

不均一磁場における磁性流体界面波動の解析

北大工学部 水 田 洋 (Yo Mizuta)

1 はじめに

磁性流体の界面は，磁場の加え方次第で状態が多様に変化し，通常流体に較べ特異な現象が見られることもある．磁性流体の界面に影響を与える物理的因子は，界面張力，重力や加振による外力，磁場である．界面波動の解析を行う場合，界面張力は，小さくても界面の安定性に本質的に影響するので無視できないが，通常流体と同様さほど困難なく考慮できる．外力は大抵，空間的には一様であるが，時間的には加振のように周期変化する場合がある．この場合は通常の強制振動ではなく，パラメトリック共振となる．

磁場は普通，空間的に非一様，時間的に非定常であるが，一様定常であっても界面波動の固有周波数と安定性を変化させる．鉛直磁場は向きの如何にかかわらず固有周波数を下げ，水平磁場は固有周波数を上げる．また鉛直磁場が臨界値以上になると，固有周波数が虚数となる波数領域が現れ，界面は不安定になる（静的不安定）[1]．次に磁場が交流的に時間変化して交流周波数の整数倍が固有周波数に一致するとき，やはりパラメトリック共振による不安定（動的不安定）が起こるが，これは Mathieu 方程式を用いて議論できる [2, 3]．磁場が空間的に変化する場合を一般的に扱う方法は知られていないが，定常磁場が界面と直交する方向にのみ変化する場合については，Zelazo-Melcher による議論がある [4]．

前報 [2, 3] までに，二層磁性流体の表面と界面に生じる波動を記述する normal mode 方程式を導き，表面波動と界面波動いずれか一方と交流磁場との共振が，相互作用を通じて他を励起したり，相互作用が安定性ダイヤグ

ラムを変化させる様子などを見た。以上の解析では、表面や界面の変動による磁場の乱れは摂動として考慮したが、無摂動磁場（表面や界面が変動する前の磁場）は一様としていた。本稿では、非一様な無摂動磁場への拡張について考察する。

2 無摂動磁場が一様な場合の Normal Mode 方程式

この節では後の議論のため、無摂動磁場が一様な場合の normal mode 方程式の誘導についてまとめる。流体はこれまで通り表面と界面のある二層流体とするが、非一様磁場への拡張を考える際は上層の密度を0とし、透磁率を真空透磁率に一致させて、界面の位置を自由表面とする。

以下では y, z を水平座標、鉛直上方座標とし、各層の流体の鉛直方向の厚み、密度、流速、速度ポテンシャルを h, ρ, v, ϕ で表す。また下層、上層の流体に関する量には添え字 1, 2 を、下層より下、上層より上の真空領域に関する量には 3, 4 を、表面、界面、底面に関する量には s, i, b をつける。各層の非圧縮性、渦なしを仮定すると、連続式より速度ポテンシャルに対する Laplace 方程式

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

が導かれ、その解より流速が $v = \nabla \phi$ のように求められる。更に非粘性を仮定し、圧力、単位質量あたりの外力、その外力ポテンシャル、磁気応力テンソル、Bernoulli 関数を $p, g, \Omega = g \cdot r, T_{ij}, \Phi \equiv \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - \Omega \right)$ と表して、磁気力も含めた流体粒子の力の釣合を考えれば

$$\frac{\partial(\Phi + p)}{\partial x_i} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

が導かれるが、磁場の性質により $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0$ となるため [5, 6], 各層内で $\Phi + p = \text{const.}$ が成り立つ。すなわち、均質な領域内では見かけ上磁場の効果はなく、

また初期状態が渦なしであれば、磁場が新たに渦を発生させるようなこともない。磁場の効果は、透磁率 μ が不連続的に変化する界面で表に現れる。物理量の界面を横切る値の跳びを $[\dots]$ で、磁気応力差の法線法線成分を $[T_{nn}]$ で、界面張力を p_t で表せば、界面を含む厚さ無限小の領域に式(2)を適用することにより、界面における力学的条件

$$0 = [p - T_{nn}] + p_t = [-T_{nn} - \Phi + \text{const.}] + p_t \quad (3)$$

が導かれる。

表面および界面の変位を η, ζ で表すと、表面($z = \eta + h_2$)・界面($z = \zeta$)・底面($z = -h_1$)における運動学的条件と力学的条件は

$$\begin{aligned} z = \eta + h_2: \quad \eta_t &= (\phi_2)_z + (\nabla \phi_2) \cdot (\nabla \eta), \quad (p_t)_s = [T_{nn}]_s + [\Phi]_s - \text{const.}, \\ z = \zeta \quad : \quad \zeta_t &= (\phi_2)_z + (\nabla \phi_2) \cdot (\nabla \zeta), \quad (p_t)_i = [T_{nn}]_i + [\Phi]_i - \text{const.}, \\ &\quad \zeta_t = (\phi_1)_z + (\nabla \phi_1) \cdot (\nabla \zeta), \\ z = -h_1 \quad : \quad 0 &= (\phi_1)_z \end{aligned} \quad (4)$$

となる。これらを $\eta, \zeta, \phi_{1,2}$ について線形化後、次のように、 y に関する波数 k の成分に分解する。

$$\begin{aligned} \eta(y, t) &= \sum_k e^{iky} \eta_k(t), \\ \zeta(y, t) &= \sum_k e^{iky} \zeta_k(t), \\ \phi_{1,2}(y, z, t) &= \sum_k e^{iky} [A_{1k,2k}(t) \cosh kz + B_{1k,2k}(t) \sinh kz], \\ [T_{nn}]_{s,i}(y, t) &= \sum_k e^{iky} T_{sk,ik}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $\phi_{1,2}$ は Laplace 方程式(1)を満たし、波動の分散性は近似なく考慮される。またこの $[T_{nn}]_{s,i}$ は、 η, ζ について線形な部分を表す。

$\eta_k, \zeta_k, A_{1k,2k}, B_{1k,2k}$ に関する各波数成分の関係式を連立し、これらから

$A_{1k,2k}$, $B_{1k,2k}$ を消去すれば, η_k , ζ_k に関する連立常微分方程式

$$\begin{pmatrix} t_2 & -\Delta \\ -\Delta & t_1 + t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_k \\ \ddot{\zeta}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_s & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k \\ \zeta_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{sk} \\ T_{ik} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6)$$

を得る. ただし $t_{1,2} \equiv \rho_{1,2}/(k \tanh kh_{1,2})$, $\Delta \equiv \rho_2/(k \sinh kh_2)$ である. また外力ポテンシャルは $\Omega_s = -g(t)(\eta + h_2)$, $\Omega_i = -g(t)\zeta$, 表面張力・界面張力は $(p_t)_s = -\gamma_s(\partial^2 \eta / \partial y^2)$, $(p_t)_i = -\gamma_i(\partial^2 \zeta / \partial y^2)$ なので, これらの波数成分同士をあわせて $g_s \equiv \rho_2 g(t) + k^2 \gamma_s$, $g_i \equiv (\rho_1 - \rho_2)g(t) + k^2 \gamma_i$ を定義した.

磁気応力差の前に, 磁場を求めておく必要がある. 以下では, \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{M} を磁束密度, 磁場, 磁化とする. 磁場は, 無電流領域で Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, 磁束の保存 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, および界面で磁束密度の法線成分と磁場の接線成分の連続条件 $[B_n] = 0$, $[H_t] = 0$ を満たすように決める. 磁束密度と磁場を $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ のように無摂動量と η , ζ による摂動量に分ける場合, このことは, 摂動磁場を $\mathbf{h} = -\nabla \psi$ のように与える磁気ポテンシャル ψ を, Laplace 方程式と界面条件

$$0 = \nabla^2 \psi \quad (7)$$

$$\begin{cases} \eta' [B]_s = \left[\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_s, & \zeta' [B]_i = \left[\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_i, & 0 = \left[\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_b, \\ \eta' [H]_s = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_s, & \zeta' [H]_i = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_i, & 0 = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_b \end{cases} \quad (8)$$

を満たすように決めることに相当する ($\eta' \equiv \partial \eta / \partial y$, $\zeta' \equiv \partial \zeta / \partial y$). B_n , H_t と対照的に, 磁束密度の接線成分 B_t と磁場の法線成分 H_n は界面で不連続であるが, $[B] \equiv [B_{0y}] = [\mu] H_{0y}$, $[H] \equiv \mu_0 [H_{0z}] = [\mu_0 / \mu] B_{0z}$ はそれらの跳びを表している ($\mathbf{B}_0 = (B_{0y}, B_{0z})$, $\mathbf{H}_0 = (H_{0y}, H_{0z})$, μ_0 は真空透磁率).

Laplace 方程式 (7) を満たす各領域の磁気ポテンシャルは

$$\psi_{4,2,1,3}(y, z, t) = \sum_k e^{iky} \psi_{4k,2k,1k,3k}(z, t), \quad (9)$$

$$\psi_{4k,2k,1k,3k}(z, t) = a_{4,2,1,3}^*(t) e^{kz} + b_{4,2,1,3}^*(t) e^{-kz}$$

と表される. $a_{4,2,1,3}^*$, $b_{4,2,1,3}^*$ は界面条件 (8) および $a_4^* = b_3^* = 0$ を満たすように決める. これらは η_k , ζ_k について線形である.

線形化前の磁気応力差には, B , H , M による表現が幾通りかあるが, ここでは, 磁束密度と磁場の法線成分 B_n , H_n および接線成分 B_t , H_t による $[T_{nn}] = \frac{1}{2}[B_n H_n - B_t H_t]$ を用いる. ただしこれは, 透磁率 μ を定数とする磁束密度と磁場の間の比例関係 $B = \mu H$ を前提としている. 磁気応力差を摂動量 b , h について線形化すれば

$$\begin{cases} [T_{nn}]_s(y, t) = [H]_s \mu_0 \left(\frac{\partial \psi_4}{\partial z} \right)_s - [B]_s \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)_s, \\ [T_{nn}]_i(y, t) = [H]_i \mu_2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)_i - [B]_i \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)_i \end{cases} \quad (10)$$

となる. これらの波数成分 (式 (5)) に式 (9) を代入すると,

$$\begin{cases} T_{sk} = G_1 \eta_k + (G_3 \pm iG_4) \zeta_k, \\ T_{ik} = (G_3 \mp iG_4) \eta_k + G_2 \zeta_k \end{cases} \quad (11)$$

のように $T_{sk, ik}$ は η_k , ζ_k について線形に表されるので [2, 3], 式 (6) は結局

$$\begin{pmatrix} t_2 & -\Delta \\ -\Delta & t_1 + t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_k \\ \ddot{\zeta}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_s - G_1 & -(G_3 \pm iG_4) \\ -(G_3 \mp iG_4) & g_i - G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k \\ \zeta_k \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (12)$$

となる. これが一様磁場の場合の normal mode 方程式である. 磁場作用係数 $G_{1,2,3,4}$ (添え字は領域番号と無関係) は, k に依存するが 0.1 のオーダーの正の無次元量によって $[H]_s^2$ と $-[B]_s^2$, $[H]_i^2$ と $-[B]_i^2$, $[H]_i[H]_s$ と $-[B]_i[B]_s$, $[H]_i[H]_s$ と $[B]_i[B]_s$ の線形結合を取り, k/μ_0 をかけた構造をしている. 例えば,

$$G_2 \equiv \frac{k}{\mu_0} (\alpha(k)[H]_i^2 - \beta(k)[B]_i^2), \quad \alpha(k), \beta(k) \sim O(0.1). \quad (13)$$

$\rho_2 \rightarrow 0$, $\mu_2 \rightarrow \mu_0$, あるいは $h_2 \rightarrow \infty$ の場合は, 式 (12) の第 2 行で Δ , $G_{3,4} \rightarrow 0$ となって, 界面変動は表面変動から独立になる. 磁場が定常な時, $\zeta_k = e^{i\omega t}$ において界面波モードの分散関係を求めると,

$$\omega^2 = (g_i - G_2)/(t_1 + t_2) \quad (14)$$

を得る.

3 無摂動磁場が z 方向にだけ非一様な場合

この節からは、前節までの解析を無摂動磁場が非一様な場合へ拡張する。鉛直磁場あるいは水平磁場のいずれかだけがあって、界面に平行な方向には一様であるが、直交する方向に勾配がある場合は、Zelazo-Melcher によって考察された [4]。これらは、半径の大きな同心円状の磁極間あるいは current sheet 間で実現できる。この場合、磁気応力差は界面位置によっても変化するるので、

$$\begin{cases} [T_{nn}]_s(y, t) = [H]_s \mu_0 \left(\frac{\partial \psi_4}{\partial z} \right)_s - [B]_s \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)_s + \frac{\partial [T_{nn}]_s}{\partial z} \eta, \\ [T_{nn}]_i(y, t) = [H]_i \mu_2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)_i - [B]_i \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)_i + \frac{\partial [T_{nn}]_i}{\partial z} \zeta \end{cases} \quad (15)$$

のように、磁気応力差の鉛直勾配を含む項が新たに加わる。磁気応力差の定義 $[T_{nn}] = \frac{1}{2}[B_n H_n - B_t H_t]$ より、これは磁気圧勾配

$$\frac{\partial [T_{nn}]}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{\mu} \right] \frac{\partial B_n^2}{\partial z} - [\mu] \frac{\partial H_t^2}{\partial z} \right) \quad (16)$$

となる。以上により、前節の式 (11), (12) において $G_1 + \frac{\partial [T_{nn}]_s}{\partial z}$, $G_2 + \frac{\partial [T_{nn}]_i}{\partial z}$ を改めて G_1 , G_2 と置けば、鉛直方向にのみ変化する無摂動磁場の効果は考慮できる。

表 1 は、定常的な鉛直磁場、水平磁場、およびそれらの鉛直勾配の変化に応じて、界面波モードの周波数が増減いずれの方向に向かうか、式 (14) に基づいてまとめたものである。鉛直磁場が増えると周波数が下がり、 $\omega^2 < 0$ で

表 1. 定常的な磁束密度の鉛直成分 B_n 、磁場の水平成分 H_t 、およびそれらの鉛直勾配と界面波モードの周波数 ω の関係

ω^2	g_i	G_2	B_n^2	H_t^2	$\left[\frac{1}{\mu} \right] \frac{\partial B_n^2}{\partial z}$	$[\mu] \frac{\partial H_t^2}{\partial z}$
$\uparrow \downarrow$	$\uparrow \downarrow$	$\downarrow \uparrow$	$\downarrow \uparrow$	$\uparrow \downarrow$	$\downarrow \uparrow$	$\uparrow \downarrow$

界面は不安定になるが、逆に水平磁場が増えると周波数は上がる。 B_n , H_t の寄与は定符号であるが、これらの鉛直勾配は正にも負にもなる。容器内に磁性流体を入れ、容器の下から磁場を加えるような場合は、 $[1/\mu]\partial B_n^2/\partial z < 0$, $[\mu]\partial H_t^2/\partial z > 0$ となり、 ω^2 が増加して界面は安定化する。

4 無摂動磁場が y 方向にも非一様な場合

—交流磁場による界面波動の数値実験の解析への適用—

次に、容器内の磁性流体の下方より交流磁場を加え、自由表面に波動を生じさせる実験を想定し、これまでの解析から更に発展させるべき点について考察する。このときの無摂動磁場は、 z 方向と共に y 方向にも変化すること、定常・交流（周波数を Ω とする）いずれかであることを考慮して、 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(y, z) + \mathbf{H}_1(y, z) \cos \Omega t$ とおく。

normal mode 方程式 (12) を $A\ddot{\mathbf{u}} + B\mathbf{u} = \mathbf{0}$ と表せば、外力項は $B = B_{00} + (B_{10} + B_{01}) \cos \Omega t + B_{11} \cos^2 \Omega t$ のように周波数成分へ分離される。ただし、定常磁場と交流磁場は共存しないとして、 $B_{10} = B_{01} = 0$ とする。ここで Ωt を t と置き直し、 $C \equiv A^{-1} \left(B_{00} + \frac{1}{2} B_{11} \right)$ を対角化する直交変換行列 X を求めれば、normal mode 方程式は coupled Mathieu 方程式となる [3].

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{v}} + (\mathbf{p} - 2\mathbf{q} \cos 2t)\mathbf{v} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{p} &\equiv \frac{1}{\Omega^2} X C X^{-1} = \frac{1}{\Omega^2} \begin{pmatrix} \omega_s^2 & 0 \\ 0 & \omega_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{q} &\equiv -\frac{1}{4\Omega^2} X A^{-1} B_{11} X^{-1}, \quad \mathbf{v} \equiv X \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (17)$$

この方程式の安定性解析からは、 \mathbf{q} の非対角成分が小さく、固有周波数を ω_s , ω_i とする表面波モード、界面波モードをほぼ独立に扱えるとき、 \mathbf{q} の対角成分の増加と共に、 $p_{1,2} = n^2$ (n :整数) すなわち $\omega_{s,i} = n\Omega$ 付近から不安定領域が広がることがわかる [3].

以上の解析では、無摂動磁場が一様であることを前提としていたが、非一様な場合へは、次のような拡張が考えられる。線形化された磁気応力差 (10) と磁気ポテンシャルの界面条件 (8) において $[H]_{s,i}$, $[B]_{s,i}$ が y に依存すると、 $[T_{nn}]_{s,i}(y, t)$ の波数成分 $T_{sk,ik}(t)$ は、式 (11) のように同一波数の η_k , ζ_k とばかりでなく、

$$\begin{cases} T_{sk} = \int dk' [G_1 \eta_{k+k'} + (G_3 \pm iG_4) \zeta_{k+k'}], \\ T_{ik} = \int dk' [(G_3 \mp iG_4) \eta_{k+k'} + G_2 \zeta_{k+k'}] \end{cases} \quad (18)$$

のように、2つの波数に依存する $G_{1,2,3,4}$ を通じて他の波数成分とも関係してくる。したがって、normal mode 方程式は次のような積分方程式になる。

$$A_k \ddot{u}_k + \int dk' B_{k,k'} u_{k+k'} = 0. \quad (19)$$

別な考え方は、無摂動磁場の y 方向変化の代表長さが摂動の波長 $2\pi/k$ より十分長いとして、normal mode 方程式 (12) あるいは coupled Mathieu 方程式 (17) 中の $[H] = [1/\bar{\mu}]B_n$, $[B] = [\bar{\mu}]\mu_0 H_t$ において、 $B_n = B_{0n}(y, z) + B_{1n}(y, z) \cos \Omega t$, $H_t = H_{0t}(y, z) + H_{1t}(y, z) \cos \Omega t$ のように、 B_n , H_t の y 依存性を残しておくことである。したがって、coupled Mathieu 方程式より計算される固有周波数 $\omega_{s,i}$ は、 $B_{0n,1n}$, $H_{0t,1t}$ を通じて y の関数になる。

非一様な無摂動磁場のもとでの共振現象を理解する一助として、図 1 のような実験に対する数値解析を図 2 のような解析領域で行い、得られた解析データから固有周波数の分布と交流周波数の関係を調べた。固有周波数が依存する磁場以外の物理量は k , $\rho_{1,2}$, $h_{1,2}$, $\gamma_{s,i}$, g , $\mu_{1,2}$ であるが、界面の位置を自由表面として ω_i を求めるときは、 $\rho_2 = 0.0\rho(\text{水})$, $\mu_2 = \mu_0$ で、 h_2 , γ_s は関係しない。

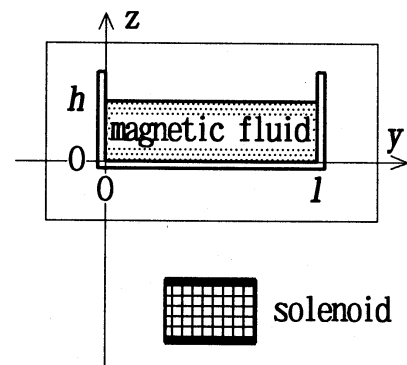


図 1. 交流磁場による界面波動の数値実験：実験装置

表 2. 交流磁場による界面波動の数値実験：物理量の値

下層透磁率	μ_1	1.4	μ_0
下層密度	ρ_1	1.2	$\rho(\text{水})$
下層厚	h_1	0.04	m
界面張力	γ_i	0.026	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
重力 (鉛直直流外力)	g	9.8	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
波長	$2\pi/k$	0.08	m
交流磁場周期	$2\pi/\Omega$	20	s
直流鉛直磁場	界面端	$(B_{0n}/\mu_0)_i$	0.00
	界面中央		0.00
交流鉛直磁場	界面端	$(B_{1n}/\mu_0)_i$	1.84
	界面中央		2.04
直流水平磁場	界面端	$(H_{0t})_i$	0.00
	界面中央		0.00
交流水平磁場	界面端	$(H_{1t})_i$	1.49
	界面中央		0.00

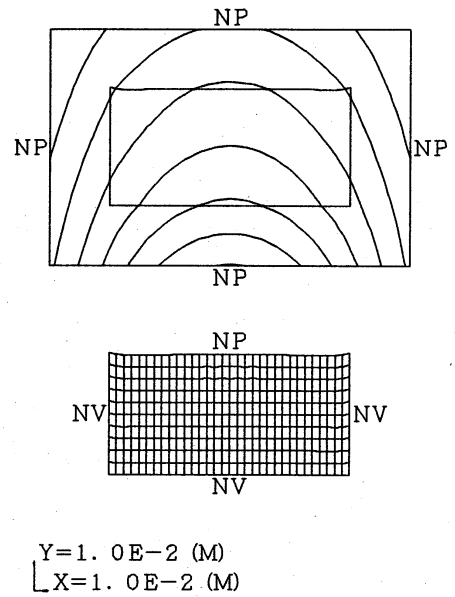


図 2. 交流磁場による界面波動の数値実験：磁場解析 (上, NP: 磁気ポテンシャル値既知)・流体解析 (下, NV: 法線流速既知, NP: 圧力既知) のための数値解析領域

それ以外の物理量の値は, 表 2 に示すとおりである. ここで波長と磁場の大きさが, 数値解析後, ω_i を求める際に必要になる. 波長は, 数値解析の結果生じた波動を見て, 水槽長さの半分とした. また磁場は, 数値解析の n ステップまでに界面上の各点で測定される $B_n^i, H_t^i (i = 1, \dots, n)$ より, 実効値として

$$\begin{aligned}
 B_{0n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_n^i, & B_{1n} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_n^i - B_{0n})^2}, \\
 H_{0t} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_t^i, & H_{1t} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (H_t^i - H_{0t})^2}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

のように求めた. 表 2 では交流磁場のみを与えているので, 直流磁場は 0 となっている.

図 3 は, 自由表面上の端と中央における磁場と変位の時間変化を示したもので, 変位は端でビートを打つように時間変化するのに対し, 中央では徐々に振幅を増している. 図 4 には, 幾通りかのステップでの流線分布を示す.

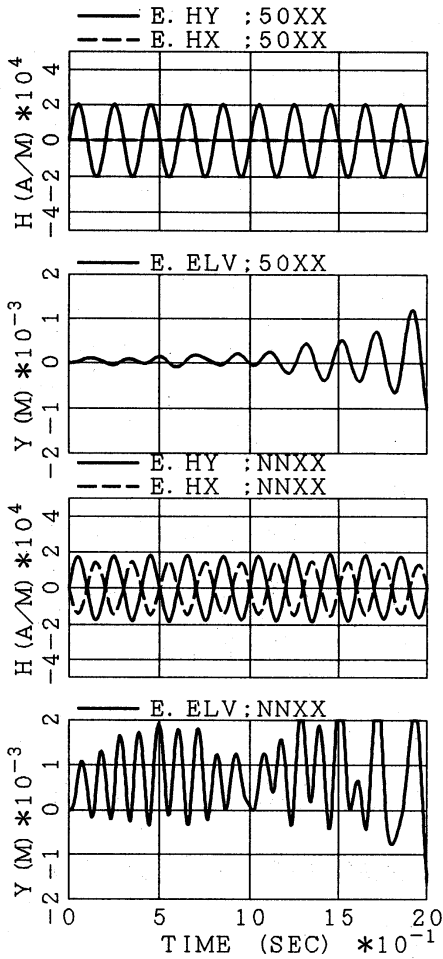
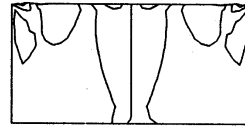
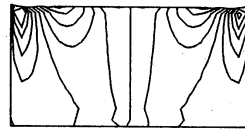


図 3. 交流磁場による界面波動の数値実験：自由表面上の端 (NNXX) および中央 (50XX) における鉛直磁場 (HY)・水平磁場 (HX)・自由表面変位 (ELV) の時間変化

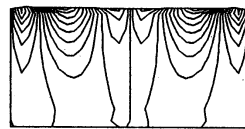
325-STEP
0.650SEC



525-STEP
1.050SEC



725-STEP
1.450SEC



925-STEP
1.850SEC

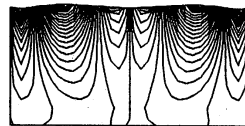


図 4. 交流磁場による界面波動の数値実験：流線分布

ステップとともに流線が混んできて、波動の不安定化が進む様子が表されている。また流線は自由表面付近に局在しており、浅水波的な解析は不適當であることもわかる。図 5は、この節での議論に基づいて、500 ステップまでの磁場の値から求めた固有周波数の分布を、交流周波数およびその 2 倍と共に示したものである。自由表面の中央付近では、鉛直磁場が卓越するため固有周波数は下がるが、端では水平磁場が現れて固有周波数は上がる。その相

対的な変化はこの数値解析ではあまり大きくはないが，領域全体で $\omega_i \sim \Omega$ となっており，波動の不安定化をパラメトリック共振で説明するためには十分なものとなっている。

5 まとめ

磁性流体における界面波動の動的解析のために導いた normal mode 方程式・coupled Mathieu 方程式について，磁場が一様でない場合にまで適用範囲を広げるための考察と拡張を行った。磁場の鉛直変化の効果は，磁気応力差に加えた鉛直勾配項で取り込む。水平変化については，それが緩ければ，卓越波長について，モードの固有周波数の空間変化としてとらえられる。交流磁場によって界面波動が不安定化するという数値実験の結果は，ほぼパラメトリック共振とみなせるが，その解析法を更に発展させることが望まれる。

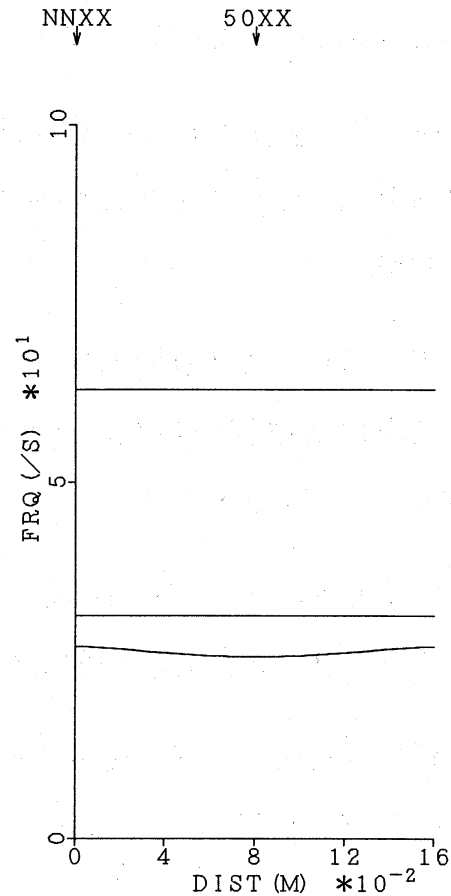


図5. 交流磁場による界面波動の数値実験:500ステップにおける固有周波数 ω_i の水平分布(曲線)および交流周波数とその2倍(直線)

参考文献

- [1] R.E.Rosensweig: Ferrohydrodynamics (Cambridge University Press, Cambridge) Chap.7 (1985).
- [2] 水田 洋: 表面と界面のある磁性流体の理論解析; 京都大学数理解析研究所講究録「流体における波動現象の数理とその応用」, **830**, pp.226-235 (1993).
- [3] 水田 洋: 二層磁性流体における表面波と界面波の相互作用; 京都大学数理解析研究所講究録「流体における波動現象の数理とその応用」, **866**, pp.263-276 (1994).
- [4] R.E.Zelazo and J.R.Melcher: Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions; J. Fluid. Mech., **39**, pp.1-24 (1969).
- [5] R.E.Rosensweig: Ferrohydrodynamics (Cambridge University Press, Cambridge) Chap.4, Chap.5 (1985).
- [6] 水田 洋: 変形可能セル法による磁性流体表面波動の解析; 計算力学 [IV] - 移動・自由境界問題の近似解析 - (登坂宣好・矢川元基 編, 養賢堂, 東京) 第5章 (1995).
- [7] Y.Mizuta: Numerical analysis of magnetic fluid with interface by a deformable-cell method; Proc. of 5th International Symposium on Computational Fluid Dynamics-Sendai, Japan, 1993 vol.II pp.267-272 (1993).