

Davey-Stewartson 方程式の数値計算と 底面の不均一性による摂動

東大工 矢嶋徹 (Tetsu Yajima)

東大工 西成活裕 (Katsuhiko Nishinari)

1. はじめに

Davey Stewartson I 型方程式¹⁾ (以下 DS1 方程式と略す)

$$\begin{cases} iA_t + \Delta A - 2|A|^2 A + (Q_x + Q_y)A = 0 \\ Q_{xy} = (|A|^2)_x + (|A|^2)_y \end{cases} \quad (1)$$

は、ドロミオンと呼ばれる極在解^{2,3)}をもつ系である。この解は、変数 A が二次元空間内で各方向に指数的に減衰する裾を持って極在するのに対し、変数 Q は一方向にのみ指数的に極在するような構造を持っている。二次元における極在構造の研究は、KP 方程式などのさまざまな系に対してなされてきたが、指数的な裾を持つ二次元的な極在構造を解として持つような系はドロミオン以外には有意義なものは今のところ見つかっていない。

このように、高次元における極在構造として、ドロミオンは良い性質を持つものであることが推測される。しかしながら、主に方程式の複雑さにより、DS 方程式は厳密解以外にはどのように系が振舞うのかよくわかっていない。たとえば、ドロミオン解は厳密解としては存在するものの、そこに摂動が入った場合、それは安定な構造であるかどうかは解析的に調べることは現在のところ成功していない。これは、同様の孤立パルスであるソリトン系とは本質的に異なる部分である。ソリトンは、スペクトルパラメタのなす複素平面の上での散乱データのゼロ点という、トポロジックにはっきりした構造を持つものと明確な対応関係があるが、ドロミオンはそのような関係がなく、相互作用の下でパルスの生成・消滅がおり、線形安定性解析などの摂動安定性の議論も難しい。

本稿では、二次元の極在構造としてのドロミオンが、摂動に対してどのように振舞うの

かを数値計算によって調べることを目的とする。具体的には、まず厳密解から少しだけ離れた条件を与え、それからどれだけドロミオン解に影響を与えるかを調べる。また、外力に相当する項が付け加えられた時に、ドロミオンがどのような変化を受けるのかをも確かめる。

さて、以下での議論を進めるために、DS1 方程式の等価な表現とドロミオン解について簡単にまとめることにする。方程式 (1) は新しい変数 $U \equiv Q_x - |A|^2$, $V \equiv Q_y - |A|^2$ を導入することにより、

$$\begin{cases} iA_t + \Delta A + (U + V)A = 0 \\ U_y = (|A|^2)_x, \quad V_x = (|A|^2)_y \end{cases} \quad (2)$$

と書き直すことができる。新しい変数 U, V をまとめて平均流と呼ぶことにしよう。ここで第一式において、 $-(U + V)$ は二次元 Schrödinger 方程式のポテンシャルになっていることに注意しておきたい。ここで、従属変数の変換 $A = G/F$ を行ない、

$$\begin{aligned} F &\equiv 1 + \exp(\eta_1 + \eta_1^*) + \exp(\eta_2 + \eta_2^*) + \gamma \exp(\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^*), \\ G &\equiv \rho \exp(\eta_1 + \eta_2), \\ \eta_j &= [k_r^{(j)} + ik_i^{(j)}]x_j + [\omega_r^{(j)} + i\omega_i^{(j)}]t, \quad (j = 1, 2, \text{ただし、} x_1 = x, x_2 = y) \end{aligned} \quad (3)$$

と表すと⁴⁾、次のような結果を得る。

$$\begin{aligned} \omega_r^{(j)} &= -2k_r^{(j)}k_i^{(j)}, \quad j = 1, 2, \\ \omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)} &= k_r^{(1)2} + k_r^{(2)2} - k_i^{(1)2} - k_i^{(2)2}, \\ |\rho| &= 2\sqrt{2k_r^{(1)}k_r^{(2)}(\gamma - 1)}, \end{aligned} \quad (4a)$$

平均流は (2) の第二式を積分してやれば得られるが、それには境界条件が必要である。それは、 $U = 2(\ln F)_{xx}$, $V = 2(\ln F)_{yy}$ によって与えることができ、

$$U(x, y = -\infty) = \frac{8k_r^{(1)2} \exp(\eta_1 + \eta_1^*)}{[1 + \exp(\eta_1 + \eta_1^*)]^2}, \quad V(x = -\infty, y) = \frac{8k_r^{(2)2} \exp(\eta_2 + \eta_2^*)}{[1 + \exp(\eta_2 + \eta_2^*)]^2} \quad (4b)$$

となる。

以上が 1-ドロミオン解と呼ばれる解で、変数 A の絶対値をプロットすると二次元平面上で孤立した山が一つあることがわかる。また平均流は、 V は x 軸、 U は y 軸に平行で、 A の山から十分にはなれた面で断面を見てやると、共に一次的に山を一つずつもつ構造をしている。このため、この解を (1,1)-ドロミオン解とも呼ぶ (図 1)。式 (4a) を見るとわか

るように、1-ドロミオン解は任意パラメタを5個持っている。なお、式(3)で、より多くの指数項を付け加えると、簡単に (m,n) -ドロミオン解を作ることができる。

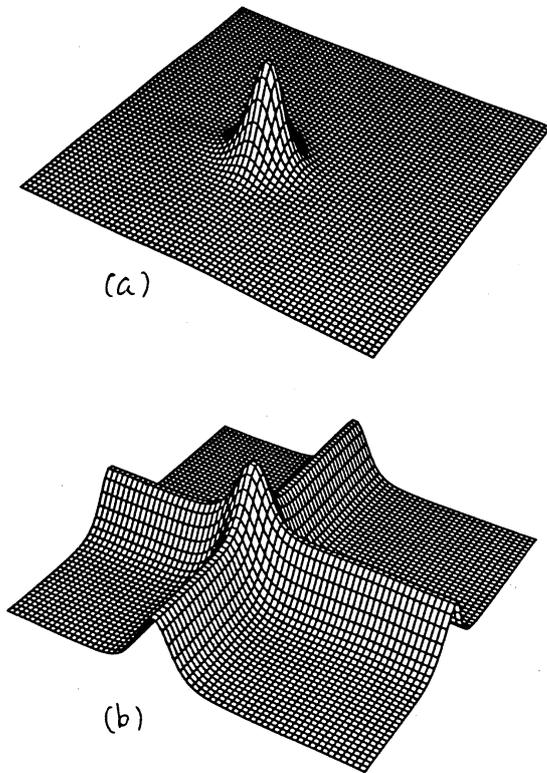


図1

方程式(2)の1-ドロミオン解の形。

(a) $|A|$ の表面プロット,

(b) 平均流 U と V を重ねたもの。

A の極在構造は平均流 U, V の山の部分が重なりあった付近に現れる。

2. 摂動の効果と簡単な考察

ここでは流体の系をとり、一次元のソリトン方程式に対する摂動⁵⁻⁸⁾と同様にして、底面が平らでないとしたときの摂動項を含むモデル方程式を求め、併せてその付加項の働きについて考察する⁹⁾。鉛直方向に平行に z 軸をとり、簡単のため底面の関数 $z = -H$ が一方向にのみ変化するものとしよう。そして $H = H(x)$ となるように x 軸を定める。また底面の空間的な変化は、極在パルスの特徴的な大きさに比べて十分ゆっくりであるとする。

さて、流体が速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ をもつ渦なしの非圧縮性完全流体であるとし、その密度が ρ 、表面が $z = \zeta(x, y, t)$ 与えられているものとする。このとき、系の基礎方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi &= 0, & (-H < z < \zeta). \\ H_x\phi_x + H_y\phi_y + \phi_z &= 0, & (z = -H), \\ \phi_z - \zeta_t - \phi_x\zeta_x - \phi_y\zeta_y &= 0, & (z = \zeta), \\ \phi_t + g\zeta + (\nabla\phi)^2/2 &= T/R\rho, & (z = \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 g は重力加速度、 T は表面張力、 R は表面の曲率で、 $R = (1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^{3/2} / [(1 + \zeta_x^2)\zeta_{yy} + (1 + \zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy}]$ によって与えられるものである。

通減摂動法を用いてモデル方程式を求めることにしよう。パラメタ ε を導入し、新しい独立変数を $\xi = \varepsilon(x - vt)$, $\eta = \varepsilon y$, $z = z$, $\tau = \varepsilon^2 t$ によって定める。また、 ϕ, ζ, H をそれぞれ平衡状態の静止解 $(\phi, \zeta, H) = (0, 0, H^{(0)})$ のまわりで ε と $E \equiv e^{i(kx - \omega t)}$ を用いて展開する。ただし、 $H^{(0)}$ は、 $H(x, y)$ の平均値である。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=-n}^n \phi_{\ell}^{(n)}(\xi, \eta, z, \tau) \varepsilon^n E^{\ell}, \\ \zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=-n}^n \zeta_{\ell}^{(n)}(\xi, \eta, z, \tau) \varepsilon^n E^{\ell}, \\ H &= H^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} H^{(n)}(\xi, \eta, \tau) \varepsilon^n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式 (6) を式 (5) に代入し、 $\varepsilon^n E^{\ell}$ の各次数で係数の比較をしてやると、未知変数の間の関係式を得る。その ε^2 までの主要な結果は、 $K = k^2 T / \rho g$, $\sigma = \tanh[kH^{(0)}]$ として、

$$\begin{aligned} \phi_0^{(1)} &= A_0(\xi, \eta, \tau), & \phi_1^{(1)} &= A_1(\xi, \eta, \tau) \cosh[k(z + H^{(0)})] / \cosh(kH^{(0)}), \\ \omega^2 &= gk(1 + K)\sigma, & v &= \partial\omega / \partial k, \end{aligned}$$

となっている。また、新しい変数を

$$A_1 = A, \quad A_{0\xi} = \frac{k^2}{v} Q - \frac{k^2[v(1 + \sigma^2)(1 + K)^2 + (1 + K) - 2K\omega/k]}{(gH^{(0)} - v^2)(1 + K)^2} |A_1|^2$$

と定義すると、次の $\varepsilon^3 E^0$ and $\varepsilon^3 E^1$ のオーダーで、これらを未知変数とする方程式

$$\left\{ \begin{aligned} iA_t + \alpha A_{\xi\xi} + \beta A_{\eta\eta} - \gamma |A|^2 A - \delta A Q + i\theta A H_{\xi}^{(1)} &= 0, \\ a Q_{\xi\xi} + Q_{\eta\eta} &= b(|A|^2)_{\eta\eta} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

が得られる。ここで、未知変数の項の前の係数は、

$$\alpha = \frac{1}{2\omega} \left\{ \frac{K\omega^2}{(1+K)k^2} + gH^{(0)}(1+K)(1-\sigma^2)(1-\sigma kH^{(0)}) - \left[v - \frac{2\omega K}{(1+K)k} \right]^2 \right\}$$

$$\beta = \frac{v}{2k}, \quad \delta = \frac{k^3}{v}, \quad \theta = \frac{gk(1+K)(1-\sigma^2)}{2\omega}$$

$$\gamma = \left\{ 1 - \frac{3K\sigma^3}{2(1+K)} + \frac{[(1+K)\sigma - (1+\sigma^2)^{-1}][(1-\sigma^2)(1+K) + 4 + K]}{\sigma(1+K)(1+K - (1+4K)/(1+K))} \right\} \frac{k^4}{\omega}$$

$$+ \frac{k^3[(1+(1+K)^{-1} + 1 + \sigma^2)v - 2\omega K/k(1+K)^2]}{gH^{(0)} - v^2}$$

$$a = 1 - v^2/gH^{(0)}, \quad b = \frac{v}{gH^{(0)} - v^2} \left[\left(\frac{1}{1+K} + 1 + \sigma^2 \right) v - \frac{2\omega K}{k(1+K)^2} \right]$$

によって与えられ、これらは $H^{(0)}$, K , k に依存する。この方程式にスケール変換を施し、適当な比例定数を選んで $Q \propto R_y$ として、さらに $\xi\eta$ 平面の座標軸の 45° 回転 ($X = \eta - \xi$, $Y = \eta + \xi$) を行なった後、(2) を導いたのと同様の変数 U, V を導入して、次の方程式を得る：¹

$$iA_t + A_{XX} + A_{YY} + (U + V)A = -i\lambda AH^{(1)}_\xi, \quad (9a)$$

$$U_Y = (|A|^2)_X, \quad V_X = (|A|^2)_Y. \quad (9b)$$

ここで、 λ は摂動の程度を表す正の定数である。なお、ここでは $H = H(x)$ と仮定したが、 H が y にも依存する場合でも付加項の形が変わらないことは、各変数の ε 依存性を考えれば、確かめることは容易である。

さて、本稿の主要な目的は外力がドロミオンに与える影響を見ることであつたから、以下では底面の变形が空間内のある限られた部分に現れる場合を考えよう。その一つの例として、緩やかに変化するステップ状の底面を考える。すなわち、 \bar{q}, p_1, p_2 を定数として $H^{(1)} = \bar{q} \tanh(p_1\xi + p_2\eta)$ とする。すると、(9a) 式の右辺の摂動項は、

$$-i\lambda AH^{(1)}_\xi = -i\lambda p_1 \bar{q} A \operatorname{sech}^2(p_1\xi + p_2\eta) \equiv -i\kappa A \operatorname{sech}^2(K_1X + K_2Y)$$

となる。係数 K_1, K_2, κ は新しく導入された定数で、また $\lambda > 0$ であるから、 κ は $p_1\bar{q}$ と同じ符号を持つ。この摂動項の効果を考えてみよう。変数 A が微小振幅をもつとして

¹実際には係数 α, β, a, b のあいだに特別な関係式が成り立たなければならないが、ここでは DS 方程式の摂動を考えているので、成り立っていると仮定する。この関係式は、表面張力が強く、水深が十分深い極限で満たされる。

$A \sim F(t)e^{i(k_x \xi + k_y \eta - \omega t)}$ とおくと、式 (9a) の高次の項を無視できる。その結果、 $\omega = -(k_x^2 + k_y^2)$ および $F = \exp[-\kappa \operatorname{sech}^2(K_1 X + K_2 Y)t]$ が得られる。これは、 κ の正負に依存して指数的な増幅または減衰を示す。

3. 数値計算の結果

さて、実際に数値計算を行なって前節の考察を検証してみよう。ここでは、1-ドロミオン解を用いて数値計算を行なった。

最初に厳密解からずれた波形を持つ波の時間発展を考える。そのために、境界条件を厳密解からわずかにずらして数値計算を行なった。数値計算の実行にあたっては、厳密には境界条件として有限の距離での境界条件を与えなければならないが、そのかわりに式 (4b) で与えられる無限遠でのものを用いた。解のパラメータは、 $\gamma = 3$, $k_1^{(j)} = 0.8$, $k_2^{(j)} = 0.6$, ($j = 1, 2$) と選んだ。その時の変数 A の絶対値の時間発展を表面プロットにして示すと図 2 のようになる。また、変数 A の最大波高の絶対値の二乗を厳密解と比較して表 1 にまとめた。これを見てればわかるように、境界での値を厳密解からほんの僅かだけずらしても孤立パルスであるドロミオンはほとんど影響を受けないと結論できるだろう。

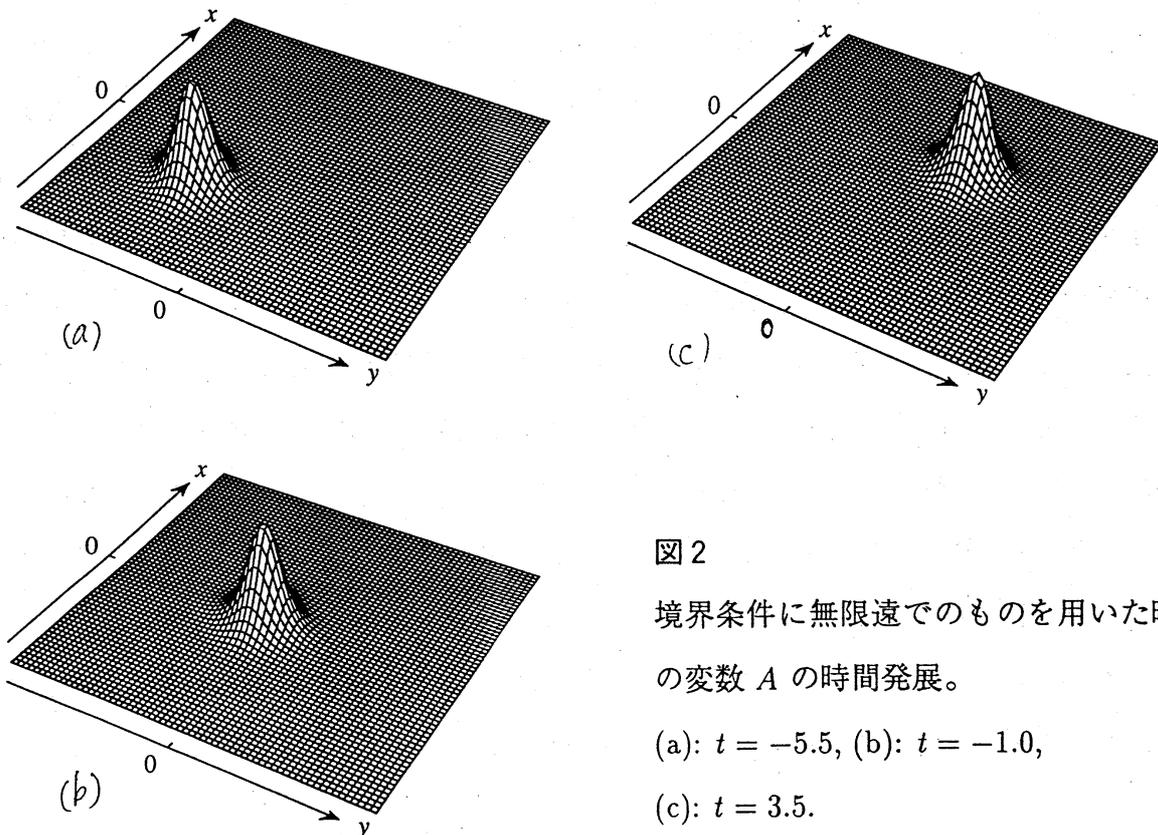


図 2

境界条件に無限遠でのものを用いた時の変数 A の時間発展。

(a): $t = -5.5$, (b): $t = -1.0$,

(c): $t = 3.5$.

時刻	厳密な境界条件	無限遠での境界条件	差 ($\times 10^{-10}$)
-3.000000	0.3408389281735529	0.3408389281735529	0.0
-1.355706	0.3417900100132564	0.3417900099430654	2.053628
-0.794856	0.3377552920420104	0.3377552918767084	4.894135
0.307718	0.3372104103726524	0.3372104103653520	0.2164950
1.007018	0.3428532835640901	0.3428532834641558	2.914784
1.322360	0.3421235844780174	0.3421235843649262	3.305566
1.900000	0.3421816909319298	0.3421816908061519	3.675763
2.408726	0.3384982192722150	0.3384982190838372	5.565105
2.867634	0.3378210317208404	0.3378210316233613	2.885524

表 1 : パラメタを $\gamma = 3$, $k_r = l_r = 4/5$ and $k_i = l_i = 4/8$ と選んだ時に、厳密解の境界条件を与えた時と無限遠での境界条件を使った時との $|A|^2$ の最大値の比較。

次に、前節で求めた外力の影響を含む方程式に対する数値計算を行なってみよう。外力を受けている間はそれに応じて解も減衰または増幅を受けることが予想されたが、外力が除かれた後（つまり、前節の言葉では、ステップを通り過ぎてしまった後）にドロミオンは果たして再び安定に伝播するだろうか。ここでは、解のパラメタを $\gamma = 3$, $k_r^{(j)} = 0.8$, $k_i^{(j)} = 0.8$, ($j = 1, 2$) と選び、ステップの幅をドロミオンの幅と同程度の $K_1 = 0.4$, $K_2 = \pm 0.4$ に固定して摂動項の大きさ κ をいろいろ変化させた。このとき、ドロミオンは直線 $Y = X$ に平行な方向に、 X が増加する向きに進行する。パラメタ K_2 の符号を変えるのはステップがドロミオンの進行方向と平行になる時と、直角になる時の両方の場合を調べるためである。

最初にステップがドロミオンの進行方向と平行に走っている時 ($K_1 = -K_2 = 0.4$) を考える。また、外力の度合を示すパラメタとして $\kappa = -0.5$ とした。このときは、ドロミオンは一定した摂動の効果を受け続けるので、変数 A は一貫して指数的にダンプすることが予測できる。さて、この時の A の最大波高の時間変化をグラフに描いたものが図 3 であるが、確かにドロミオンは時間的に減衰し、それは指数的になっているようである。

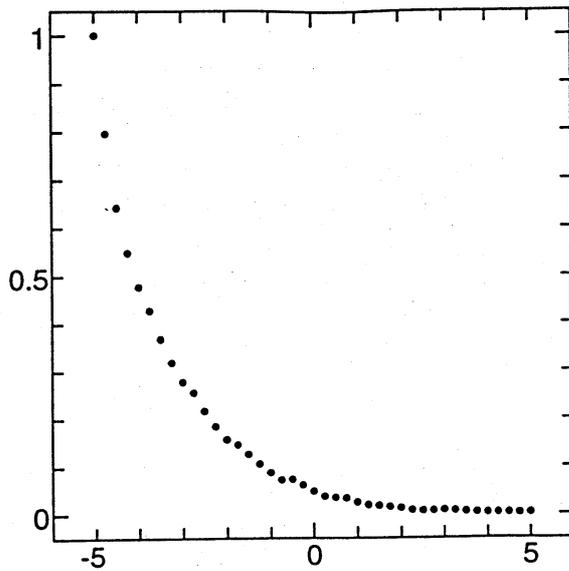


図 3

ドロミオンの進行方向とステップの方向が平行な場合の変数 A の最大波高の時間変化。底面が平らである時の最大波高で規格化してある。

その次に、ステップがドロミオンの進行方向に対して直角に横たわっている場合を考えた ($K_1 = K_2 = 0.4$)。この場合、外力の強さを与えるパラメタ κ を $\kappa = -0.5, -0.1, -0.01$ と変化させた。その時の A の最大振幅のグラフと表面プロットが図 4, 5 に与えられている。図 4 からは、ドロミオンが時刻 $t = 0$ 付近 (ステップを通過するあたり) で減衰し、その前後では最大振幅に目立った変化がないこと、図 5 からは、摂動を受ける前後ではドロミオンは極在した構造を保ち続けることがわかる。

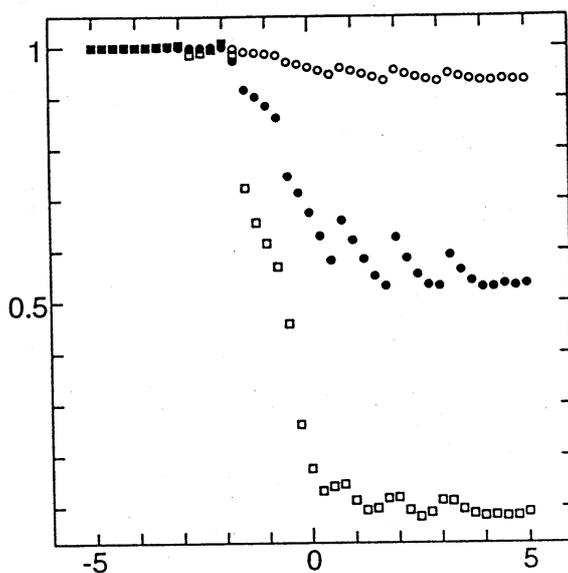


図 4

ドロミオンの進行方向とステップの方向が直角な場合の変数 A の最大波高の時間変化。図 3 と同様の規格化を行なった。

- : $\kappa = -0.5$
- : $\kappa = -0.1$
- : $\kappa = -0.01$

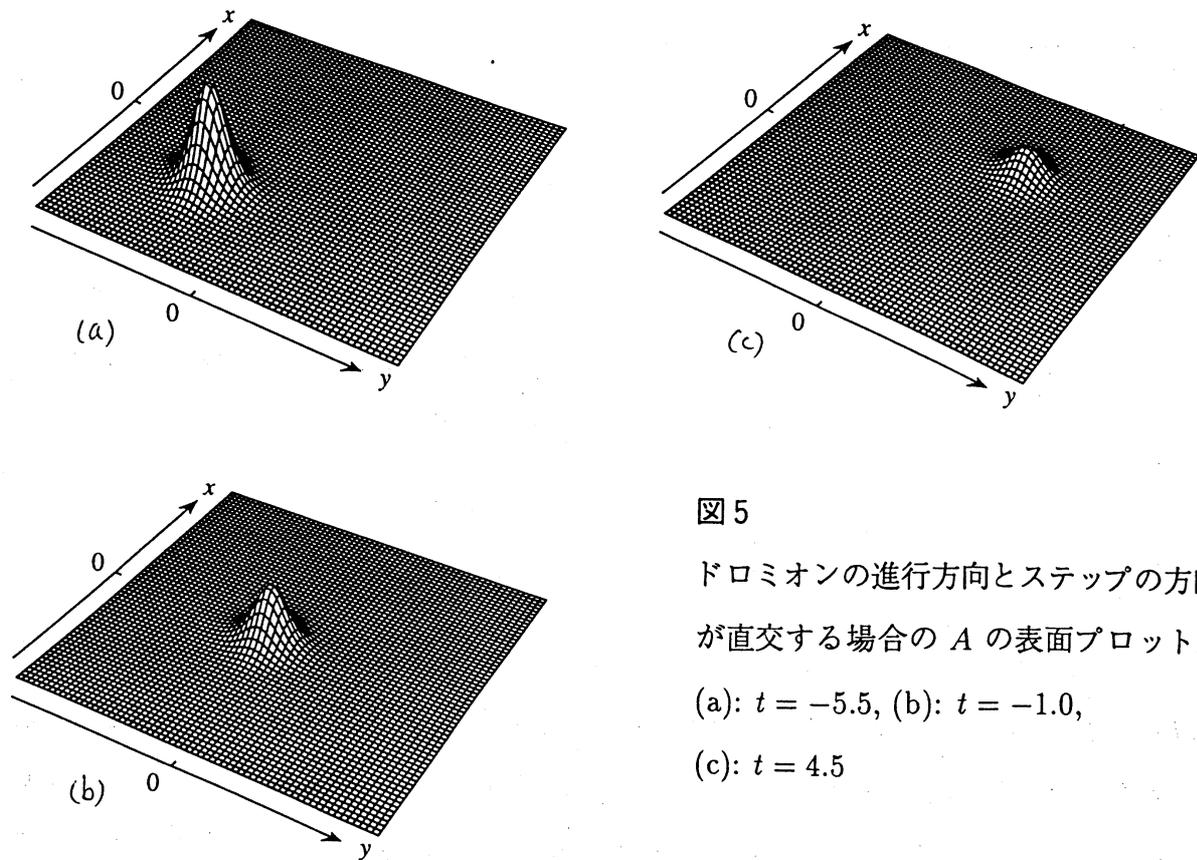


図 5

ドロミオンの進行方向とステップの方向が直交する場合の A の表面プロット。

(a): $t = -5.5$, (b): $t = -1.0$,

(c): $t = 4.5$

4. 結論

本稿では、高次元の中での極在構造を持つ系である、Davey-Stewartson I 方程式をとりあげ、その摂動について考察した。また、方程式の外力項の効果などについて調べるため、流体系を使ってモデル方程式を求め、数値計算によりドロミオンの摂動安定性について調べた。その結果、第一に、多少の波形の乱れに対してはドロミオンは安定であること、第二に、外力が加えられているうちはドロミオンは変形するが、それが取り除かれると再び局所構造としての安定性を保って伝播することがわかった。以上のことにより、ドロミオンは二次元の局所構造として安定なものであると結論づけられよう。

極在構造の持つこのような安定性をどのように解釈したらよいのだろうか? 筆者たちは、DS1 方程式系において、ドロミオン同士の衝突の数値的な研究を行ってきた。それによると、1-ドロミオン同士の衝突において、衝突後は平均流の各交点に一つのパルスが出現し、パルスの個数の保存が成り立っていないことがわかった。これは、第1節でも強調したように、平均流が DS1 方程式の第一式においてポテンシャルの役割を果たしていることを用い

で説明できる¹⁰⁾。同様の解釈を第三の数値計算によって得られた結果について行なってみたい。たとえば、図4, 5に対応する場合、ドロミオンの進行方向と底面のステップは互いに直交している。第二節で方程式を導くのに用いた流体の系では、 $\kappa < 0$ のときは、ドロミオンが進むにつれて流体の深度が深くなっていくことになる。平均流 U, V は最低次の量として速度ポテンシャルの一階微分を含むから、ドロミオンがステップを通過した後では、質量保存により小さくなるであろう。平均流のポテンシャルとしての働きを考えると、これは引力ポテンシャルが減少することを示す。つまり、 A の極在構造を保つ力が弱くなる。したがって、極在構造が減衰するものであると思われる。

このように考えていくと、ドロミオンという極在構造を保つために平均流の重要性が強調されるべきものであることがわかると思う。変数 A が多少の変形を受けても、ポテンシャルが A の吸引点としての役割を果たす限り極在構造は保たれることになるだろう。逆にいえば、二次元以上においては、このように極在構造を保つような力を外から加え続けなければ、安定な構造は得られないのである。

以上のように、ドロミオンの摂動安定性について、数値計算によってある程度の知見を得ることができた。二次元の極在構造については解析的にも、数值的にもさまざまな問題が残されていて興味深い。とくに、ここで扱ったような、厳密解からずれた場合の問題についてはなされるべきことがいろいろあるが、それらについては今後の研究の発展が待たれる。

最後に、いろいろと有益なコメントをお寄せ下さった愛媛大の飯塚剛博士に感謝致します。

References

- 1) A. Davey and K. Stewartson: Proc. Roy. Soc. London Ser. A **338** (1974) 101.
- 2) M. Boiti, J. J.-P. Leon, L. Martina and F. Pempinelli: Phys. Lett. A **132** (1988) 432.
- 3) A. S. Fokas and P. M. Santini: Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 1329.
- 4) J. Hietarinta and R. Hirota: Phys. Lett. A **145** (1990) 237.
- 5) O. S. Madson and C. C. Mei: J. Fluid Mech. **39** (1969) 781.
- 6) T. Kakutani: J. Phys. Soc. Jpn. **30** (1971) 272.

- 7) N. Asano and H. Ono: J. Phys. Soc. Jpn. **31** (1971) 1830.
- 8) T. Iizuka and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) 1159.
- 9) T. Yajima and K. Nishinari: to appear in J. Phys. Soc. Jpn. **64** No. 3 (1995).
- 10) K. Nishinari and T. Yajima: J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 3538; to appear in Phys. Rev. E.