数理解析研究所講究録
909 巻 1995 年 41-50



# 指標と不変固有超関数

三上俊介（福井医科大学）
Shunsuke Mikami

Harish-Chandra, 平井ほかにより展開された半単純リー群の指標の理論のうち, 同じ infinitesimal character をもつどのくらいあるか, またある条件をみたす既約指標を具体的に書き表す方法などを $Sp(2,\mathbb{R})$ の場合を主に説明する。

$G$ を線形実半単純 Lie 群（具体的に記述するときは $Sp(2,\mathbb{R})$）とし, $\mathfrak{g}$ で $G$ の Lie 環, $\mathfrak{g}_c$ でその複素化を表す。 $\det(t+1-\mathrm{Ad}(x))=\sum D_i(x)t^i \quad (x\in G)$ とし 恒等的には 0 とならない $D_i$ のなかで最小の $i$ を $\ell$ とおく。 $x\in G$ が $D_\ell(x)\neq 0$ をみたすとき $x$ は regular とよび, $G$ の regular な元全体を $G'$ で表す。

## 1 積分公式

$T$を $G$ の Cartan 部分群, $\mathfrak{t}$ をその Lie 環, $T'=G'\cap T$ とし,

$$G_{T'}=\bigcup_{g\in G} gT'g^{-1}$$

とおく。 $(G,T)$ の Weyl 群を $W(G,T)\,(=N_G(T)/T)$ で表し, 写像 $\phi$ を

$$\phi: G/T\times T'\to G_{T'},$$
$$(\dot g,\quad t)\longrightarrow gtg^{-1}(={}^{\dot g}t)$$

と定義する。 $\phi$ は $|W(G,T)|$* 対 1 の対応になり, $p_0=(\dot g_0,t_0)\in G/T\times T'$ とすると, $|\det(d\phi)_{p_0}|=|\det(\mathrm{Ad}(t_0^{-1})-1)_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}|$ となる。 ゆえに測度を適当に normalise すれば $f\in C_c(G_{T'})$ に対して

(1) $$\int_{G_{T'}} f(x)dx=\frac{1}{|W(G,T)|}\int_T |\det(\mathrm{Ad}(t^{-1})-1)_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}|\int_{G/T} f({}^{\dot g}t)d\dot g\,dt.$$

いま $(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ に関するルート系を $\Sigma=\Sigma(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$, 正のルートの全体を $\Sigma^+$, $\alpha\in\Sigma$ に対してルートベクトル $X_\alpha\in{\mathfrak{g}_c}^\alpha$ を選び

$$\mathrm{Ad}(t)X_\alpha=\xi_\alpha(t)X_\alpha$$

となるように $T$上の character $\xi_\alpha$ を定義する。 また $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$ とし "acceptable" という仮定の下で Weyl の denominator を

(2) $$\Delta_{\mathfrak{t}}(t)=\xi_\rho(t)\prod_{\alpha\in\Sigma^+}(1-\xi_\alpha(t)^{-1}),\qquad t\in T$$

*$|E|$ は集合 $E$ の元の数である。

と定義すると,

$$|\det(\mathrm{Ad}(t^{-1})-1)_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}| = |\Delta_{\mathfrak{t}}(t)|^2$$

が成り立つ。$G$ の互いに $G$-共役でない Cartan 部分群の代表系を $T_1, \cdots, T_k$ とすると $G' = \bigcup_{i=1}^k G_{T_i'}$ (disjoint) となり, $G \setminus G'$ は測度 0 だから

$$\int_G f(x)dx = \sum_{i=1}^k \frac{1}{|W(G,T_i)|} \int_{T_i} |\Delta_i(t)|^2 \int_{G/T_i} f({}^{\dot{g}}t)d\dot{g}\,dt \tag{3}$$

となる。 ただし $\Delta_i = \Delta_{\mathfrak{t}_i}$ である。

## 2 不変固有超関数

$\pi$ を $G$ のヒルベルト空間上の quasi-simple 既約表現とする。$f \in C_c^\infty(G)$ に対し, $\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)dx$ とおくと, $\pi(f)$ は trace class の作用素になる。 そこで $\Theta_\pi(f) = \mathrm{Tr}(\pi(f))$ とおくと, $\Theta_\pi$ は $G$ 上の超関数になる。これを表現 $\pi$ の指標という。 このとき $\Theta_\pi$ は次の性質を満たす。

$$\begin{aligned} &1)\quad \Theta_\pi(f) = \Theta_\pi(f^g), \qquad {}^\forall g \in G, {}^\forall f \in C_c^\infty(G) \\ &2)\quad Z \cdot \Theta_\pi = \lambda(Z)\Theta_\pi, \qquad {}^\forall Z \in \mathfrak{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

ここに $f^g(x) = f(gxg^{-1})$ であり, $\mathfrak{Z}$ は $\mathfrak{g}_c$ の展開環の中心, $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(\mathfrak{Z}, \mathbb{C})$ (infinitesimal character) である。

一般に上の 1), 2) を満たす $G$ 上の超関数全体を $\mathfrak{A}(\lambda)$ と書き, $\mathfrak{A}(\lambda)$ の元を infinitesimal character $\lambda$ をもつ不変固有超関数という。 これに関し Harish-Chandra は次の基本的結果を示した。

**Theorem 1** ([3]) $\Theta \in \mathfrak{A}(\lambda)$ とする。このとき $\Theta$ は $G$ 上の局所可積分関数で $G'$ 上実解析的である。

以後, $\Theta$ に対応する $G'$ 上の解析的関数を $\Theta'$ と書く。(4) の 1),2) より

$$\begin{aligned} &1)'\quad Z \cdot \Theta' = \lambda(Z)\Theta', \qquad {}^\forall Z \in \mathfrak{Z}, \\ &2)'\quad \Theta'(gxg^{-1}) = \Theta'(x), \qquad {}^\forall x \in G', {}^\forall g \in G \end{aligned}$$

が成立する。

## 3 微分作用素の radial component

$G$ は $G_{T'}$ 上に conjugation: $G'_{T'} \ni x \mapsto gxg^{-1}$ で作用する。 $f \in C^\infty(G_{T'})$ が $G$-不変であれば, $X \in U(\mathfrak{g}_c)$ に対し $X$ の radial component とよばれる $T'$ 上の微分作用素 $R(X)$ が存在する。 すなわち,

$$\widetilde{(Xf)} = R(X)\tilde{f}, \qquad \tilde{f} = f_{\,|T'}.$$

さて, $S(\mathfrak{t}_c)$ を $\mathfrak{t}_c$ の symmetric algebra, $W(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ で $(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ の Weyl 群, $I(\mathfrak{t}_c)$ で $S(\mathfrak{t}_c)$ の $W(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$-不変な元の全体とする。 $\mathfrak{Z}$ の元の radial component は Harish-Chandra 同型 $\gamma:\ \mathfrak{Z}\longrightarrow I(\mathfrak{t}_c)$ を用いて次のように表せる。

**Theorem 2** ([3]) $Z\in\mathfrak{Z}$ に対し, $R(Z)=\Delta_{\mathfrak{t}}^{-1}\circ\gamma(Z)\circ\Delta_{\mathfrak{t}}$ となる。

$\lambda\circ\gamma^{-1}$ は $I(\mathfrak{t}_c)$ から $\mathbb{C}$ への環準同型だから, $\mathfrak{t}_c^*$ の元 $\mu$ で $\lambda\circ\gamma^{-1}(D)=\mu(D)$ $({}^\forall D\in I(\mathfrak{t}_c))$ をみたすものが存在し, それらは Weyl 群 $W(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ による orbit を除いて一意的に定まる。

ここで Cartan 部分群 $T$ 上の関数をいくつか導入しよう。

(5)
$$\varepsilon_{\mathfrak{t},R}(t)=\mathrm{sgn}\{\prod_{\substack{\alpha\in\Sigma^+\\ \mathrm{real}}}(1-\xi_\alpha(t)^{-1})\},$$
$$\tilde{\kappa}_{\mathfrak{t}}(t)=\Delta_{\mathfrak{t}}(t)\Theta'(t),$$
$$\kappa_{\mathfrak{t}}(t)=\varepsilon_{\mathfrak{t},R}(t)\tilde{\kappa}_{\mathfrak{t}}(t).$$

（註: $\Delta,\varepsilon,\tilde{\kappa},\kappa$ の下添え字 $\mathfrak{t}$ は混乱が生じないときは省略する。）

このとき次の命題が成り立つ。

**Proposition 3** ([6]) $\tilde{\kappa}$ および $\kappa$ は次の性質をみたす。

1) $D\tilde{\kappa}_{\mathfrak{t}}=\mu(D)\tilde{\kappa}_{\mathfrak{t}},\quad \kappa_{\mathfrak{t}}=\mu(D)\kappa_{\mathfrak{t}}\quad {}^\forall D\in I(\mathfrak{t}_c),$

2) $\tilde{\kappa}_{\mathfrak{t}}({}^wt)=\epsilon(w)\tilde{\kappa}_{\mathfrak{t}}(t),\quad \kappa_{\mathfrak{t}}({}^wt)=\epsilon(w,t)\kappa_{\mathfrak{t}}(t),\quad {}^\forall w\in W(G,T),$

3) $\Theta(f)=\sum_{i=1}^{k}c_i\int_{T_i}K_f^i(t)\kappa_i(t)dt.$

ここに $\epsilon$ はそれぞれ $\Delta({}^wt)=\epsilon(w)\Delta(t)$, $(\varepsilon_R\cdot\Delta)({}^wt)=\epsilon(w,t)(\varepsilon_R\cdot\Delta)(t)$ により定まる符号関数であり, $K_f^i(t)$ は軌道積分を用いて

$$K_f^i(t)=\varepsilon_{i,R}(t)\overline{\Delta_i(t)}\int_{G/T_i}f({}^{\dot g}t)d\dot g$$

と定義される $T_i$ 上の関数である。

1) については, Theorem 2 より

$$(Z\cdot\Theta')_{|T'}=R(Z)\Theta_{|T'}=\Delta^{-1}\circ\gamma(Z)\circ\Delta\Theta'_{|T'}=\lambda(Z)\Theta'_{T'}$$

が成り立つので $\gamma(Z)\tilde{\kappa}=\lambda(Z)\tilde{\kappa}$ が導ける。 $\gamma(Z)=D$ とおけば 1) を得る。
2) は $\Theta'$ の不変性より直ちにわかる。
3) は積分公式 (3) および $\Theta'$ の不変性より導ける。

さて $T'(R)=\{t\in T;\ \xi_\alpha(t)\neq 1\quad {}^\forall\,\text{real root }\alpha\text{ of }(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)\}$ とおく。

**Proposition 4** ([6]) $\kappa_{\mathfrak{t}},\tilde{\kappa}_{\mathfrak{t}}$ はいずれも $T'(R)$ 上の解析的関数に拡張できる。 さらに $\kappa_{\mathfrak{t}}$ は $T$上の連続関数に拡張できる。

$T'(R)$ の連結成分を $F$ とし, $a_0 \exp H \in F$ $(H \in \mathfrak{t})$ とする。 Proposition 3 の 1) および Proposition 4 より

$$\tilde{\kappa}_{\mathfrak{t}}(a_0 \exp H) = \sum_{w \in W} p_w(a_0, H) \exp(w\mu(H)) \tag{6}$$

ここに $p_w(a_0, H)$ は $H \in \mathfrak{t}$ 上の多項式であり $W = W(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ である。 特にすべての $p_w$ が定数であるとき (例: $\mu$ が regular なときなど), $\Theta$ を定数係数の不変固有超関数とよぶ。

**Theorem 5** ([1],[10]) 1) 既約指標は定数係数の不変固有超関数である。
2) 定数係数の不変固有超関数は既約指標の 1 次結合で表せる。

以後は $Sp(2,\mathbb{R})$ の定数係数の不変固有超関数について考察する。

# 4 $Sp(2,\mathbb{R})$ の Cartan 部分群と離散系列表現

$G = Sp(2,\mathbb{R}) = \{g \in SL(4,\mathbb{R});\ {}^t gJg = J\}$ とする。 ここに, $J = \begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix}$ で $1_2$ は $2 \times 2$ の単位行列を表す。 $Sp(2,\mathbb{R})$ の Cartan 部分群と Cartan 部分環の代表系として次のように選ぶ。

$$T_{20} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & & \sin\phi_1 & \\ & \cos\phi_2 & & \sin\phi_2 \\ -\sin\phi_1 & & \cos\phi_1 & \\ & -\sin\phi_2 & & \cos\phi_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{t}_{20} = \left\{ H = \begin{pmatrix} & & \phi_1 & \\ & & & \phi_2 \\ -\phi_1 & & & \\ & -\phi_2 & & \end{pmatrix} \right\},$$

$$T_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 e^{t_1} & & & \\ & \cos\phi_2 & & \sin\phi_2 \\ & & \varepsilon_1 e^{-t_1} & \\ & -\sin\phi_2 & & \cos\phi_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{t}_{10} = \left\{ H = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & & & \phi_2 \\ & & -t_1 & \\ & -\phi_2 & & \end{pmatrix} \right\},$$

$$T_{01} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & & \\ & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\tau} & & & \\ & e^{\tau} & & \\ & & e^{-\tau} & \\ & & & e^{-\tau} \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{t}_{01} = \left\{ H = \begin{pmatrix} \tau & \theta & & \\ -\theta & \tau & & \\ & & -\tau & \theta \\ & & -\theta & -\tau \end{pmatrix} \right\},$$

$$T_{00}=\left\{\begin{pmatrix}\varepsilon_1 e^{t_1} & & & \\ & \varepsilon_2 e^{t_2} & & \\ & & \varepsilon_1 e^{-t_1} & \\ & & & \varepsilon_2 e^{-t_2}\end{pmatrix}\right\},\qquad \mathfrak{t}_{00}=\left\{H=\begin{pmatrix}t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & -t_1 & \\ & & & -t_2\end{pmatrix}\right\}.$$

($\varepsilon_1=\varepsilon_2=\pm 1$ であり, その他の変数は実数の値をとる。)

各 $T$に対し $x_1$, $x_2$を次のように定める。

$$(7)\qquad T_{20}:\begin{cases}x_1 &=\sqrt{-1}\phi_1\\ x_2 &=\sqrt{-1}\phi_2\end{cases}\quad T_{10}:\begin{cases}x_1 &=t_1\\ x_2 &=\sqrt{-1}\phi_2\end{cases}$$

$$T_{01}:\begin{cases}x_1 &=\tau+\sqrt{-1}\theta\\ x_2 &=\tau-\sqrt{-1}\theta\end{cases}\quad T_{00}:\begin{cases}x_1 &=t_1\\ x_2 &=t_2\end{cases}$$

$\mu\in\mathfrak{t}^*(=\mathfrak{t}_{ij}^*)$ が $\mu(H)=\sum_{i=1}^{2}\ell_i x_i$ であるとき $\mu=(\ell_1,\ell_2)$ と書き表す。 同じ infinitesimal character $\lambda$ に対応する $\mu$ ではすべての Cartan 部分環 $\mathfrak{t}_{ij}$ に対し, 同じ $\ell_1,\ell_2$で表せる。

$e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ とおくと, $(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ のルート系 $\Sigma$ は $\Sigma=\{\pm 2e_i\,(i=1,2)\,,\pm e_1\pm e_2\}$ となる。 そして $\Sigma^+=\{2e_i\,(i=1,2),\ e_1\pm e_2\}$ と定めておく。また, $W(G,T_{20})\cong\{1,s_\alpha\}\subseteq W(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ と同一視できる。 ここに $\alpha=e_1-e_2$ であり, $s_\alpha$ は $\alpha$ に関する鏡映である。$W(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ の $W(G,T_{20})$ による左剰余類の代表系を $\omega_1=1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ とすれば, $\mu=(\ell_1,\ell_2)$ が regular integral のとき $H\in\mathfrak{t}_{20}$ に対し

$$(8)\qquad \tilde{\kappa}_{20}(\exp H)=\sum_{i=1}^{4}\{\exp(\omega_i\mu(H)-\exp(s_\alpha\omega_i\mu(H))\}$$
$$=\sum_{\nu_i=\pm1}c_{\nu_1\nu_2}\begin{vmatrix}\delta_1^{\nu_1\ell_1} & \delta_1^{\nu_2\ell_2}\\ \delta_2^{\nu_1\ell_1} & \delta_2^{\nu_2\ell_2}\end{vmatrix}$$

と表せる。 ただし, $\delta_i=e^{x_i}\quad(i=1,2)$ である。

**Theorem 6** ([4]) $\ell_1>\ell_2>0$ なる整数とし, $\nu_i=\pm1$ とする。 このとき, $Sp(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現（２乗可積分表現）$\pi_{\lambda,\nu_1,\nu_2}$ で, その指標 $\Theta_{\lambda,\nu_1,\nu_2}$ が $T_{20}$ 上

$$(9)\qquad \tilde{\kappa}_{20}(\exp H)=\Delta\cdot\Theta'_{\lambda,\nu_1,\nu_2}(\exp H)=-\nu_1\nu_2\begin{vmatrix}\delta_1^{\nu_1\ell_1} & \delta_1^{\nu_2\ell_2}\\ \delta_2^{\nu_1\ell_1} & \delta_2^{\nu_2\ell_2}\end{vmatrix}$$

となるものが存在する。

(註 $\nu_1=\nu_2=1$ のときが holomorphic な離散系列になる。)

## 5 隣接する Cartan 部分群上での境界条件

Cartan 部分群 $A$ と $B$ について $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の real root $\alpha$ に関する Cayley 変換 $\nu_\alpha$ により $\mathfrak{b} = \mathfrak{g} \cap \nu_\alpha(\mathfrak{a}_c)$ となっている場合を考える。$A'(R)$, $B'(R)$ の連結成分 $F_A$, $F_B$ をその閉包の共通部分 $\overline{F}_A \cap \overline{F}_B$ が $G$ の semi-regular な元を含むように選ぶ。$\Sigma^+(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{b}_c) = \nu_\alpha(\Sigma^+(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c))$ となるように正のルートを定めておく。 このとき semi-regular な $t_0 \in \overline{F}_A \cap \overline{F}_B$ に関し次の境界条件が成り立つ。

$$\frac{d\tilde{\kappa}_{\mathfrak{a}}}{dt}(t_0 \exp tH_\alpha)_{|t=0} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{d\tilde{\kappa}_{\mathfrak{b}}}{dt}(t_0 \exp t\sqrt{-1}H_\beta)_{|t=0} \tag{10}$$

ここに $\beta$ は $\beta(X) = \alpha(\nu_\alpha^{-1}(X))$ となる $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{b}_c)$ のルートであり, $H_\alpha$, $H_\beta$ は Killing form によりそれぞれのルートに対応する $\mathfrak{a}$, $\sqrt{-1}\mathfrak{b}$ の元である。 ただし, 左辺は $F_A$ からの極限値を考える。 $Sp(2, \mathbb{R})$ の場合 $T_{20}$ と $T_{10}$, $T_{10}$ と $T_{00}$, $T_{20}$ と $T_{01}$, $T_{01}$ と $T_{00}$ の間で上の境界条件が成り立つことになる。

## 6 不変固有超関数の height

一般の半単純 Lie 群 $G$ に関し, その Cartan 部分群 $A$ と $G$-共役なもの全体を $[A]$ で表す。$[A]$ と $[B]$ について適当な $g \in G$ により $\mathfrak{b} = \mathrm{Ad}(g)\{\mathfrak{g} \cap \nu_\alpha(\mathfrak{a}_c)\}$ となるとき $[A] < [B]$ と書く。 この関係 $<$ を推移的に延長して $G$ の Cartan 部分群の共役類全体 $\mathrm{Car}(G)$ 上に順序関係が導入される。$Sp(2, \mathbb{R})$ の場合 $[T_{00}] < [T_{10}] < [T_{20}]$ および $[T_{00}] < [T_{01}] < [T_{20}]$ である。$G$ 上の不変固有超関数 $\Theta$ に対して

$$\mathrm{Supp}(\Theta) = \{[T] \in \mathrm{Cal}(G);\ \Theta'_{|T'} \neq 0\},$$

とおき, $\mathrm{Supp}(\Theta)$ の中で maximal なものを $\Theta$ の height と呼ぶ。 そして height がただ 1 つの Car(G) の元からなるとき $\Theta$ は extremal という。

**Theorem 7** ([6]) $[T]$ を $\Theta$ の height とする。 このとき $\kappa_{\mathfrak{t}}$ は $T$ 上解析的である。

いま

$$\mathfrak{B}(T, \mu) = \left\{ f \in C^\infty(T);\ \begin{array}{ll} 1) & f({}^w t) = \epsilon(w, t) f(t) \quad {}^\forall w \in W(G, T) \\ 2) & Df = \mu(D) f \quad {}^\forall D \in I(\mathfrak{t}_c) \end{array} \right\} \tag{11}$$

とおくと, Theorem 7 は $\kappa_{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{B}(T, \mu)$ と書ける。$\mathfrak{B}(T, \mu) \neq \{0\}$ のとき, この定理の逆が成り立つことも平井により示されている。

**Theorem 8** ([7]) Harish-Chandra 同型により $\mu \in \mathfrak{t}^*$ が $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(\mathfrak{Z}, \mathbb{C})$ に対応しているとする。$\mathfrak{B}(T, \mu) \ni \varphi \neq 0$ に対し, 次の条件をみたす extremal な $\Theta \in \mathfrak{A}(\lambda)$ が存在する。

1) $\Theta$の height $= \{[T]\}$,
2) $\varepsilon_{\mathfrak{t},R} \cdot \Delta_{\mathfrak{t}} \cdot \Theta'_{|T'} = \varphi$.

この標準的な不変固有超関数の構成法から一次独立性が示せて

$$\dim \mathfrak{A}(\lambda) = \sum_{[T]} \dim \mathfrak{B}(T, \mu) \tag{12}$$

であることがわかる。$G = Sp(2, \mathbb{R})$ で infinitesimal character $\lambda$ に対応する $\mu = (\ell_1, \ell_2)$ が integral で $\ell_1 > \ell_2 > 0$ のとき, 各 $\mathfrak{B}(T_{ij}, \mu)$ の次元は次のように計算できる。 各 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{ij}$ に対し $W = W(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ とすると, まず $\dim \mathfrak{B}(T_{20}, \mu) = |(W/W(G, T_{20}))| = 4$ であることがわかる。 次に $W(G, T_{01}) \cong \{1, s_{e_1-e_2}, s_{e_1+e_2}, s_{e_1-e_2}s_{e_1+e_2}\}$ だから, $\dim \mathfrak{B}(T_{01}, \mu) = |(W/W(G, T_{01}))| = 2$ を得る。$T_{10}, T_{00}$ の連結成分を次のように与える。

$$T_{10}^0 = \{t \in T_{10};\ \varepsilon_1 = 1\}, \quad T_{10}^1 = \{t \in T_{10};\ \varepsilon_1 = -1\},$$
$$T_{00}^0 = \{t \in T_{00};\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1\}, \quad T_{00}^1 = \{t \in T_{00};\ \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1\},$$
$$T_{00}^2 = \{t \in T_{00};\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1\}$$

一般に $G$ の部分集合 $F$ に対して $W(G, F)$ を $gFg^{-1} \subseteq F$ をみたす $g \in G$ により引きおこされる $F$ の変換全体と定義する。 $T_{ij}^k$ に関し

$$\mathfrak{B}(T_{ij}^k, \mu) = \left\{ f \in C^\infty(T_{ij}^k);\ \begin{array}{ll} 1) & f({}^w t) = \epsilon(w, t) f(t) \quad {}^\forall w \in W(G, T_{ij}^k) \\ 2) & Df = \mu(D) f \quad {}^\forall D \in I((\mathfrak{t}_{ij})_c) \end{array} \right\} \tag{13}$$

とおく。 $\dim \mathfrak{B}(T_{ij}, \mu) = \sum_k \dim \mathfrak{B}(T_{ij}^k, \mu)$ であり, $|(W/W(G, T_{ij}^k))| = \dim \mathfrak{B}(T_{ij}^k, \mu)$ なので

$$\mathfrak{B}(T_{10}, \mu) = 4 + 4 = 8, \quad \mathfrak{B}(T_{00}, \mu) = 1 + 2 + 1 = 4 \tag{14}$$

となる。 ゆえに同じ infinitesimal character $\lambda$ (対応する $\mu$ は $(\ell_1, \ell_2)$) をもつ既約指標は 18 個あることがわかる。

## 7 緩増加な指標

$\mathcal{C}(G)$ で $G$ 上の急減少関数の全体とし, $G$ 上の不変固有超関数 $\Theta$ が $\mathcal{C}(G)'$ の元に拡張できるとき $\Theta$ は緩増加は超関数という。 特に $\lambda$ が regular なときは

$$\sup_{x \in G'} |\Theta'(x)||D_\ell(x)|^{\frac{1}{2}} < \infty$$

が成り立つことと同値である。 緩増加の条件を Cartan 部分群上で記述するために記号を用意する。$K$ を $G$ の極大コンパクト部分群, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $G \ni g = k \exp X \quad (k \in K,\ X \in \mathfrak{p})$ とする。 $B$ を $\mathfrak{g}$ の Killing form とし, $\sigma(g) = B(X, X)^{\frac{1}{2}}$ と定義する。さて,

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\lambda) = \{\Theta \in \mathfrak{A}(\lambda);\quad \Theta \text{は緩増加である}\}, \tag{15}$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}(T, \mu) = \{f \in \mathfrak{B}(T, \mu);\quad {}^\exists s \geq 0 \quad \sup_{t \in T'} |1 + \sigma(t)|^{-s} |f(t)| < \infty\}, \tag{16}$$

とおく。 緩増加の場合にも平井により次の結果が得られている。

**Theorem 9** ([7]) Harish-Chandra 同型により $\mu \in \mathfrak{t}^*$ が $\lambda \in \mathrm{Hom_{alg}}(\mathfrak{Z}, \mathbb{C})$ に対応しているとする。$\mu \in \mathfrak{t}^*$ が regular で $\widetilde{\mathfrak{B}}(T,\mu) \neq \{0\}$ と仮定する。 このとき, $\varphi \in \mathfrak{B}(T,\mu)$ に対して次の条件をみたす extremal な $\Theta \in \widetilde{\mathfrak{A}}(\lambda)$ がただ 1 つ存在する。

1) $\Theta$の height $= \{[T]\}$,

2) $\varepsilon_{\mathfrak{t},R} \cdot \Delta_{\mathfrak{t}} \cdot \Theta'_{|T'} = \varphi$.

このことは $\Theta$ の height 上での値がわかると境界条件と緩増加の条件よりすべての Cartan 部分群上での $\Theta$ の形が決定されることを意味する。($\mu$ の regularity の条件はもう少しゆるめることができる。) 従って離散系列表現(Theorem 6)の指標の形をすべての Cartan 部分群上で順次決定できる。 具体的には 4 章で記述した $t$ に対し次の形をしている。([8])

$$T_{20}: \quad \Delta \cdot \Theta_{\lambda,\nu_1,\nu_2} = \tilde{\kappa}_{20}(t) = -\begin{vmatrix} \nu_1\delta_1^{\nu_1\ell_1} & \nu_2\delta_1^{\nu_2\ell_2} \\ \nu_1\delta_2^{\nu_1\ell_1} & \nu_2\delta_2^{\nu_2\ell_2} \end{vmatrix} \quad (\delta_i = e^{x_i})$$

$$T_{10}: \quad \Delta \cdot \Theta_{\lambda,\nu_1,\nu_2} = \tilde{\kappa}_{10}(t) = -\begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & -\delta_1^{-\ell_2} \\ \nu_1\delta_2^{\nu_1\ell_1} & \nu_2\delta_2^{\nu_2\ell_2} \end{vmatrix} \quad (\delta_1 = \varepsilon_1 e^{x_1},\ \delta_2 = e^{x_2},\ t_1 > 0)$$

$$T_{01}: \quad \Delta \cdot \Theta_{\lambda,\nu_1,\nu_2} = \tilde{\kappa}_{01}(t) = -\begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & \nu_1\nu_2\delta_1^{-\nu_1\nu_2\ell_2} \\ -\delta_2^{-\ell_1} & \nu_1\nu_2\delta_2^{-\nu_1\nu_2\ell_2} \end{vmatrix} \quad (\delta_i = e^{x_i},\ \tau > 0)$$

$$T_{00}: \quad \Delta \cdot \Theta_{\lambda,\nu_1,\nu_2} = \tilde{\kappa}_{00}(t) = -\begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & -\delta_1^{-\ell_2} \\ -\delta_2^{-\ell_1} & -\nu_1\nu_2(\delta_2^{-\ell_2} + \delta_2^{\ell_2}) + \delta_2^{\ell_2} \end{vmatrix}$$
$$(t \in T_{00}^0 \text{ または } T_{00}^2,\ \delta_i = \varepsilon_i e^{x_i},\ t_1 > t_2 > 0)$$
$$= -\begin{vmatrix} \delta_1^{-\ell_1} & \delta_1^{-\ell_2} \\ \delta_2^{-\ell_1} & \delta_2^{-\ell_2} \end{vmatrix} \quad (t \in T_{00}^1,\ \delta_i = \varepsilon_i e^{x_i},\ t_1 > 0, t_2 > 0)$$

一例として $\tilde{\kappa}_{10}$ の場合を考える。 $t = \exp X \in T_{10}^0 \quad (t_1 > 0)$ とし, $W = W(\mathfrak{g}_c, (\mathfrak{t}_{10})_c)$ とおく。

$$\tilde{\kappa}_{10}(t) = \sum_{w \in W} b_w e^{w\mu(X)} \tag{17}$$

に対し $W(G, T_{10})$ に関する不変性, および緩増加の条件より

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{10}(t) &= b_0 \exp(-\ell_1 x_1 + \ell_2 x_2) + b_1 \exp(-\ell_1 x_1 - \ell_2 x_2) \\ &\quad + b_2 \exp(-\ell_2 x_1 + \ell_1 x_2) + b_3 \exp(-\ell_2 x_1 - \ell_1 x_2) \\ &= b_0 \delta_1^{-\ell_1}\delta_2^{\ell_2} + b_1 \delta_1^{-\ell_1}\delta_2^{-\ell_2} + b_2 \delta_1^{-\ell_2}\delta_2^{\ell_1} + b_3 \delta_1^{-\ell_2}\delta_2^{-\ell_1}. \end{aligned} \tag{18}$$

ここで $T_{10}$ と $T_{20}$ で境界条件を適用する。 $\alpha = 2e_1,\ \beta = \nu_\alpha(\alpha)$ とする。

$$\frac{d\tilde{\kappa}_{10}}{dt}(t_0 \exp tH_\alpha)_{|t=0} = -b_0\ell_1\delta_2^{\ell_2} - b_1\ell_1\delta_2^{-\ell_2} - b_2\ell_2\delta_2^{\ell_1} - b_3\ell_2\delta_2^{-\ell_1} \tag{19}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d\tilde{\kappa}_{20}}{dt}(t_0 \exp t\sqrt{-1}H_\beta)_{|t=0} = -\nu_2\ell_1\delta_2^{\nu_2\ell_2} + \nu_1\ell_2\delta_2^{\nu_1\ell_1} \tag{20}$$

ここに, $t_0$ は次の形の semi-regular な元である。

$$t_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\varphi_2 & & \sin\varphi_2 \\ & & 1 & \\ & -\sin\varphi_2 & & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}.$$

$\varphi_2$ は任意 ($\neq \pm n\pi$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$) だから係数 $b_i$ が定まり, $T_{10}^0$ 上で

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{10}(t) &= \nu_2\delta_1^{-\ell_1}\delta_2^{\nu_2\ell_2} - \nu_1\delta_1^{-\ell_2}\delta_2^{\nu_1\ell_1} \\ &= -\begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & -\delta_1^{-\ell_2} \\ \nu_1\delta_2^{\nu_1\ell_1} & \nu_2\delta_2^{\nu_2\ell_2} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

が導ける。 他の場合も 1 つもしくは 2 つの境界条件を用いることにより結果を得る。

# 8 regular な緩増加既約表現の構成法

Cartan involution を $\theta$ とし, $\theta$-不変な Cartan 部分群 $T = (T \cap K)A$ に対し, $A$ の $G$ における centralizer を $MA$ とし $P = MAN$を $P_0$ (極小放物型部分群) を含む cuspidal 放物型部分群とする。 このとき $T \cap K$ は $M$ の compact Cartan 部分群となる。$\sigma$ を $M$ の離散系列の表現, $e^\nu$ を $A$ ユニタリな一次元表現として, $P$ から誘導表現

$$\pi_{P,\sigma,\nu} = \mathrm{Ind}_{MAN}^G(\sigma \otimes e^\nu \otimes 1)$$

を考える。 $Sp(2, \mathbb{R})$ の場合, 各 $T$ に対応する $M$ は次のとおりである。

$$\begin{aligned} T_{00}: &\quad M = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2); \quad \varepsilon_i = \pm 1\} \\ T_{10}: &\quad M = SL(2, \mathbb{R}) \times \{\pm 1\} \\ T_{01}: &\quad M = SL^{\pm}(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$T_{00}$ の場合は 主系列ユニタリ表現であり, 他の $M$ の離散系列の表現は既知である。 さらに誘導表現の指標は $\sigma$ のそれ, および $e^\nu$ を用いて表すことができる。infinitesimal character が regular な, height が $T_{20}$ 以外の extremal な緩増加既約指標にはこれらの表現が対応し, 前章の定理によってもあるいは誘導指標を求める方法でも緩増加既約指標の計算ができる。

singular な場合には translation principle を用いるなど工夫を要するし, 表現 も $\pi_{P,\sigma,\nu}$ の (sub)quotient まで考える必要がある。 緩増加でない場合には, 境界条件 (10) だけでは不変固有超関数は一意的には定まらない。 誘導指標は緩増加の場合と同じように計算できるが, regular のときでも $\pi_{P,\sigma,\nu}$ の (sub)quotient を調べなければならないなど, 緩増加の場合とは様相を異にする。

# 参考文献

[1] Formin,A.I. and Shapovalov,N.N.,A property of the characters of semisimple Lie groups, Functional Anal. Appl.,8 (1974), 270-271

[2] Harish-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 98-163

[3] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, Tran. Amer. Math. Soc., 119 (1965) 457-508

[4] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups II, Acta Math., 116 (1966) 1-111

[5] Hirai,T., The characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J.Math.Kyoto Univ., 12 (1972) 393-411

[6] Hirai,T., Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups II, General theory for semisimple Lie groups, Japan. J. Math., 2 (1976) 27-89

[7] Hirai,T., Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups III, Method of construction for semisimple Lie groups, Japan. J. Math., 2 (1976) 269-341

[8] Hirai,T., Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups IV, Explicit forms of the characters of discrete series representations for $Sp(n,\mathbb{R})$, Japan. J. Math., 3 (1977) 1-48

[9] Mikami,S., On the character identities for $Sp(n,\mathbb{R})$ and the lifting of stable tempered invariant eigendistributions, Japan. J. Math., 11 (1985) 361-385

[10] Nishiyama,K., Virtual characters and constant coefficient invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, Japan. J. Math., 12 (1986) 75-94

[11] Zuckerman,G., Tensor product of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups, Ann. of Math., 106 (1977) 295-308