \leq k \leq Q_1(z), 1 \leq r \leq Q_2(z)$ ) に対して,  $z(k, r) = x(k+i-1, r+j-1)$ .

特に,  $x$  の第  $i$  行目  $x[(i, 1), (i, Q_2(x))]$  を  $x[i, *]$  と略記する.

まず, オルタネイティング機械に関する標準的な幾つかの定義を与える<sup>(6)</sup>.

【定義2.2】 2次元オルタネイティング・チューリング機械(AT)とは7個組  $M = (Q, q_0, U, F, \Sigma, \Gamma, \delta)$

である. ここに,

- (1)  $Q$  は状態の有限集合,
- (2)  $q_0 \in Q$  は初期状態,
- (3)  $U \subseteq Q$  は全称状態(universal state)の集合,

- (4)  $F \subseteq Q$  は受理状態の集合,  
 (5)  $\Sigma$  は入力アルファベット,  
 (6)  $\Gamma$  は記憶テープ・アルファベット ( $B \in \Gamma$  は空白記号),  
 (7)  $\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\#\}) \times \Gamma) \times (Q \times (\Gamma - \{B\})) \times \{\text{left, right, up, down, no\_move}\} \times \{\text{left, right, no\_move}\}$  は動作遷移関係 (next-move relation). ここに,  $\# \notin \Sigma$  は境界記号 (boundary symbol) である.

$Q - U$  に含まれる状態  $q$  は存在状態 (existential state) と呼ばれる, 機械  $M$  は境界記号  $\#$  で囲まれた読取専用方形入力テープと, 初期には空白の片側無限記憶テープを1つ持つ. もちろん  $M$  は, 有限制御部, 入力ヘッド, ならびに記憶テープヘッドを持つ. 図に示すように, 記憶テープの各マス目には各々一つの位置が割り当てられている.  $M$  の1ステップは, ① 各テープから記号を一つ読み取り, ② 記憶テープに記号を1つ書き, ③ 入力ヘッド及び記憶ヘッドを特定の方向に動かし, 更に ④ 動作遷移関係に従って新しい状態に入ること, の4つの動作から成る. この機械は空白記号を書くことができないことに注意されたい. もし入力ヘッドが入力テープからはみ出た場合, あるいは記憶ヘッドが記憶テープから (左に動いて) はみ出た場合には, それ以後機械  $M$  はいかなる動作も許されない.

【定義 2.3】  $A T M = (Q, q_0, U, F, \Sigma, \Gamma, \delta)$  に対し,

$$C_M(x) = \Sigma^{2 \times x} \times (N \cup \{0\})^2 \times (Q \times (\Gamma - \{B\}))^* \times N$$

の要素  $c = (x, (i, j), (q, \alpha, k))$  を  $M$  の  $x$  上の計算状況 (configuration) という. ここに,  $c$  の第1成分  $x$  は  $M$  への入力を表す.  $c$  の第2成分  $(i, j)$  は入力ヘッドの位置を表す.  $c$  の第3成分  $(q, \alpha, k)$  はそれぞれ有限制御部の状態, 記憶テープの内容の非空白部分, 及び記憶ヘッドの位置を表す<sup>1</sup>.  $q$  を計算状況  $c$  に関連する状態であるとき, もし  $q$  が全称 [存在, 受理] 状態ならば,  $c$  は全称 [存在, 受理] 計算状況であるという.  $M$  の  $x$  上の初期計算状況 (initial configuration) は

$$I_M(x) = (x, (1, 1), (q_0, \lambda, 1))$$

である. ここに  $\lambda$  は空列を表す.

【定義 2.4】  $A T M = (Q, q_0, U, F, \Sigma, \Gamma, \delta)$  に対し, もし計算状況  $c'$  が遷移規則  $\delta$  に従って,  $M$  の1ステップで計算状況  $c$  から導かれるならば,  $c'$  を  $c$  の後続者 (successor) という.  $c$  の後続者の集合を  $\text{Succ}_M(c)$  で表す.  $\text{Succ}_M(c) = \emptyset$  なる計算状況を停止計算状況 (halting configuration) と呼ぶ.

以後, 一般性を失うことなく, すべての受理計算状況は停止計算状況であるものと仮定する.

$A T M = (Q, q_0, U, F, \Sigma, \Gamma, \delta)$  において,  $U = \emptyset$  のとき,  $M$  を非決定性2次元チューリング機械 (NT) と呼ぶ. 双対的に  $Q = U$  のとき,  $M$  を全称状態のみの2次元オルタネイティング・チューリング機械 (UT) と呼ぶ.

【定義 2.5】  $M$  をある  $A T$  とし,  $x$  をある2次元テープとする. 更に,  $c$  を  $M$  の  $x$  上の計算状況とする. 各節点が計算状況でラベル付けられた, 次のような有限な木  $(V, E, \text{label})$  を  $M$  の  $x$  上の  $c$ -受理計算木 ( $c$ -accepting computation tree) という.

- (1) 根のラベルは計算状況  $c$  である.
- (2) 内部節点  $v$  のラベルが全称計算状況  $d$  であり, かつ

1. 従って,  $0 \leq i \leq \ell_1(x)+1$ ,  $0 \leq j \leq \ell_2(x)+1$ , かつ  $1 \leq k \leq |\alpha|+1$  である.

$$\text{Succ}_M(d) = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$$

ならば,  $v$  は  $d_i = \text{label}(v_i)$  なるちょうど  $k$  個の子供  $v_1, v_2, \dots, v_k$  を持つ.

(3) 内部節点  $v$  のラベルが存在計算状況  $d$  ならば,  $v$  は  $\text{label}(v') \in \text{Succ}_M(d)$  なるちょうど一つの子供  $v'$  を持つ.

(4) 各葉のラベルは受理計算状況である.

特に,  $I_M(x)$ -受理計算木を  $M$  の  $x$  上の受理計算木と呼ぶ. もし  $M$  の  $x$  上の受理計算木が存在するならば,  $M$  は  $x$  を受理する (accept) という. さらに,  $M$  が受理する 2 次元テープ集合  $T(M)$  を,

$$T(M) = \{x \in \Sigma^{2+} \mid M \text{ は } x \text{ を受理する}\}$$

と定義する.

【定義 2.6】 任意の  $A T$   $M$  の任意の計算状況  $c = (x, (i, j), (q, \alpha, k))$  に対して,  $\text{SPACE}(c) = |\alpha|$  と定義する. 与えられた自然数  $Q$  に対して,  $\text{SPACE}(c) > Q$  が成り立つならば,  $c$  を  $Q$  超過な計算状況と呼ぶ.  $c$ -受理計算木  $T$  のすべての節点  $v$  のラベルが  $Q$  超過でないならば,  $T$  を  $Q$  領域限定受理計算木と呼ぶ.  $L: N \times N \rightarrow N$  を 2 つの変数  $m$  と  $n$  の関数とする. 各  $m, n$  に対して, もし,  $Q_1(x) = m$  &  $Q_2(x) = n$  なる入力テープ  $x$  が  $M$  により受理されるとき,  $M$  の  $x$  上の  $L(m, n)$  領域限定受理計算木が存在するならば,  $M$  は  $L(m, n)$  領域限定 ( $L(m, n)$  space-bounded) であるという.

$L(m, n)$  領域限定  $A T$  を  $AT(L(m, n))$  と表わす.  $NT(L(m, n)), UT(L(m, n))$  も同様に定義される. 特に,  $AT(0), NT(0), UT(0)$  をそれぞれ  $AF, NF, UF$  と記す.

$L(m, n)$  領域限定  $A T$  で受理される 2 次元テープ集合の族を

$$\mathcal{L}[AT(L(m, n))] = \{T \mid T = T(M) \text{ なる } AT(L(m, n)) \text{ } M \text{ が存在する}\}$$

と定義する.  $\mathcal{L}[NT(L(m, n))], \mathcal{L}[UT(L(m, n))], \mathcal{L}[AF], \mathcal{L}[NF], \mathcal{L}[UF]$  も同様に定義される.

$L(m, n)$  領域限定  $A T$  で受理される正方形テープ集合の族を  $\mathcal{L}[AT^s(L(m))]$  と記す.  $\mathcal{L}[NT^s(L(m))], \mathcal{L}[UT^s(L(m))], \mathcal{L}[AF^s], \mathcal{L}[NF^s], \mathcal{L}[UF^s]$  も同様である.

任意の 2 次元テープ集合  $T$  に対して,  $T$  の補集合を  $T^{\wedge}$  と記す. 更に, 2 次元テープ集合の任意の族  $\mathcal{L}$  に対して,  $\text{co-}\mathcal{L} = \{T^{\wedge} \mid T \in \mathcal{L}\}$  と定義する.

### 3. 結果

#### 【補題 3.1】

$$T_1 = \{x \in \{0, 1\}^{2+} \mid \exists m \geq 1 [Q_1(x) = Q_2(x) = 2m \text{ \& } \forall (1 \leq i \leq m) [x[i, *] = x[i+m, *]] \text{ \& } x \text{ の各行は記号 1 をちょうど一つ含む } ]\},$$

とおく. このとき,  $T_1 \in \mathcal{L}[UF^s]$ .

(証明)

$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^+ \mid w \text{ は記号 1 をちょうど 1 つ含む}\}$$

と定義する. また, 各  $w \in L_1$  に対して,  $w$  に含まれる記号 1 の (左端から数えた) 位置を  $\text{pos}(w)$  と記す. 更に,

$$T_2 = \{x \in \{0, 1\}^{2+} \mid \exists m \geq 1 [Q_1(x) = Q_2(x) = 2m \text{ \& } \forall i (1 \leq i \leq 2m) [x[i, *] \in L_1] \text{ \& } \forall (1 \leq i \leq m) [ \text{pos}(x[i, *]) \geq \text{pos}(x[i+m, *]) ] ]\},$$

$$T_3 = \{x \in \{0, 1\}^{2+} \mid \exists m \geq 1 [Q_1(x) = Q_2(x) = 2m \text{ \& } \forall i (1 \leq i \leq 2m) [x[i, *] \in L_1] \text{ \& } \forall (1 \leq i \leq m) [ \text{pos}(x[i, *]) \leq \text{pos}(x[i+m, *]) ] ]\},$$

とおくと,  $T_1 = T_2 \cap T_3$  である.  $\mathcal{L}[UF]$  が共通集合に関して閉じていることは明らかなので,  $T_2, T_3 \in \mathcal{L}[UF^s]$  が言えれば本補題は成り立つ. ここでは,  $T_2 \in \mathcal{L}[UF^s]$  のみ示す (図 1 参照).  $T_3 \in \mathcal{L}[UF^s]$  も同様にして示される.  $\square$

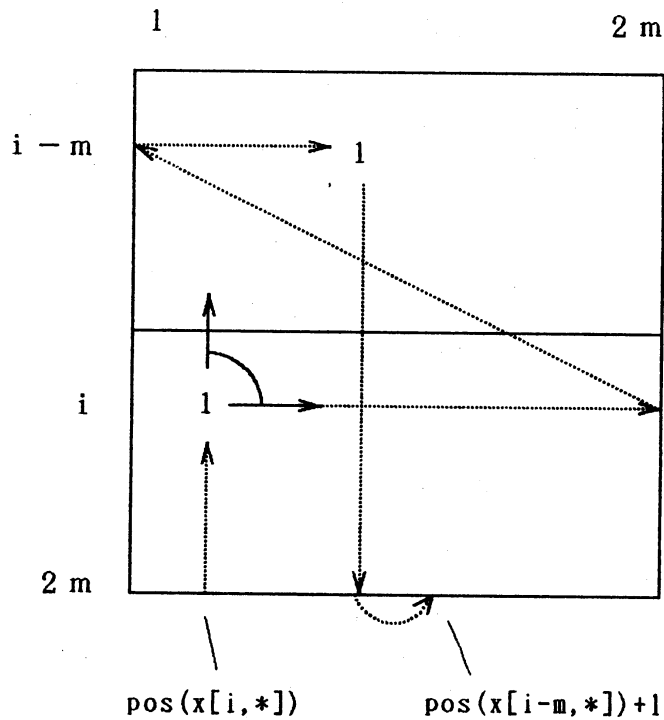


図1 補題3.1の証明のための図.

【命題3.1】  $L(m) = o(\log \log m)$  のとき,  $e[m] \cong s(2m+2)L(2m)t^{L(2m)}$  とおけば,  $e[m] = o(m \log m)$ .

ここに  $s, t$  はある正の定数である.

(証明略)

【補題3.2】  $L(m) = o(\log \log m)$  ならば,  $T_1 \notin \mathcal{L}[NT^s(L(m))]$ . ここに,  $T_1$  は補題3.1で定義された2次元テープ集合である.

(証明) 逆に, ある  $NT^s(L(m))$   $M = (Q, q_0, \phi, F, \{0, 1\}, \Gamma, \delta)$  が  $T_1$  を受理するものとする. 各  $m \geq 1$  に対して,

$$V(m) = \{x \in T_1 \mid \Omega_1(x) = \Omega_2(x) = 2m\}$$

とおく. すると, 任意の  $x \in V(m)$  に対し,  $M$  の  $x$  上のある  $L(m)$  領域限定受理計算経路

$$P_M(x) = v_0, v_1, \dots, v_K \quad (K > 0)$$

が存在するはずである. ここに,  $v_0, v_K$  はそれぞれ初期計算状況  $I_M(x)$ , ならびにある受理計算状況をラベルに持つ節点である.

ここで, 一般性を失うことなく次のように仮定できる.

仮定: 各  $i, j (i \neq j, 0 \leq i, j \leq K)$  に対して,  $\text{label}(v_i) \neq \text{label}(v_j)$

すなわち,  $P_M(x) = (V, E, \text{label})$  におけるラベル付け関数  $\text{label}$  は単射である. なぜなら, もし  $P_M(x)$  中に  $\text{label}(v_i) = \text{label}(v_j)$  なる節点  $v_i, v_j (i < j)$  が存在するならば,

$$\text{label}(v_{i+k-1}) = \text{label}(v_{j+k-1}) \text{ かつ } \text{label}(v_{i+k}) \neq \text{label}(v_{j+k})$$

なる最小の  $k \geq 1$  に対して,  $\text{Succ}_M(\text{label}(v_{i+k-1})) \ni \text{label}(v_{j+k})$  であり, 従って,

$$P'_M(x) = v_0, \dots, v_{i+k-1}, v_{j+k}, \dots, v_K$$

もまた  $M$  の  $x$  上の  $L(m)$  領域限定受理計算経路となるからである.

次に, 経路  $P_M(x)$  に含まれる節点を,  $M$  の入力ヘッドが  $x$  の上半分に在る計算状況をラベルに持つ場合と下半分に在る計算状況をラベルに持つ場合に分割する. すなわち,

$$V_{top}(P_M(x)) = \{v \in V(P_M(x)) \mid \text{label}(v) = (x, (i, j), (q, \alpha, k)), 0 \leq i < m\}$$

$$V_{bot}(P_M(x)) = \{v \in V(P_M(x)) \mid \text{label}(v) = (x, (i, j), (q, \alpha, k)), m+1 \leq i \leq 2m\}$$

ここに,  $0 \leq j \leq 2m+1$ ,  $q \in Q$ ,  $\alpha \in \Gamma^*$ , 及び  $1 \leq k \leq |\alpha| \leq L(m)$  である.

更に,  $V_{top}(P_M(x))$ に含まれる節点の中から,  $M$ が  $x$ の下半分から上半分へ横切った直後の計算状況をラベルに持つ節点, ならびに  $V_{bot}(P_M(x))$ に含まれる節点の中から,  $M$ が  $x$ の上半分から下半分へ横切った直後の計算状況をラベルに持つ節点を取り出す. すなわち,

$$V_{top\uparrow}(P_M(x)) = \{v \in V_{top}(P_M(x)) \mid (v', v) \in E(P_M(x)) \ \& \ v' \in V_{bot}(P_M(x))\}$$

$$V_{bot\downarrow}(P_M(x)) = \{v \in V_{bot}(P_M(x)) \mid (v', v) \in E(P_M(x)) \ \& \ v' \in V_{top}(P_M(x))\}$$

従って,  $P_M(x)$ 上において  $M$ が  $x$ の上半分と下半分の境界線を横切る回数を  $2L$  ( $L \geq 0$ ) 回とすれば,  $P_M(x)$ は次のように  $2L+1$ 個の部分経路に分割される.

$$P_M(x) = v_0, \dots, v_1, \ u_1, \dots, u_2, \ v_2, \dots, v_3, \ \dots, \ u_{2L-1}, \dots, u_{2L}, \ v_{2L}, \dots, v_K$$

ここに,

$$\text{各 } v \in \cup_{1 \leq i \leq 2L-1} \{v_{i-1}, \dots, v_i\} \cup \{v_{2L}, \dots, v_K\} \text{ について, } v \in V_{top}(P_M(x)),$$

$$\text{各 } u \in \cup_{1 \leq i \leq 2L-1} \{u_i, \dots, u_{i+1}\} \text{ について, } u \in V_{bot}(P_M(x)),$$

$$\text{各 } j (1 \leq j \leq L) \text{ について, } v_{2j} \in V_{top\uparrow}(P_M(x)) \ \& \ u_{2j-1} \in V_{bot\downarrow}(P_M(x))$$

である. また,

$$E_{top}(P_M(x)) = \{(v, v') \in E(P_M(x)) \mid v \in V_{top}(P_M(x)) \ \& \ v' \in V_{top}(P_M(x))\}$$

$$E_{bot}(P_M(x)) = \{(v, v') \in E(P_M(x)) \mid v \in V_{bot}(P_M(x)) \ \& \ v' \in V_{bot}(P_M(x))\}$$

$$E\uparrow(P_M(x)) = \{(v, v') \in E(P_M(x)) \mid v \in V_{bot}(P_M(x)) \ \& \ v' \in V_{top\uparrow}(P_M(x))\}$$

$$E\downarrow(P_M(x)) = \{(v, v') \in E(P_M(x)) \mid v \in V_{top}(P_M(x)) \ \& \ v' \in V_{bot\downarrow}(P_M(x))\}$$

とおけば,  $V(P_M(x))$ ならびに  $E(P_M(x))$ は次のように直和分割される.

$$V(P_M(x)) = V_{top}(P_M(x)) + V_{bot}(P_M(x))$$

$$E(P_M(x)) = E_{top}(P_M(x)) + E_{bot}(P_M(x)) + E\uparrow(P_M(x)) + E\downarrow(P_M(x))$$

さて,

$$\text{Cross\_Pair}(P_M(x)) = \langle \text{label}(V_{top\uparrow}(P_M(x))), \text{label}(V_{bot\downarrow}(P_M(x))) \rangle$$

とおけば, 次の命題が成り立つ.

【命題 3.2】 2つの異なるテープ  $x, y \in V(m)$  上での  $M$ の任意の  $L(m)$ 領域限定受理計算経路  $P_M(x)$ ,  $P_M(y)$  に対して,  $\text{Cross\_Pair}(P_M(x)) \neq \text{Cross\_Pair}(P_M(y))$ .

(証明) 逆に,  $x \neq y$  であるにもかかわらず,

$$\text{Cross\_Pair}(P_M(x)) = \text{Cross\_Pair}(P_M(y))$$

なる  $M$ の  $x$ 上の  $L(m)$ 領域限定受理計算経路

$$P_M(x) = v_0, v_1, \dots, v_K \quad (K > 0)$$

ならびに  $y$ 上の  $L(m)$ 領域限定受理計算経路

$$P_M(y) = u_0, u_1, \dots, u_J \quad (J > 0)$$

が存在するものと仮定する. ここに,  $v_0, u_0$ はそれぞれ  $M$ の  $x$ 上の初期計算状況  $I_M(x)$ ,  $y$ 上の初期計算状況  $I_M(y)$ をラベルに持つ節点であり,  $v_K, u_J$ はある受理計算状況をラベルに持つ節点である.

このような  $P_M(x)$ と  $P_M(y)$ から新たな経路  $P_M(x) \oplus P_M(y)$ を次のように定義する.

$$V(P_M(x) \oplus P_M(y)) = V_{top}(P_M(x)) + V_{bot}(P_M(y))$$

$$E(P_M(x) \oplus P_M(y)) = E_{top}(P_M(x)) + E_{bot}(P_M(y)) + E\uparrow + E\downarrow$$

ここに,

$$E\uparrow = \{(u, v') \in V_{bot}(P_M(y)) \times V_{top\uparrow}(P_M(x)) \mid (u, u') \in E\uparrow(P_M(y)) \ \& \ (v, v') \in E\uparrow(P_M(x)) \ \& \ \text{label}(u') = \text{label}(v')\}$$

$$E\downarrow = \{(v, u') \in V_{top}(P_M(x)) \times V_{bot\downarrow}(P_M(y)) \mid (v, v') \in E\downarrow(P_M(x)) \ \& \ (u, u') \in E\downarrow(P_M(y)) \ \& \ \text{label}(u') = \text{label}(v')\}.$$

言い替えれば,  $P_M(x) \oplus P_M(y)$ は入力  $x$ の上半分に相当する  $P_M(x)$ の部分と入力  $y$ の下の

半分に相当する  $P_M(y)$  の部分を接続した経路である。

【事実 3.1】<sup>2</sup>

(1)  $v \in V_{top}(P_M(x))$  ならば,  $label(\delta^+_{P_M(x) \oplus P_M(y)}(v)) = label(\delta^+_{P_M(x)}(v))$ .

(2)  $v \in V_{bot}(P_M(y))$  ならば,  $label(\delta^+_{P_M(x) \oplus P_M(y)}(v)) = label(\delta^+_{P_M(y)}(v))$ .

(証明略)

【命題 3.2 の証明の続き】  $z$  を  $x$  の上半分と  $y$  の下半分を接続した 2 次元テープ, すなわち,

i)  $Q_1(z) = Q_2(z) = 2m$ ,

ii)  $z[(1,1), (m,2m)] = x[(1,1), (m,2m)]$ ,

iii)  $z[(m+1,1), (2m,2m)] = y[(m+1,1), (2m,2m)]$

とする。ここで、初期計算状況の節点  $v_0$  を始点とする  $P_M(x) \oplus P_M(y)$  上の経路巡回を考える：

①  $v := v_0$  とおく。

② もし、 $\delta^+(v) = \{v'\}$  なる節点  $v' \in V(P_M(x) \oplus P_M(y))$  が存在するならば、 $v := v'$  とおいて②を繰り返す。そうでなければ、停止する。

事実 3.1 より、変数  $v$  の値の系列が (受理計算状況の節点  $v_k$  もしくは  $u_j$  の何れかを終点とする)  $M$  の  $z$  上のある  $L(m)$  領域限定受理計算経路  $P_M(z)$  を構成することは明らか。以上により、 $z \in T(M)$  が導かれたが、これは  $T(M) = T_1$  なる最初の仮定に反する ( $z \notin T_1$  に注意)。□

【例 3.1】 繁雑さを避けるため、ここでは節点  $v$  とそのラベル  $label(v)$  を区別しないことにする。2 次元テープ  $x$  と  $y$  に対する受理計算経路  $P_M(x), P_M(y)$  がそれぞれ、

$\dots, v_1, u_1, \dots, u_2, v_2, \dots, v_3, u_3, \dots, u_4, v_4,$

$\dots, v_5, u_5, \dots, u_6, v_6, \dots, v_7, u_7, \dots, u_8, v_8 \dots$

ならびに、

$\dots, v'_1, u_3, \dots, u'_2, v_8, \dots, v'_3, u_5, \dots, u'_4, v_2,$

$\dots, v'_5, u_1, \dots, u'_6, v_6, \dots, v'_7, u_7, \dots, u'_8, v_6 \dots$

と表されるものとする (図 2 (a) ならびに (b) 参照)。このとき、 $x$  の上半分と  $y$  の下半分を接続した 2 次元テープ  $z$  に対して、次のような受理計算経路  $P_M(z)$  が構成される。

$\dots, v_1, u_1, \dots, u'_6, v_4, \dots, v_5, u_5, \dots, u'_4, v_2, \dots, v_3, u_3, \dots, u'_2, v_8 \dots$

(図 2 (c) 参照) □

【補題 3.2 の証明の続き】 明らかに、 $|V(m)| = (2m)^m$  である。一方、各  $m \geq 1$  に対して、

$$C(m) = \{ \text{Cross\_Pair}(P_M(x)) \mid \exists x \in V(m) [P_M(x) \text{ は } M \text{ の } x \text{ 上の } L(m) \text{ 領域限定受理計算経路}] \}$$

とおけば、

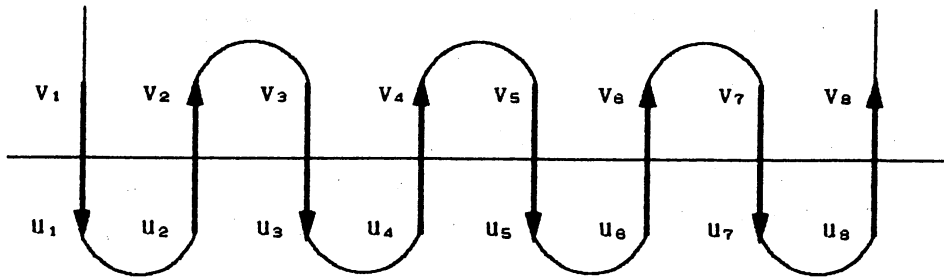
$$|C(m)| \leq \sum_{L=0}^{\lfloor e[m]/2 \rfloor} \binom{e[m]}{L} \cdot \binom{e[m]}{L} \leq \left\{ \sum_{L=0}^{e[m]} \binom{e[m]}{L} \right\}^2 \leq 2^{2 \cdot e[m]}$$

が成り立つ。ここに、 $e[m] = s(2m+2)L(2m)t^{L(2m)}$ ,  $s$  は  $M$  の有限制御部の状態数、 $t$

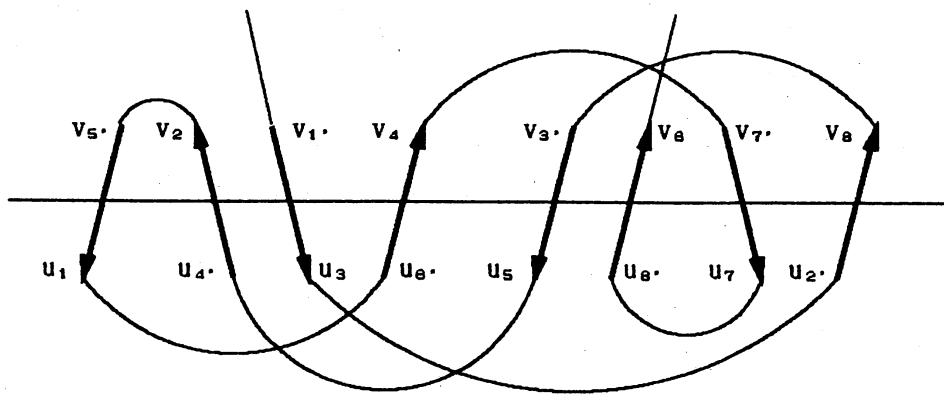
2. グラフ  $G$  の節点集合、枝集合が、それぞれ  $V(G), E(G)$  のとき、各  $v \in V(G)$  に対して、 $\delta^+_G(v) = \{v' \in V(G) \mid (v, v') \in E(G)\}$  と定義する。

はMの記憶テープの記号数である ( $2L \leq e[m]$ のとき,  $L \leq \lfloor e[m]/2 \rfloor$ に注意)。

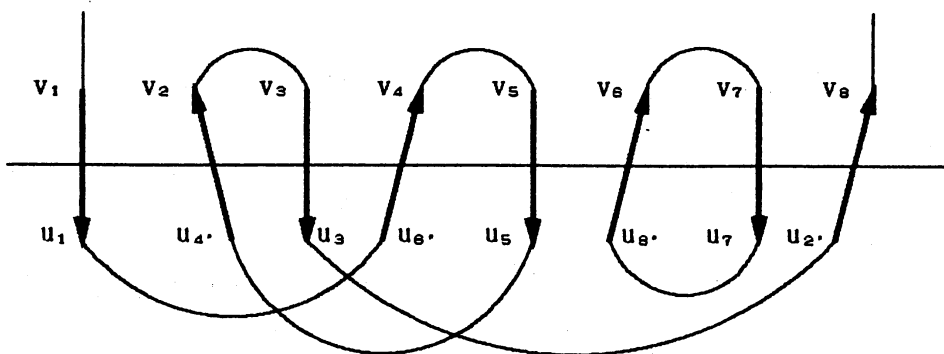
$L(m) = o(\log \log m)$ であるから, 命題3.1より,  $e[m] = o(m \log m)$ である。従って, 十分大きなmに対して,  $|C(m)| < |V(m)|$ となる。このようなmに対しては,  $x \neq y$ であるにもかかわらず,  $\text{Cross\_Pair}(P_M(x)) = \text{Cross\_Pair}(P_M(y))$ なるMの $L(m)$ 領域限定受理計算経路 $P_M(x), P_M(y)$ が存在することになり, 命題3.2に矛盾する。□



(a)  $P_M(x)$



(b)  $P_M(y)$



(c)  $P_M(x) \oplus P_M(y)$

図2 例3.1の説明図.



【補題 3.3】  $L(m) = o(\log \log m)$  ならば,  $T_1 \notin \mathcal{L}[AT^s(L(m))]$ . ここに,  $T_1$  は補題 3.1 で定義された 2 次元テープ集合である.

(証明略)

補題 3.1 ならびに補題 3.2 より, 次の定理を得る.

【定理 3.1】  $L(m) = o(\log \log m)$  ならば,  $\mathcal{L}[UT^s(L(m))] \neq \mathcal{L}[NT^s(L(m))]$ .

【系 3.1】<sup>(4)</sup>  $\mathcal{L}[UF^s] \neq \mathcal{L}[NF^s]$ .

補題 3.1 ならびに補題 3.3 より, 次の定理を得る.

【定理 3.2】  $L(m) = o(\log \log m)$  ならば,

(1)  $\mathcal{L}[AT^s(L(m))] \neq \text{co-}\mathcal{L}[AT^s(L(m))]$ ,

(2)  $\mathcal{L}[UT^s(L(m))] \neq \text{co-}\mathcal{L}[UT^s(L(m))]$ ,

(3)  $\mathcal{L}[NT^s(L(m))] \neq \text{co-}\mathcal{L}[UT^s(L(m))]$ .

(証明)  $T_3 \in \mathcal{L}[UF^s]$  より,  $T_3 \notin \text{co-}\mathcal{L}[UF^s]$  である. 一方,  $T_3 \notin \mathcal{L}[AT^s(L(m))]$ . □

【系 3.2】<sup>(4)</sup> (1)  $\mathcal{L}[AF^s] \neq \text{co-}\mathcal{L}[AF^s]$ ,

(2)  $\mathcal{L}[UF^s] \neq \text{co-}\mathcal{L}[UF^s]$ ,

(3)  $\mathcal{L}[NF^s] \neq \text{co-}\mathcal{L}[UF^s]$ .

領域関数  $L(m)$  が  $\Omega(\log \log m)$  かつ  $o(\log m)$  の場合については未解決である. なお 1 次元チューリング機械の場合にも, 同種の問題は未解決である<sup>(7)</sup>.

【注意】  $T_1, T_1 \in \mathcal{L}[DT^s(\log \log m)]$  (従って,  $T_1 \in \mathcal{L}[AT^s(\log \log m)]$ ) は次の事実を用いれば言える:

事実 I<sup>(8,9)</sup>:  $\exists c_0 > 0 \forall j_1, j_2 \in \mathbb{N} [j_1 \neq j_2 \Rightarrow \exists r < c_0 \cdot \log(j_1 + j_2) [j_1 \neq j_2 \pmod{r}]]$   
ここに,  $\mathbb{N}$  は自然数の全集合である.

事実 II<sup>(10)</sup>: 関数  $\log \log m$  は 2 次元的に全領域構成可能な関数である.

## 文 献

- [1] M. Blum and C. Hewitt, *Proc. IEEE Symp. of Switching and Automata Theory* (1967) pp.155-160.
- [2] K. Inoue, I. Takanami, and H. Taniguchi, *TCS* 27, pp.61-83 (1983).
- [3] A. Ito, K. Inoue and Y. Wang, Optimal simulation of two-dimensional alternating finite automata by three-way nondeterministic Turing machines, *TCS* to appear.
- [4] T. Jiang, O. H. Ibarra and H. Wang, *TCS* 125 (1994) pp.243-257.
- [5] K. Iwama, *SIAM J. Comput.* 22 (1993) pp.207-221.
- [6] J. L. Balcázar, et al, *Structural Complexity II*, Springer (1990).
- [7] M. Liškiewicz and Reishuk, *Tech. Rep. of Inter. Comp. Sci. Center*, California, TR-93-048 (1993).
- [8] R. Freivalds, *Lat. Mat. Eshegodnik* 23, pp.158-165 (1979).
- [9] A. R. Freedman and R. E. Radner, *JCSS* 11, pp.118-128 (1975).
- [10] 森田, 梅尾, 衣斐, 菅田: 信学論(D) J61-D, No.6, pp.381-386 (昭和53-6).