Title	平行な平面場を持つリーマン多様体のベッチ数について (部分多様体論とその周辺)
Author(s)	大町, 英理子
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 907: 123-130
Issue Date	1995-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/59471
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
907巻 1995年 123-130

平行な平面場を持つリーマン多様体のベッチ数について

大町英理子 (Eriko Omachi)

§1. 序. M^n を向き付け可能な連結コンパクト n 次元 Riemann 多様体とし，Riemann 計量を $g=(g_{ji})$で表す. また M^n の p次 Betti 数を b_p で表す. M^n が1個または2個の平行ベクトル場を持つとき，その Betti 数に関して L. Karp や A. Lichnerowicz 等が研究しているが（[1][2]），より一般に，M^nが r 個の平行ベクトル場を持つ場合，Betti 数に関して次の不等式が知られている（[3]）:

定理（Ogawa - Tachibana） M^nが r（$1\leqq r\leqq n$）個の平行ベクトル場を持つとき，不等式

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{s+i-1}{i}b_{p-i}\geqq 0,\qquad (1\leqq s\leqq r,\ 1\leqq p\leqq n)$$

が成り立つ.

ここでは，M^nが向き付け可能な平行2次元 distribution を持つ場合に，Betti 数に関してどのような不等式が成り立つかを調べる. 扱う関数やテンソルはすべてC^∞とする.

H_p を M^n上の調和 p-形式全体のなすベクトル空間とすれば，$\dim H_p=b_p$ である. 便宜上，$p>n$ または $p<0$ の時には $H_p=\{0\}$ とし，その上では各作用素は自明に作用するものとする.

ベクトル場 $u^j(\partial/\partial x^j)$ は 1-形式 $u_i dx^i$（$u_i=g_{ij}u^j$）と必要に応じて同一視し，ともに u で表す. u による外積および内積作用素を $e(u)$，$i(u)$ で表す. すなわち，p-形式 w に対しては，X_1，$\cdots$，X_{p-1} を接ベクトルとするとき

$$e(u)w = u \wedge w$$

$$(i(u)w)(X_1, \cdots, X_{p-1}) = W(u, X_1, \cdots, X_{p-1})$$

であり,

$$e(u)^2 = i(u)^2 = 0$$

をみたす. また, 単位ベクトル u に対しては

$$i(u)e(u) + e(u)i(u) = I$$

が成り立つ. ここに I は恒等作用素である. 上の定理はこれらの性質を使って証明される.

§2. 平行な平面場に関連する作用素.　以下, M^n は向き付け可能な平行2次元 distribution Dを持つと仮定する. Dの正規直交基底 $u = (u^i)$, $v = (v^i)$ をとる. これらは局所的な C^∞ ベクトル場である

このとき

$$\pi_{ji} = u_j v_i - u_i v_j$$

とおくと $\nabla_k \pi_{ji} = 0$, すなわち $\pi = (\pi_{ji})$ が平行であることが示される. また, π は同じ向きを持つDの正規直交基底のとり方によらず, 大域的に定まることも分かる. すなわち $\pi = \frac{1}{2}\pi_{ji}dx^j \wedge dx^i$ は, u, v を 1-形式と見なせば, $\pi = u \wedge v$ で定義される大域的な 2-形式である. π に関する外積および内積作用素を定義する. p-形式 $w = (1/p!)w_{i_1 i_2 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ に対して

$$e(\pi)w = \pi \wedge w$$

$$i(\pi)w = (1/(p-2)!)(\tfrac{1}{2}\pi^{kj} w_{kj i_3 \cdots i_p})dx^{i_3} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \quad (p \geqq 2)$$

$$i(\pi)w = 0 \quad (p = 0,\ 1)$$

によって作用素 $e(\pi)$ および $i(\pi)$ を定める. また

$$\phi(\pi) = e(u)i(u) + e(v)i(v)$$

により作用素 $\phi(\pi)$ を定義する. u, v は局所的であるが, $\phi(\pi)$ は大域的な作用素であることが確かめられる.

§3. 結果. π に関する内積と外積の定義より

$$i(\pi)=i(v)i(u),\quad e(\pi)=e(u)e(v) \tag{1}$$

であり，これらを使って

$$i(\pi)^2 = e(\pi)^2 = 0$$

が示される．さらに，$i(\pi)e(\pi)$ を p-形式 w に作用させ(1)を使うことによって，次の定理が証明される．

定理1 $$I = i(\pi)e(\pi) + \phi(\pi) - e(\pi)i(\pi) \tag{2}$$

が成り立つ．

$e(\pi)$，$i(\pi)$，$\phi(\pi)$を p-形式に対して作用させる時，それぞれ $e(\pi)_p$，$i(\pi)_p$，$\phi(\pi)_p$ と書くことにする．もし w が調和であれば，$i(\pi)w$ および $e(\pi)w$ もまた調和であることが，直接，計算によって示される．ここで

$$K_p = i(\pi)_p{}^{-1}(0) \cap H_p$$

とおくと，(1)から

$$i(\pi)_p(H_p) \subset K_{p-2}$$

が得られる．

さてここで，前節で定義した作用素ϕに関する条件

$$\phi(\pi) = 2\, e(\pi)i(\pi) \tag{A}$$

を考える．p-形式に対する条件(A)，すなわち

$$\phi(\pi)_p = 2\, e(\pi)_{p-2}i(\pi)_p \tag{A$_p$}$$

を$(A)_p$で表す．

いま，条件$(A)_{p-2}$を仮定しておく．すなわち

$$\phi(\pi)_{p-2} = 2\, e(\pi)_{p-4}i(\pi)_{p-2} \tag{A$_{p-2}$}$$

が成り立つものとする．このとき(2)によって

$$I = i(\pi)_p e(\pi)_{p-2} + e(\pi)_{p-4}i(\pi)_{p-2}$$

が得られる．これを使うと，$w \in K_{p-2}$ に対して

$$w = Iw = i(\pi)_p e(\pi)_{p-2} w$$

となり，w が$i(\pi)_p(H_p)$に含まれることが分かる．従って $K_{p-2} \subset i(\pi)_p(H_p)$ である．このことから，条件 $(A)_{p-2}$ のもとで，H_p は K_p と K_{p-2} の直和にベクトル空間として同型であることが分かる．従って K_p の次元を k_p とし，$p<0$，$p>n$ の時には $k_p = 0$ とすれば，次の定理が成り立つ．

定理2　　条件$(A)_{p-2}$を仮定すれば，関係

$$b_p = k_p + k_{p-2}$$

が成り立つ．

この定理から次の定理が得られる．

定理3　　n を越えない偶数（または奇数）p と任意の自然数 r に対して，条件 $(A)_q$ が $p-4r-2 \leqq q \leqq p-2$ をみたすすべての偶数（または奇数）q に対して成り立つならば，

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} = k_p + k_{p-4r-2} \geqq 0$$

が成り立つ．

§4．条件(A)の局所表現.　　前節において仮定した条件(A)について考えよう．まず，今までに導入した作用素間に，次の関係が成り立つことに注意する．

$$i(u)e(\pi)i(\pi) = e(v)i(\pi)$$

$$i(v)e(\pi)i(\pi) = -e(u)i(\pi)$$

$$i(u)\phi(\pi) = i(u) + e(v)i(\pi)$$

$$i(v)\phi(\pi) = i(v) - e(u)i(\pi)$$

これらの関係を使って次の定理が証明される．

定理4　　条件(A)は，

$$i(u) = e(v)i(\pi) \tag{3}$$

と

$$i(v) = -e(u)i(\pi) \tag{4}$$

が同時に成立することと同値である.

定理4を使って，条件$(A)_p$ の局所表現を与えよう. (3)と(4)を p-形式 $w = (w_{i_1 \cdots i_p})$に作用させると

$$u^r w_{ri_2 \cdots i_p} = \sum_{\ell=2}^{p} (-1)^{\ell} v_{i_\ell} u^r v^s w_{rs i_2 \cdots \hat{i}_\ell \cdots i_p} \tag{5}$$

$$v^r w_{ri_2 \cdots i_p} = \sum_{\ell=2}^{p} (-1)^{\ell} u_{i_\ell} v^r u^s w_{rs i_2 \cdots \hat{i}_\ell \cdots i_p} \tag{6}$$

が得られる. ^ は，その部分の添字が除かれていることを表す.

ここで，Dに直交する distribution を$D^{\perp}$ で表せば，Dが平行であることから，Dと$D^{\perp}$ は共に積分可能である．従って M^n は局所的には Riemann 積 $M'^2 \times M''^{n-2}$ に等長である. M'^2 の局所座標 $\{x^a ; a=1,2\}$ と M''^{n-2} の局所座標 $\{x^\lambda ; \lambda=3, \cdots, n\}$ から構成される M^n の座標 $\{x^I ; I=1,2,3, \cdots, n\}$ をとり，これを adapted coordinate と呼ぼう．この座標に関して，p-形式 w は

$$\begin{aligned} w &= \sum_{I_1<\cdots<I_p} w_{I_1 \cdots I_p} dx^{I_1} \wedge \cdots \wedge dx^{I_p} \\ &= \sum_{\lambda_1<\cdots<\lambda_p} w_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_p} \\ &\quad + \sum_{\lambda_2<\cdots<\lambda_p} w_{a\lambda_2 \cdots \lambda_p} dx^a \wedge dx^{\lambda_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_p} \qquad (7) \\ &\quad + \sum_{\substack{a<b \\ \lambda_3<\cdots<\lambda_p}} w_{ab\lambda_3 \cdots \lambda_p} dx^a \wedge dx^b \wedge dx^{\lambda_3} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_p} \end{aligned}$$

と表せる．添字の範囲は，a, b = 1, 2, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p = 3, \cdots, n$ である. (7)の右辺の第1，第2，第3各項をそれぞれ $w^{(I)}$, $w^{(II)}$, $w^{(III)}$ で表せば p-形式 w は $w = w^{(I)} + w^{(II)} + w^{(III)}$ と分解される. $w = w^{(I)}$ のときI型, $w = w^{(II)}$ のとき

II型，$w = w^{(III)}$ のときIII型であるとよぶことにする． w が調和であれば， $w^{(I)}$，$w^{(II)}$，$w^{(III)}$ も 調和であることが 直接計算することによって示せる． adapted coordinate に関して $u = \Sigma\ u_a dx^a$，$v = \Sigma\ v_a dx^a$ とすれば，(5)と(6)は

$$u^a w_{a I_2 \cdots I_p} = \sum_{\ell=2}^{p} (-1)^\ell v_{I_\ell} u^a v^b w_{ab I_2 \cdots \hat{I}_\ell \cdots I_p} \tag{8}$$

$$v^a w_{a I_2 \cdots I_p} = \sum_{\ell=2}^{p} (-1)^\ell u_{I_\ell} v^a u^b w_{ab I_2 \cdots \hat{I}_\ell \cdots I_p} \tag{9}$$

となる．

w がI型の場合には(8)と(9)は常に成り立つ．w がII型の場合には(8)および(9)の右辺は0であるから

$$u^1 w_{1\lambda_2 \cdots \lambda_p} + u^2 w_{2\lambda_2 \cdots \lambda_p} = 0$$

$$v^1 w_{1\lambda_2 \cdots \lambda_p} + v^2 w_{2\lambda_2 \cdots \lambda_p} = 0$$

となり，これと u，v が正規直交であることから

$$w_{a\lambda_2 \cdots \lambda_p} = 0$$

が得られる．wがIII型である場合には，(8)と(9)は

$$u^a w_{ac\lambda_3 \cdots \lambda_p} = v_c u^a v^b w_{ab\lambda_3 \cdots \lambda_p}$$

$$v^a w_{ac\lambda_3 \cdots \lambda_p} = u_c v^a u^b w_{ab\lambda_3 \cdots \lambda_p}$$

である．従って，次の定理が成り立つ．

定理5　　adapted coordinate に関して，条件$(A)_p$ は，p-形式 w に対して次の(i)(ii)が共に成り立つことと同値である：

(i)　$w^{(II)} = 0$

(ii) $w^{(III)}$ に対して

$$u^a w_{ac\lambda_3 \cdots \lambda_p} = v_c\, \alpha_{\lambda_3 \cdots \lambda_p}$$

$$v^a w_{ac\lambda_3 \cdots \lambda_p} = -\,u_c\, \alpha_{\lambda_3 \cdots \lambda_p}$$

を満たす (P-2)-形式 $\alpha_{\lambda_3 \cdots \lambda_p}$ が存在する．

$w^{(I)}$ に対しては$(A)_p$は何の条件も課さない．

§5. Riemann 積の場合.　　この節では, M^n が Riemann 積 $M'^2 \times M''^{n-2}$ であるとする. M'^2 および M''^{n-2} は連結, コンパクト, 向き付け可能であると仮定しておく. M^n, M'^2, M''^{n-2} の p次 Betti 数をそれぞれ b_p, b'_p, b''_p で表せば, これらの間に関係

$$b_p = \sum_{i=0}^{p} b'_i b''_{p-i}$$

が知られている. これを使って, $b'_0 = b'_2 = 1$, $b'_q = 0$ $(q \geqq 3)$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} &= b''_p + b''_{p-4r-2} \\ &\quad + b'_1 (b''_{p-1} - b''_{p-3} + b''_{p-5} - \cdots + b''_{p-4r-1})\end{aligned}$$

が得られる. この式から次の定理が導かれる.

定理6　　Riemann 積多様体 $M^n = M'^2 \times M''^{n-2}$ において,

$$b'_1 = 0$$

または

$$b''_{p-3} = b''_{p-7} = \cdots = b''_{p-4r+1} = 0$$

の何れかが成り立つならば, 不等式

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} \geqq 0$$

が任意の自然数 r に対して成り立つ.

定理6で得た不等式は, 定理3で得たものと同じ不等式である.

ところで$H_p(M^n)$の基底は次の3つのタイプから構成される:

Ⅰ型　　w_1 $(w_1 \in H_p(M''^{n-2}))$,

Ⅱ型　　$\theta \wedge w_2$ $(\theta \in H_1(M'^2),\ w_2 \in H_{p-1}(M''^{n-2}))$,

Ⅲ型　　$\pi \wedge w_3$ $(w_3 \in H_{p-2}(M''^{n-2}))$

Ⅱ型に対して, 条件$(A)_p$は, b'_1 または b''_{p-1} の何れかが0になることと同値である. Ⅲ型に対しては, 定理5におけるαとして w_3 をとることができ, $(A)_p$が常に

みたされていることが分かる．以上より次の定理が得られる．

定理7　Riemann 積多様体 $M^n = M'^2 \times M''^{n-2}$ において，条件$(A)_{p-2}$，$(A)_{p-6}$，…，$(A)_{p-4r+2}$が成り立つならば，不等式

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} \geqq 0$$

が任意の自然数 p，r に対して成り立つ．

参考文献

[1] L. Karp, Parallel vector fields and the topology of manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 83(1976), 1051-1053.

[2] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Ed. Cremonese, Roma, 1955.

[3] Y. Ogawa and S. Tachibana, Parallel vector fields and the Betti number, Proc. Japan Acad. 54(1978), 292-294.