

## 波動現象における 1/2 階微分の役割

筑波大学・構造工学系 松内一雄 (Kazuo Matsuuchi)

### 1. はじめに

流体中を伝搬する無限小攪乱（あるいは波）の振る舞いは分散関係式

$$c = f(k), \tag{1}$$

によって特徴づけられる。ただし、 $k$ は波数、 $c$ は（複素）位相速度（ $= \omega/k$ 、 $\omega$ :角振動数）である。関数  $f(k)$  は  $ik$ の整数べきになる場合だけではなく、非整数となる場合も数多く存在する。このような場合、この分散関係式を生み出す方程式は通常微分方程式ではなく、非整数階を持つ方程式となる。その内で、ここで問題にするのは比較的よく物理現象に現れて重要な役割をする 1/2 階微分である。数学的には、この非整数階微分は二種類が定義されていて、1/2 階微分の場合次のように表される。

$$K^{-1/2}\eta = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x'-x}}, \tag{2}$$

$$I^{-1/2}\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}}. \tag{3}$$

前者は Weyl、後者は Riemann-Liouville の 1/2 階微分と呼ばれているものである。ともに非局所的な特性を持っているが、その役割は対照的である。

分散関係式 (1) で表される  $ik$ の非整数べきを含む場合の代表的な例として、次のようなものを考える。

$$c = 1 + \left[ \frac{\Delta_+}{\sqrt{2}}(-1+i) + \frac{\Delta_-}{\sqrt{2}}(-1-i) \right] k^{-1/2}. \tag{4}$$

これは物理的には、円管 Poiseuille 流の中心モード攪乱に対応している。 $\Delta_{\pm}$ の値は既に求められている。その結果、 $\Delta_-$ の符号は常に正、 $\Delta_+$ の符号は正負を取りうる（ただし、 $\Delta_+ - \Delta_- < 0$ ）ことが分かっている<sup>(1)</sup>。この  $\Delta_{\pm}/\sqrt{R}$ の値を表 1 に掲げる（文献(1)の計算値より算出、 $R$ は Reynolds 数である）。この表で  $n$ は周方向のモードを示していて、 $n=0$ は軸対称攪乱に対応している。また、 $m$ は安定性の悪さを示す指標である。

分散関係式 (4) の特別な場合として、 $\Delta_+ = \Delta_-$ と置くと、散逸の効かない場合になる。Poiseuille 流れの場合、この様な条件を満足する攪乱は存在しないが、深水重力波の分散関係式がちょうどこのような場合になっている（さらに、一様速度も考慮しない）。

表1 中心モードの分解

n	m=1		m=2	
	$\Delta_+/\sqrt{R}$	$\Delta_-/\sqrt{R}$	$\Delta_+/\sqrt{R}$	$\Delta_-/\sqrt{R}$
0	0	4.009	0	8.009
1	1.824	5.036	-1.808	5.048
2	1.998	6.666	-1.999	6.674
3	-2.044	8.483	2.040	8.480
4	-2.056	10.375	2.049	10.369
5	2.056	12.299	2.194	16.318

分散関係式(4)に対応する方程式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \Delta_+ I^{-1/2} \eta - \Delta_- K^{-1/2} \eta, \quad (5)$$

と書ける。この方程式(微積分方程式)を一般に解くのは困難である。そこで、 $\Delta_+ = 0$ (軸対称攪乱)、 $\Delta_- = 0$ 、 $\Delta_+ = \Delta_-$ (深水重力波)の場合に分けて議論する。便宜上、その拡散特性から $\Delta_+ = 0$ を満足する攪乱を上流拡散成分、 $\Delta_- = 0$ を満足する攪乱を下流拡散成分(または、異常拡散成分)と呼ぶことにする。この名前の由来については後述する。

## 2. Poiseuille 流の無限小攪乱

一端  $x = 0$  に攪乱源があり、 $t = 0$  から

$$\eta(0, t) = \exp(i\Omega t) \quad (t \geq 0), \quad (6)$$

で与えられる攪乱が加えられた場合の軸対称攪乱( $\Delta_+ = 0$ )の振る舞いについては以前報告した<sup>(2)</sup>。その結果、微積分方程式にもかかわらず、解は解析的に求まり、波頭  $m(= x/t) = 1$  が明確に存在し、これより下流側には如何なる攪乱も存在しないこと、この波頭の下流側への減衰特性等が明らかになった。逆に、上流側へは拡散していくことが Weyl の積分の形(2)から分かる。この特性から、この様な攪乱を“上流拡散成分”と呼ぶ。

ここでは、非軸対称攪乱に現れる Riemann-Liouville の  $1/2$  階微分の役割について検討する。この成分( $\Delta_- = 0$ )は単独では、物理現象に現れることはないが、解析の便宜上これを独立に扱う。定数  $\Delta_+$  は上流拡散成分と異なり、その符号は正負両方の可能性があることに注意する必要がある。上流拡散成分の場合と同様な方法によって形式的な解は

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi i} e^{\Delta^2 x/2} \int_L \exp[xh(s)] \frac{ds}{s - i\Omega}, \quad (7)$$

と求められる。ただし、 $\Delta$  の添え字は省略した。また、関数  $h(s)$  は

$$h(s) = \frac{s}{m} - s - i\Delta \left(s - \frac{\Delta^2}{4}\right)^{1/2}, \quad (8)$$

である。まず、 $\Delta < 0$  の安定の場合の解を求める。条件  $t, x \gg 1$  を満足する漸近解は、とうげ道の方法により

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_0'' x}} \frac{1}{s_0 - i\Omega} \exp\left[\frac{\Delta^2}{4} \frac{t}{1-m}\right], \quad (9)$$

と評価できる。ただし、 $s_0$  は鞍部点に対応する  $s$  である。この式が成立するのは  $m > 1$  が成り立つときのみである。さらに、条件

$$\Omega < \frac{\Delta^2 m \sqrt{2m-1}}{2(1-m)^2}, \quad (10)$$

を満足するとき、式 (9) に加えて留数による寄与

$$\eta(x, t) = \exp[i\Omega(t-x) - i\Delta(i\Omega - \frac{\Delta^2}{4})^{1/2}x + \frac{\Delta^2}{2}x], \quad (11)$$

がある。粘性の効果が低い場合、 $(i\Omega - \Delta^2/4)^{1/2} \approx (1+i)\sqrt{\Omega/2}$  と近似でき、波数は  $\Omega + \Delta\sqrt{\Omega/2}$  と減少する。式 (9) の指数関数は  $m \rightarrow \infty$  の極限で 1 に収束することに注意すると、この下流への拡散は  $1/\sqrt{x}$  で示されるゆっくりした減衰特性を持っていることが分かる。このような下流への特性から“下流拡散成分”と呼ぶのが適当である。ただし、単独で物理現象に現れることはなく、その意味では異常拡散成分とも呼べる。条件  $m < 1$  を満足する時は、留数の寄与として式 (11) で表されるものだけである。

つぎに、 $\Delta > 0$ 、すなわち単独では不安定な攪乱の場合を考える。条件  $m < 1$  を満足する場合には、簡単に留数として

$$\eta(x, t) = \exp[i\Omega(t-x) - i\Delta(i\Omega - \frac{\Delta^2}{4})^{1/2}x + \frac{\Delta^2}{2}x], \quad (12)$$

と求まる。散逸効果が弱い場合には、上流拡散成分の場合とは逆に、波数は分散効果のために増加する。次に、 $m > 1$  の場合、 $s$ -平面の右半平面を二つの扇形に積分することによって求めることができる。結果だけを書き下すと

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{\pi} \exp\left(\frac{\Delta^2}{4} \frac{1+m}{m} x\right) \int_0^\infty \exp[(1-m)\lambda t] \sin \Delta \sqrt{\lambda} x \frac{d\lambda}{\lambda - i\Omega + \Delta^2/4}, \quad (13)$$

となる。これ以上は数値的に積分を実行する以外、解の具体的な形は求まらない。

次に、 $x = 0$  における境界条件を

$$\eta(0, t) = 0.1 \sin t, \quad (14)$$

と選び、上で求めた解を図に示す。参考までに、今回詳しくは述べなかった正常拡散成分の場合も図だけは掲げる。1/2 階微分の係数  $\delta (= \Delta/\sqrt{\pi})$  を 0.02 と置いたこの正常拡散成分の時刻  $t = 90$  での波形変化を図 1 に、-0.02 と置いた異常拡散成分の同時刻の波形変化を図 2 に示す。両者とも漸近解（破線）と留数による寄与（実線）を分離して示してある。両者の和が実際の波形変化に対応している。両図から両成分の対照的な振る舞いがよく分かる。

特に、下流拡散成分の下流への拡散には特に注目する必要がある。非常に緩やかではあるが無限下流までその影響は認められる。

次に、異常拡散成分の不安定の場合の結果を、留数によるものと積分によるものとを分けて図3(a)に示す。係数 $\delta = 0.01$ で時刻 $t = 50$ における波形変化である。安定の場合と同様な下流に長く尾を引く特性を持っている。これは $1/2$ 階微分の非局所性の現れでもある。位置 $m = 1$ で波形は急激な変化を示す。この点での詳しい解析は積分の評価等が困難なことにより、行わなかった。ただ、これは分散関係式の最低次の散逸効果の評価であり、更に高次項を取込むことによってこの急激な変化は和らげられる。比較のために、同じ条件で方程式を数値的に解いた結果を図3(b)に示す。解析解と良い一致を見せている。ただ、 $m = 1$ のところでは精度的に高く求めるのは困難であり、若干の差異が認められる。

### 3. 深水重力波

深水重力波を支配する方程式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{2}}(I^{-1/2} - K^{-1/2})\eta = 0, \quad (15)$$

で書き表される。これは式(5)で、 $\Delta_+ = \Delta_- = -1/\sqrt{2}$ と選び、かつ、一様速度がない特別な場合に対応している。別の見方をすると、深水重力波は安定な下流拡散成分と不安定な上流成分の和になっている。Poiseuille流れと同様の条件(ただし、(14)の振幅は0.1ではなく1とした)で解を求める。Laplace変換による形式的な解は

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{h(s)x} \frac{ds}{s - i\Omega}, \quad (16)$$

となる。ただし、 $h(s) = is^2 + s/m$ である。積分路 $L$ は複素 $s$ -平面上で特異点が左にくるようにとった虚軸に平行な直線である。この積分路を少し変形し、点 $s = i\Omega$ を迂回するようにし、この近傍以外は虚軸上に積分路をとり、適当な変数変換を施すと、

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} e^{i(-\Omega^2 x + \Omega t)} \left[ \frac{2}{\pi} g(x, t) + 1 \right], \quad (17)$$

が得られる。右辺括弧内の最後の項は留数によるものである。関数 $g(x, t)$ は

$$g(x, t) = \int_0^\infty \sin(s - \xi x) \xi \frac{d\xi}{\xi}, \quad (18)$$

で与えられる。ただし、 $s = t - 2\Omega x$ で、関数 $g(x, t)$ が $x$ と群速度(=位相速度/2)に乗った座標系から測った距離 $s/2\Omega$ の両者の関数であることを示している。図4に時刻 $t = 100$ におけるこの解の空間的变化の様子を関数 $g(x, t)$ とともに描いてある。波頭が群速度 $1/2\Omega$ で伝搬している。十分時間が経っているにもかかわらず、波形は正弦波からかなりかけ離れている。これは関数 $g(x, t)$ の特性によっている。かなり小さい波が局所的に出現していて、通常の有限個のフーリエモード分解ではこのような変化を記述することは困難であることが窺われる。

波頭  $m = 1/2$  を越えての波の伝搬は  $I^{-1/2}$  の積分特性で示される下流拡散成分の影響と考えられる。

#### 4. 有限振幅波について

2節で無限小振幅の攪乱の波形変化を記述する方程式を導き、その解を求めた。ここで述べた方法は正弦波から大きくずれた波も記述可能であり、異なる波数成分を生み出す有限振幅波への拡張はこの点で重要な意義がある。しかし、ここでは前回の報告と同様、支配方程式を Navier-Stokes 方程式から直接導くことはしなかった。現象の観測から簡単な非線形項を導入し、この非線形と  $1/2$  階微分の相互作用を見ることにする。

前報告では Weyl の  $1/2$  階微分と非線形両者の関係を数値的に求めた<sup>(2)</sup>。ここでは同様なことを、Riemann-Liouville の  $1/2$  階微分について行う。具体的には、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (1 - \eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \delta \int_{-\infty}^x \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x - x'}} + \eta^3, \quad (19)$$

を数値的に解く。攪乱は、 $x = 0$  において、時刻  $t = 0$  から、

$$\eta(0, t) = -0.3e^{-0.05(t-5)^2} + a \sin 5t \quad (t \geq 0), \quad (20)$$

と与えられる。この形は実験的に知られている puff と呼ばれている乱流塊の発生をモデル化したものである。

全く同じ境界条件での Weyl の  $1/2$  階微分の計算結果は意外な振る舞いを示した<sup>(2)</sup>。安定な無限小攪乱は非線形の効果（左辺の非線形項）により、攪乱の振幅が増幅する場合がある。この振幅の増大は高周波の振幅  $a$  が大きくなると起こる。 $1/2$  階微分の非局所性と非線形の効果—負の振幅分散—の相互作用の結果であるが、非線形と非局所性の二つの独立な特性からは予期が困難な現象である。前回、まったく安定で (20) の波形がそのまま減衰しながら下流に伝搬していく場合 ( $a = 0.1$ ) と、非線形の効果により完全に不安定を起し、有限時間で解が発散する場合 ( $a = 0.2$ ) について図に示した<sup>(2)</sup>。ここでは、この非線形による不安定で、解が発散する寸前の場合 ( $a = 0.165$ 、 $a = 0.17$  で発散) を図 5 に示す。係数  $\delta$  は  $0.02$  である。式 (4) ( $\Delta_+ = 0$ ) から分かるように無限小振幅攪乱は波数が大きいほど速く伝搬する。一方、振幅が増大すると負の振幅分散により波の速度は遅くなる。最も大きい  $|\eta|$  をとるのは式 (20) の最初の項で表されている凹部の底である。これが著しく遅らされているのが分かる (図 5 と文献 (2) の図 4 を比較のこと)。高周波の振幅  $a$  が小さい時は、波形は振幅分散の効果による大きな変形を受けることもなく伝搬していく (安定な場合) が、振幅  $a$  が大きくなると、大きな空間構造を持った凹部が遅らされ、高周波はここを越えて進めなくなる。このエネルギーは凹部の上流部分に溜まることになる。これが不安定のメカニズムの説明である。

次に、下流拡散成分の安定な場合について述べる。図 6 に、 $\delta = -0.01$ 、 $a = 0.105$  ( $a = 0.11$  で発散) の場合の時空間発展をプロットしてある。散逸係数  $\delta$  は上の上流拡散成分に比べて二分の一に小さくなっており、これにより  $a = 0.11$  の小さな振幅で不安定が起こるこ

とは理解できる。このような小さな係数にもかかわらず、攪乱の下流端は、この拡散のために不明瞭になっている。

上流拡散成分との比較のために、図5の場合と係数の大きさが同じ $\delta = -0.02$ の場合も計算を行った。この結果は、 $a = 0.11$ では安定で、波形の大きなくぼみはその幅を広げるが深さは有限の大きさに留まる。これより少し大きい $a = 0.12$ では際限なく深さは深くなる。

分散関係式によれば、上流拡散成分も下流拡散成分も同じ波数に対し同じ伝搬速度を持つ。したがって、上で述べた有限振幅波の不安定のメカニズムによれば、 $a$ のしきい値はほとんど同じと予想される。しかし、このしきい値は下流拡散成分の方が遥かに小さい。これは、上流拡散成分がその名前のように上流に波を拡散するために、凹部の上流側に溜るエネルギーが、下流拡散の場合と比べて少なくなるため、と説明できるかもしれない。しかしながら、このような散逸と分散が同時に影響するような半端な微分で支配される攪乱のエネルギー伝搬速度が明確に定義できない限り、真の説明とはならない。

もともと不安定な攪乱（下流拡散成分）についての計算も行った。図7に $\delta = 0.01$ 、 $a = 0.07$ （0.08で発散）の計算結果を示す。この例は主として線形の不安定メカニズムによって振幅が増大する場合である。これより大きな $a$ では、この線形の不安定よりも急速に分散効果と非線形的作用により、波の振幅は増大する（ $a \geq 0.08$ ）。

## 5. まとめ

円管 Poiseuille 流れにおける攪乱と、深水重力波を記述する際に現れる  $1/2$  階微分の効果を考えた。得られた知識はまだ断片的であるが、この半端な微分の持つ非局所性の特徴が示す、普通の微分では説明できない、興味ある振る舞いと、さらに、非線形との関わりで示す想像を越えた作用は、この半端な微分の持つ奥深さを示している。さらに深くこの半端な微分の意味と現象に果たす役割を追求していく必要がある。

非線形と  $1/2$  階微分の係わりで起こる現象を定式化するのは Poiseuille 流れの攪乱より、深水重力波の方がより容易である。まず、この深水重力波から有限振幅波への拡張を試みたい。

## 参考文献

- (1) Salwen, H. and Grosch, C.E., J. Fluid Mech., 54(1972), 93-112.
- (2) 松内一雄、流れの安定性と  $1/2$  階微分、流体における波動現象の数理とその応用、数理解析研講究録 830(1993), 236-240.

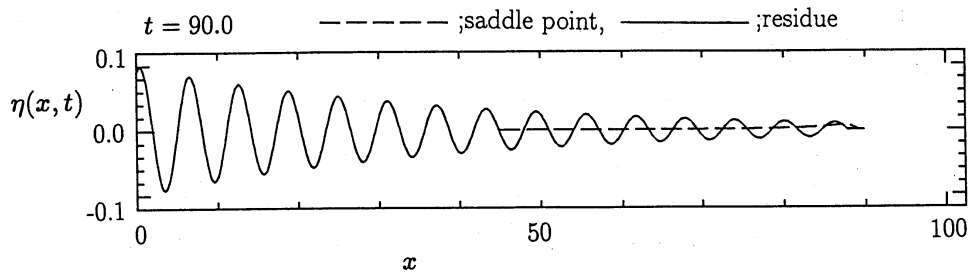


図1 上流拡散成分の漸近解（破線）と留数による解（実線）

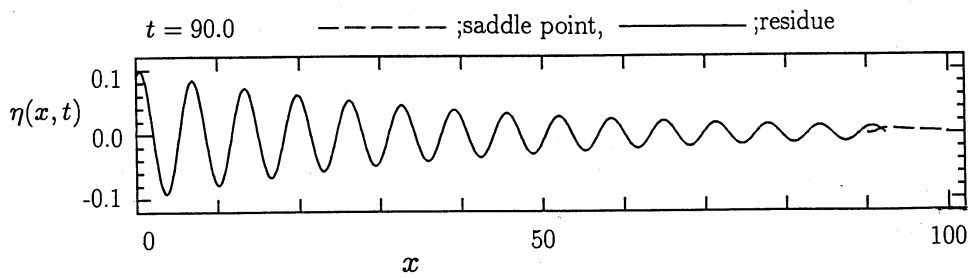
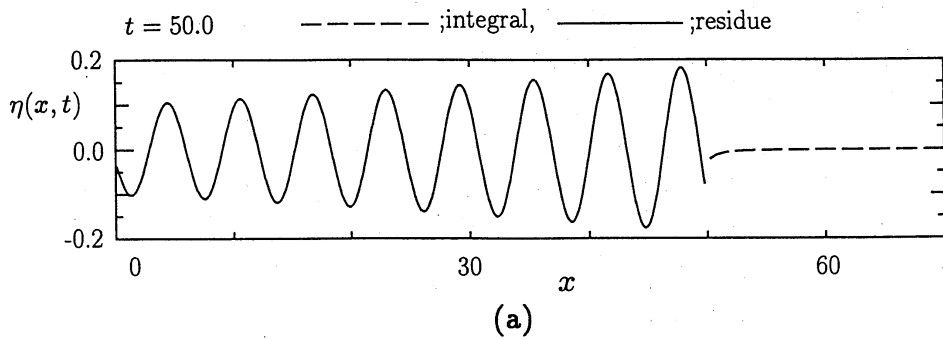
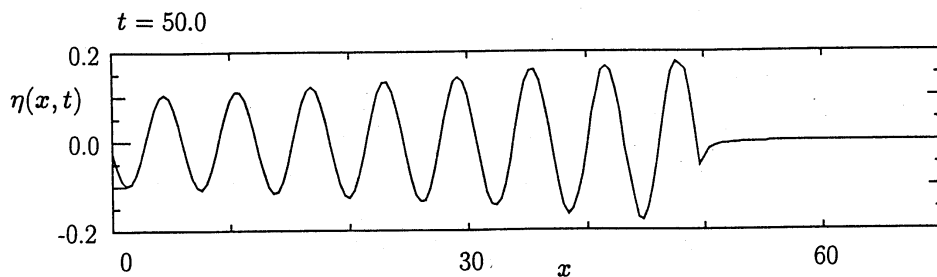


図2 下流拡散成分（安定）の漸近解（破線）と留数による解（実線）



(a)



(b)

図3 下流拡散成分（不安定）の解析解 (a) と数値解 (b)

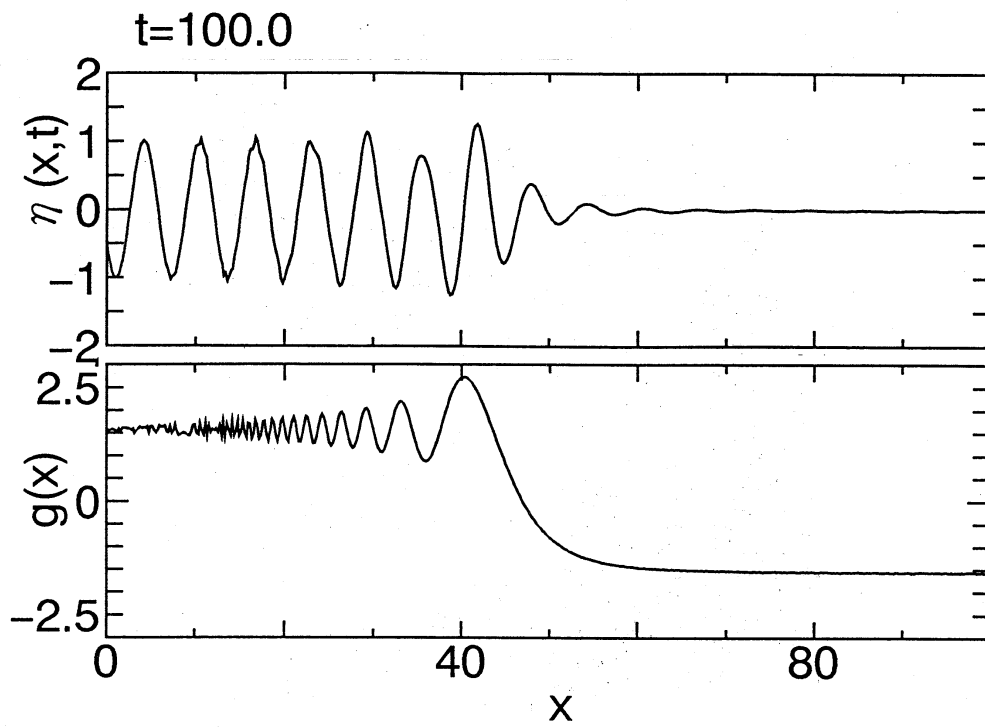


図4 深水重力波の波形変化と関数  $g(x,t)$  の変化 ( $t = 100$ )

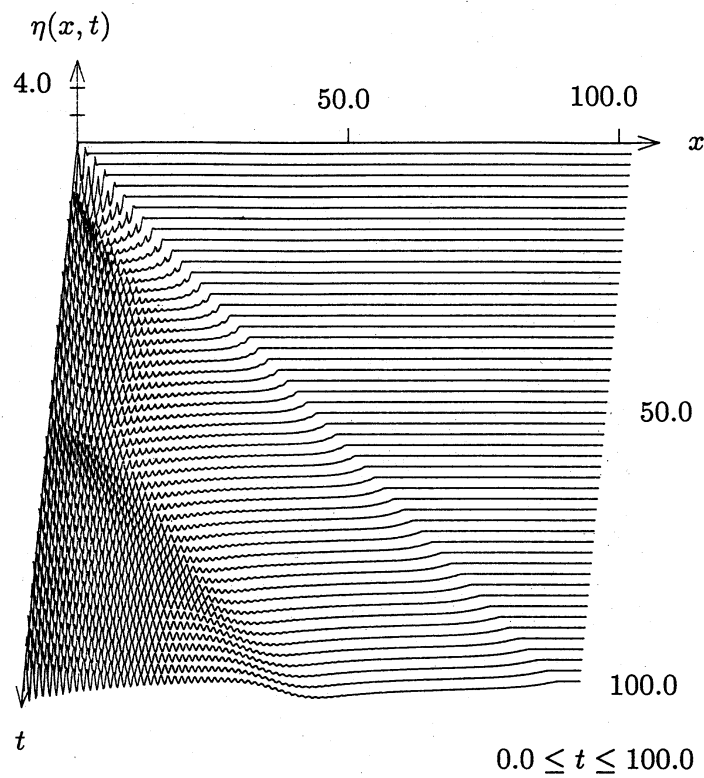


図5 有限振幅上流拡散成分の時空間変化



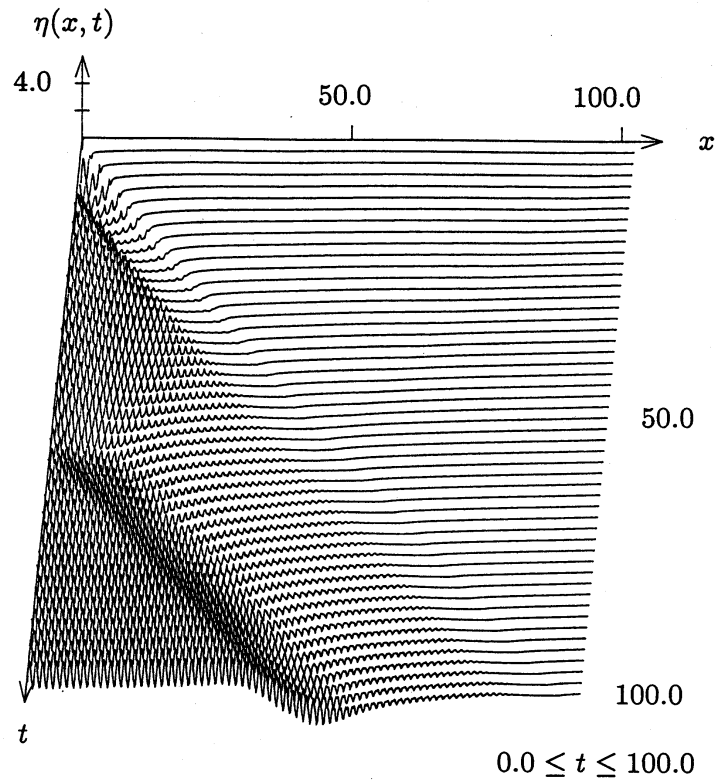


図6 有限振幅下流拡散成分（安定）の時空間変化

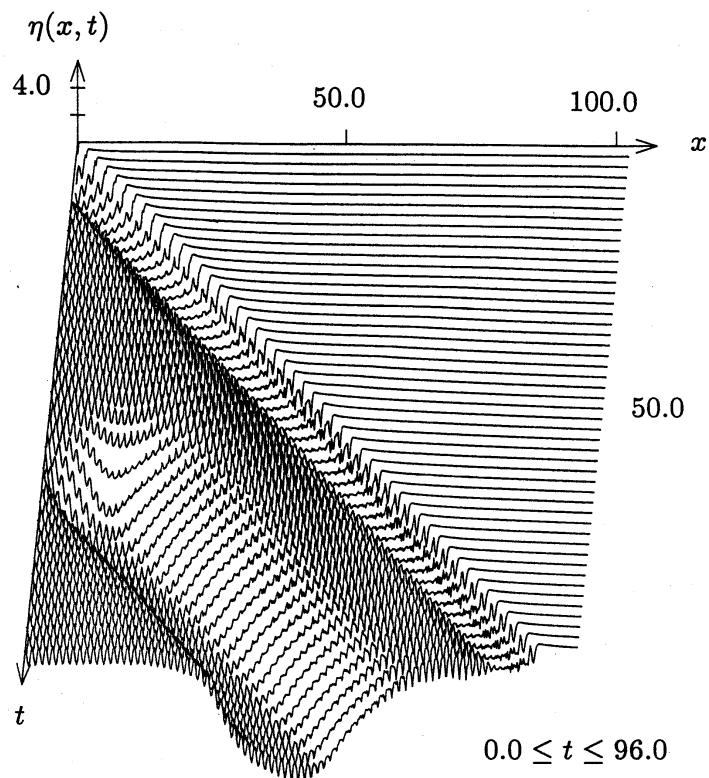


図7 有限振幅下流拡散成分（不安定）の時空間変化