Title	ファジィ関係代数とその表現定理について(アルゴリズムと計算量理論)
Author(s)	古澤, 仁; 河原, 康雄
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 906: 39-46
Issue Date	1995-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/59463
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
906巻 1995年 39-46

ファジィ関係代数とその表現定理について

古澤 仁 *　　河原 康雄 ‡
Hitoshi FURUSAWA †　　Yasuo KAWAHARA §

要旨

Fuzzy 関係の計算を一般の関係計算と同じような形で展開できるように，関係代数として定式化し，その表現定理を証明することにより，定式化が自然であることを示す.

1 序

「x と y は等しい」というような明確な関係に対して，「x と y はよく似ている」というような曖昧な関係を，我々は日常生活においてよく用いる．このような曖昧な関係は通常の関係では表現し難く，これを表現可能にするために考えられたものがファジィ関係である．つまりファジィ関係は通常の関係の拡張として論じることができる [11,12]．

一方，通常の関係において，個々の変数間の関係の振舞いを用いることなく関係を代数的に取り扱う関係計算なるものがある．関係計算の抽象的な枠組が関係代数である [1,2,13]．関係代数は現在グラフ理論 [2] やプログラムの理論 [14] などに応用されており，計算機科学，離散数学における基礎理論として提案されている．

本稿ではファジィ関係代数を構築し，その表現定理を示す．ファジィ関係代数とは，ファジィ関係を関係代数として定式化したものである．定式化の目的は，ファジィ関係を関係代数の側から議論，応用していくことである．また，表現定理を証明することにより，この枠組はファジィ関係の関係代数としての自然な定式化であるということを示す．

*九州大学総合理工学研究科情報システム学専攻
†Department of Information Systems, Interdisciplinary Graduate school of Engineering Science, Kyushu University
‡九州大学理学部附属基礎情報学研究施設
§Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University

2 準備 (ファジィ関係)

ここでは本論に入る前に，準備としてファジィ関係の定義を与えた後，ファジィ関係の部分集合，和集合，積集合，合成について述べる．

定義 1 X を集合とするとき，直積 $X \times X$ から閉区間 $[0,1]$ への関数をファジィ関係と呼ぶ．

このとき，$R(x,y)$ の値は x と y の関係の度合を示す．また，X 上の通常の関係は直積 $X \times X$ から $\{0,1\}$ への関数と考えられる．このような意味で，ファジィ関係は通常の関係の拡張概念ということができる．

自明なファジィ関係についてであるが，最大関係 L は任意の (x,y) に対して，$L(x,y) = 1$ であるようなもので，最小関係 O は任意の (x,y) に対して，$O(x,y) = 0$ であるようなものである．さらに，恒等関係 I は $I(x,y)$ の値が $x = y$ であれば 1 であり，そうでなければ 0 であるようなものである．

次に，ファジィ関係の部分集合，和集合，積集合，合成，逆関係を順に定義する．ここで，合成はマックス - ミニ合成を採用する．

定義 2 ファジィ関係 R, S に対して，演算を次のように定義する．ここで，記号 $\bigvee, \bigwedge, \vee, \wedge$ は，それぞれ sup , inf , max , min を表す．

[部分集合] $R \subseteq S$ は任意の $(x,y) \in X \times X$ に対して，$R(x,y) \leq S(x,y)$ で定義される．

[和集合] $R \cup S$ は $[R \cup S](x,y) = R(x,y) \vee S(x,y)$ で定義される．

[積集合] $R \cap S$ は $[R \cap S](x,y) = R(x,y) \wedge S(x,y)$ で定義される．

[合成] RS は $RS(x,y) = \bigvee_{z \in X}\{R(x,z) \wedge S(z,y)\}$ で定義される．

[逆関係] $R^\sharp$ は $R^\sharp(x,y) = R(y,x)$ で定義される．

準備の最後として，関係計算において良く知られているデデキント則がファジィ関係においても成立することを示す．

定理 3 (デデキント則) ファジィ関係 P, Q, R に対して，次の関係式が成立する．

$$PQ \sqcap R \sqsubseteq (P \sqcap RQ^\sharp)Q$$

証明 $(PQ \sqcap R)(x,y) = (PQ)(x,y) \wedge R(x,y) = \bigvee_{z \in X}\{P(x,z) \wedge Q(z,y)\} \wedge R(x,y)$ である．
一方，

$$\begin{aligned}
(P \sqcap RQ^\sharp)Q(x,y) &= \bigvee_{z \in X}[(P \sqcap RQ^\sharp)(x,z) \wedge Q(z,y)] \\
&= \bigvee_{z \in X}[P(x,z) \wedge \bigvee_{w \in X}\{R(x,w) \wedge Q^\sharp(w,z)\} \wedge Q(z,y)] \\
&\sqsupseteq \bigvee_{z \in X}[P(x,z) \wedge R(x,y) \wedge Q^\sharp(y,z) \wedge Q(z,y)] \\
&= \bigvee_{z \in X}[P(x,z) \wedge Q(z,y)] \wedge R(x,y)
\end{aligned}$$

なので，上の関係式は成り立つ．□

この公式はマックス - ミニ合成については成立するが，一般に成り立つとは限らない．

3 ファジィ関係代数の公理系

ここでは，はじめにファジィ関係代数の定義を与える．ここで用いるファジィ関係の合成 ; は，ファジィ理論の中で用いられているマックス - ミニ合成なるものとする．また，$0 \leq \delta \leq 1$ なる実数 δ をスカラーと呼び，ギリシャ文字 $\delta, \gamma, \epsilon, \cdots$ であらわすことにする．

定義 4 ファジィ関係代数は空でない集合 $\mathcal{F}$ 上の構造 $(\mathcal{F}, \Delta, \sqcap, \sqcup, ;, {}^\sharp, \cdot)$ で次の条件をみたすものである．ここで，Δ はスカラーの集合とする．また，$R;S = RS$, $\delta \cdot R = \delta R$ と略記することにする．

[分配束] $(\mathcal{F}, \sqcap, \sqcup)$ は最大元 L と最小元 O を持つ完備な分配束である．記号 $\sqsubseteq$ は，束構造の順序関係である．

[半群] $(\mathcal{F}, ;)$ は単位元 I を持つ半群である．つまり，任意の $P, Q, R \in \mathcal{F}$ に対して，$(PQ)R = P(QR)$, $RI = IR = R$ が成り立つ．

[零元] 最小元 O は半群 $(\mathcal{F}, \cdot)$ における零元である．つまり，任意の $R \in \mathcal{F}$ に対して，$RO = OR = O$ が成り立つ．

[逆関係] 任意の $R, S \in \mathcal{F}$ に対して，

$$(R^\sharp)^\sharp = R \ , \ R \sqsubseteq S \iff R^\sharp \sqsubseteq S^\sharp \ , \ (RS)^\sharp = S^\sharp R^\sharp$$

が成り立つ．

[分配法則] 任意の $P, Q, R \in \mathcal{F}$ に対して，$P(Q \sqcup R) = PQ \sqcup PR$ が成り立つ．

[デデキント則] 任意の $P, Q, R \in \mathcal{F}$ に対して，$PQ \sqcap R \sqsubseteq (P \sqcap RQ^\sharp)Q$ が成り立つ．

[スカラー] 任意の δ , $\epsilon \in \Delta$ と $Q, R \in \mathcal{F}$ に対して，$\delta R \sqsubseteq R$(ただし，$\delta = 1$のとき等号成立)，$\delta(Q \sqcap R) = \delta Q \sqcap \delta R$, $\delta(Q \sqcup R) = \delta Q \sqcup \delta R$, $\delta(R^\sharp) = (\delta R)^\sharp$, $\delta(RS) = (\delta R)(\delta S)$, $\epsilon(\delta R) = (\epsilon\delta)R$, $0R = O$, $(\delta R)(S \sqcap \delta L) = (\delta R)S$ が成り立つ．さらに，$\delta \neq 0$ に対して $\delta S \sqsubseteq \delta R$ であれば，$S \sqsubseteq R$ が成り立つ．

[半ブール代数] 任意のスカラー δ に対して，$\delta S \sqcap R = \delta R$ である時，$S = R \sqcup Q$ かつ $R \sqcap Q = O$ を満たす Q が存在する．

この，関係代数における簡単な計算例として次の定理を紹介する．

定理 5 任意のファジィ関係代数 $\mathcal{F}$ において次が成り立つ．

1. 二項演算子 ; については，単調性が成り立つ．つまり，$Q \sqsubseteq R$ ならば $PQ \sqsubseteq PR$ かつ $QP \sqsubseteq RP$ である．

2. 二項演算子 $\sqcap$ は部分分配律 $Q(R \sqcap S) \sqsubseteq QR \sqcap QS$, $(R \sqcap S)Q \sqsubseteq RQ \sqcap SQ$ を満たす．

3. 単項演算子 $^\sharp$ については次の規則が成り立つ．

(a) $I = I^\sharp$.

(b) $L = L^\sharp$.

(c) $O = O^\sharp$.

(d) $(R \sqcup S)^\sharp = R^\sharp \sqcup S^\sharp$, $(R \sqcap S)^\sharp = R^\sharp \sqcap S^\sharp$.

4. 任意の $\epsilon, \delta \in \Delta$ に対して次の規則が成り立つ．

(a) $\delta O = O$.

(b) $R \sqsubseteq Q \Longrightarrow \delta R \sqsubseteq \delta Q$.

(c) $\delta \leq \epsilon \Longrightarrow \delta R \sqsubseteq \epsilon R$.

(d) $\delta(RS) \sqsubseteq (\delta R)S$, $\delta(RS) \sqsubseteq R(\delta S)$.

4 ファジィ関係代数における原子と点関係

関係代数における点の概念は，関係代数の計算機科学への応用のために G. Schmidt と T. Ströhlein[1] によって導入されたものである．ここでは，これを点関係と呼び，それにに関するいくつかの性質を紹介する．また，原子の定義も与え, これと点関係とのかかわりについて述べる．

点関係は正規性と呼ばれる性質を満たす関係である．正規な関係とは，関係の度合を示す値が，0 もしくは，1 だけの関係である．そこで，まず関係正規性を定義し，正規な関係の満たすいくつかの性質を紹介する．

定義 6 (正規性) 関係 R が正規であるとは，任意のスカラー δ に対して，$\delta L \sqcap R = \delta R$ である時にいう．

定理 7 正規な関係について次のことが成り立つ．

1. 関係 P, Q を正規であるとすると，$P \sqcup Q$, $P \sqcap Q$, PQ , $P^\sharp$ はそれぞれ正規である．

2. 関係 R を正規であるとすると，$\delta(RS) = R(\delta S)$，$\delta(SR) = (\delta S)R$ が成立する．

3. $L = R \sqcup S$，$R \sqcap S = O$ならばR, S は正規である．

ここで，点関係の定義をあたえる．これ以後点関係は，関係代数の他の元と区別するためにアルファベットの小文字 $x, y, z, \cdots$ であらわすことにする．

定義 8 (点関係) 関係 x が正規であり，かつ以下の式を満たすとき点関係であるいう．

$$x \neq O \;,\; x = Lx \;,\; x^{\sharp}x \sqsubseteq I.$$

点関係は直観的にいうと，次の図に示す通り域全体から 1 点への関係でその値がすべて 1 であるものである．

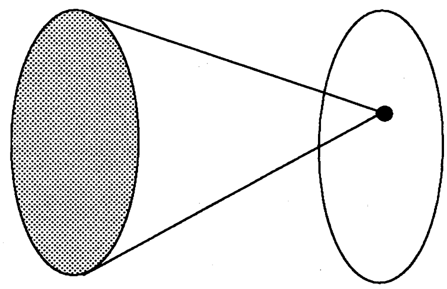

図 1. 点関係

原子とは 1 点と 1 点の対応である．これを次のように定義する．

定義 9 (原子) 関係 R が原子であるとは $S \sqsubseteq R$ であるような O でない任意の S に対して 0 でないスカラー δ が存在して，$S = \delta R$ であるときにいう．

原子は 1 点と 1 点の対応であるが，その値は 1 である必要はない．直観的にいうと下の図のようになる．図中の k は関係の度合を示す．

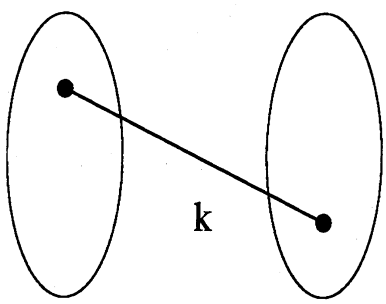

図 2. 原子

タルスキー公理は一般にファジィ関係では成立しない．このことを次の例で見てみることにする．

例 1 O でない関係 R を隣接行列で表したものを $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき，LRL は $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ である．これは L とは等しくない．

このようにタルスキー公理は一般にファジィ関係では成立しないので，拡張したものを F-タルスキー公理としてここで導入する．

定義 10 (F- タルスキー公理) ファジィ関係代数 $\mathcal{F}$ において，

$$R \neq O \text{ならば} 0 \text{でないスカラー} \delta \text{が存在して} \ LRL = \delta L$$

を F- タルスキー公理という．ただし，R が正規であるときは $\delta = 1$ である．

以下では，ファジィ関係代数の表現定理のための準備としていくつかの命題を証明する．これらの証明には F- タルスキー公理を仮定しなければならない．

ここで，原子と点関係のがどのようにかかわっているかを考えてみる．次の定理がその関係を示している．

定理 11 x , y を F- タルスキー公理を満たすファジィ関係代数 $\mathcal{F}$ の点関係とする．このとき，$x^{\sharp}y$ は $\mathcal{F}$ における原子である．

つまり，$x^{\sharp}y$ は，1 点と 1 点の関係で，値が 1 のものである．直観的に考えると，次の図のようになり，明らかである．

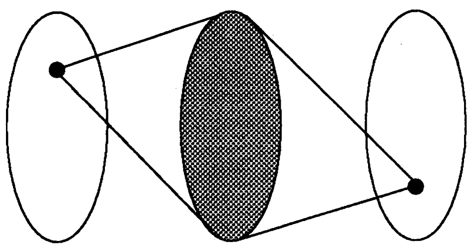

図 3．点関係と原子

点公理についてもタルスキー公理同様に，ファジィ関係では一般には成り立たない．このことを次の例で示す．

例 2 Oでない関係Rを隣接行列で表したものを $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．これに対し，$x^\sharp y$を表す隣接行列が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるような点関係x,yが存在する．しかし，$x^\sharp y$は正規であるので$w^\sharp v \sqsubseteq x^\sharp y$となるような点関係$w,v$は存在しない．つまり，$x^\sharp y \sqsubseteq R$は成り立たない．

次に点関係に関する公理を追加する．この公理についてもタルスキー公理と同様に，ファジィ性を満たすように考慮した．

定義 12 (点公理) ファジィ関係代数$\mathcal{F}$において，

1. $R \neq O \Longrightarrow \delta(x^\sharp y) \sqsubseteq R$であるような点関係 x, y と，0でないスカラーδが存在する．

2. $\delta(x^\sharp y) \sqsubseteq \epsilon R \Longrightarrow \delta \leq \epsilon$.

の*2*つをもって点公理という．

5 表現定理

今までの議論をふまえて，F-タルスキー公理と点公理をみたすファジィ関係代数と，通常のファジィ関係とが同じものであるという表現定理を示す．ここで，記号$F-Rel(\mathcal{P})$は，$F-Rel(\mathcal{P}) = \{f \mid f \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \Delta\}$である．つまり$F-Rel(\mathcal{P})$は$\mathcal{P}$上のファジィ関係全体である．

定理 13 (表現定理) $\mathcal{F}$を *F*-タルスキー公理と点公理をみたすファジィ関係代数とする．$\mathcal{P}$を$\mathcal{F}$のすべての点関係の集合とするとき，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{P}$上のすべてのファジィ関係$F-Rel(\mathcal{P})$と同型である．

証明 $\chi : \mathcal{F} \to F-Rel(\mathcal{P})$を任意の$R \in \mathcal{F}$に対して，$\chi(R)(x,y) = \bigvee\{\delta \in \Delta \mid \delta(x^\sharp y) \sqsubseteq R\}$で定義すると，$\chi$は同型写像である．□

参考文献

[1] G. Schmidt and T. Ströhlein, "Relation Algebras: Concept of Points and Representability", Discrete Mathematics, **54** (1985), 83 - 92.

[2] G. Schmidt and T. Ströhlein, *Relations and Graphs.* Springer-Verlag,1991.

[3] S. Mac Lane, *An algebra of additive relations.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **47**(1961), 1043 - 1051.

[4] D. Puppe, *Korrespondenzen in Abelschen Kategorien*, Math. Ann., **148** (1962), 1 - 30.

[5] Y. Kawahara, "Relational set theory", RIFIS Technical Report, **RIFIS-TR-CS-97** , Research Institute of Fundamental Information Science (1995)..

[6] Y. Kawahara, "Pushout-complements and the basic concepts of graph grammars in toposes", Theoretical Computer Science, **77**(3) (1990), 267 - 289.

[7] Y. Kawahara and Y. Mizoguchi, "Relational structures and their partial morphisms in the view of single pushout rewriting", Lecture Notes in Computer Science, **776** (1994) 218 - 233.

[8] A. Tarski,"On the Calculus of Relations", J. Symbolic Logic, **6** (1941) 73 - 89.

[9] W. Pedrycz,"Processing in relational structures: Fuzzy relational equations", Fuzzy Sets and Systems, **40** (1991) 77 - 108.

[10] Y. Kawahara and M. Mori,"A small final coalgebra theorem", RIFIS Technical Report, **RIFIS-TR-CS-90** , Research Institute of Fundamental Information Science (1994).

[11] 坂和 正敏,"ファジィ理論の基礎と応用", 森北出版,(1989).

[12] 寺野 寿郎 , 浅井 喜代郎 , 菅野 道夫, "ファジィシステム入門", オーム社,(1987).

[13] 古澤 仁 , 河原 康雄, "関係代数とその表現定理について", 応用数学合同研究集会報告集, (1994) 16. 1 - 16. 6.

[14] G. Schmidt, "Programs as Partial Graphs II: Recursion", Theoretical Computer Science, **15** (1981) 159 - 179.