数理解析研究所講究録
910巻 1995年 89-97

ペトリネット上で定義されるプレフィクスコード

(Prefix codes determined by Petri nets)

Genjiro Tanaka †

田中源次郎
(静岡理工科大学・知能情報学科)

1 諸定義

ペトリネット PNが与えられたとき，PNより得られる5つのプレフィクスコードを定義し，それらのいくつかの性質を調べることが本論文の目的である.

定義1 以下の (i) ～ (v) を満たす5項対 (P,T,F,W,μ) のことをペトリネットと呼ぶ.
(i) P はプレース **(place)** ので有限集合.
(ii) T はトランジッション **(transition)** の有限集合.
(iii) $P\cap T=\emptyset$ かつ $P\cup T\neq\emptyset$.
(iv) $F\subset(P\times T)\cup(T\times P)$ は アーク **(arc)** の集合.
(v) W は Fから $\{1,2,3,\cdots\}$ への関数で，**重み付け関数**と呼ばれる.
(vi) μ は Pから $\{0,1,2,3,\cdots\}$ への関数で，**初期マーキング (marking)** と呼ばれる.

記法 $PN=(P,T,F,W,\mu)$ をペトリネットとする. このとき，プレース $p\in P$ に対して，p への入力トランジション全体 $(\{t\in T|(p,t)\in F\})$ を$\cdot p$ で表し，p からの出力トランジション全体 $(\{t\in T|(p,t)\in F\})$ を $p\cdot$ で表す.

トランジション $t\in T$ に対して，t への入力プレース全体 $(\{p\in P|(p,t)\in F\})$ を$\cdot t$ で表し，p からの出力プレース全体 $(\{p\in P|(t,p)\in F\})$ を $t\cdot$ で表す.

定義2 $PN=(P,T,F,W,\mu)$ をペトリネットとする. このとき，
(i) トランジション $t\in T$ に対して，

$$(\forall p)\{p\in\cdot t\Longrightarrow W(p,t)\leq\mu(p)\}$$

が成立するとき，t は マーキング μ のもとで **発火可能** といい，$\mu\xrightarrow{t}\mu'$ と表す. 但し，μ' は，

$$\mu'(p)=\begin{cases}\mu(p)-W(p,t) & p\in\cdot t-t\cdot \text{ のとき}\\ \mu(p)+W(t,p) & p\in t\cdot-\cdot t \text{ のとき}\\ \mu(p)-W(p,t)+W(t,p) & p\in t\cdot\cap\cdot t \text{ のとき}\\ \mu(p) & \text{その他のとき}\end{cases}$$

---

† Department of Computer Science, Shizuoka Institute of Science and Technology, Fukuroi-shi, 437 Japan

を満たすマーキングとする.

(ii) トランジションの列 $\beta = t_1 t_2 \cdots t_k$ に対して, $\mu_0 = \mu$ かつ$\mu_{i-1} \xrightarrow{t_i} \mu_i\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ が成り立つとき, β は μ からの**発火列** であるという. そして, μ_k は μ から (β によって) **可達**であるといい, $\mu \xrightarrow{\beta} \mu_k$ または$\delta(\mu, \beta) = \mu_k$ と表す. また,μはμ自身から可達であるとする. μ から可達なマーキングの集合を $\mathbf{Re}(\mu)$ と書く. $\mu' \in Re(\mu)$ よりの発火列の全体を $\mathbf{Seq}(\mu')$ で表す. マーキング$\mu' \in Re(\mu)$ は, 任意の p に対し $\mu(p) > 0$ が成り立つとき正値マーキングと呼ばれる. トランジションの列 $\beta = t_1 t_2 \cdots t_k \ \ni Seq(\mu)$ はその任意の左因子$\beta' = t_1 t_2 \cdots t_h$, $(0 \leq h \leq k)$ について$\delta(\mu, \beta')$ が正値マーキングならば, 正値発火列と呼ばれる. 正値マーキングμに対し, μからの正値発火列の全体を $\mathbf{PSeq}(PN,\ \mu)$ または単に $\mathbf{PSeq}(\mu)$ で表す.

定義 3 $PN = (P, T, F, W, \mu_0)$ をペトリネットとする. 次の (i) と (ii) を満たす transition $t \in T$は **loop transiton** と呼ばれる.

(i) $\cdot t = t \cdot \neq \emptyset$.

(ii) $\forall p \in \cdot t$ に対し, $W(p, t) = W(t, p)$.

また, Tのすべての $t \in T$が loop transition であるようなペトリネット PNはループ型と呼ばれる.

A を集合とする. A の元の有限列 wを語と呼び, 語の集合を言語と呼ぶ. 語の全体からなる集合を A^*で表す. A^*から空語 1 を除いた集合を A^+で表す. A^*は語の並列を演算とする **free monoid** をなす. A^*の部分半群 Mは単位元 1 を持つとき, submonoid と呼ばれる. free monoid の自明でない submonoid Mは唯一つの極小生成系

$$C = M^+ - (M^+)^2$$

を持つ. この極小生成系を Mの **base** と呼ぶ.

定義 4 M を *free monoid* A^*の *submonoid* とし, Cを Mの *base* とする. もし,

$$CA^+ \cap C = \emptyset$$

が成り立つならば, Cは A 上の **prefix code** と呼ばれる. 右-左双対として $A^+C \cap C = \emptyset$ が成り立つとき Cは A 上の **suffix code** と呼ばれる.

定義 5 Cを A 上の prefix code とする. 任意の A 上の prefix code C' に対し,

$$C \subseteq C' \Longrightarrow C = C'$$

が成り立つとき, Cは A 上の maximal prefix code と呼ばれる.

2 ペトリネット上で定義される prefix code

ペトリネット $PN = (P, T, F, W, \mu_0)$ にたいし，マーキングの集合 $R(\mu_0)$ を状態の集合とし Tを入力記号の集合，初期状態をμ_0とする非決定オートマトンを自然に構成出来る．ここでは最終状態の集合を変えることによって5種類のT上の prefix code $S(PN, \mu_0)$，$B(PN, \mu_0)$，$C(PN, \mu_0)$，$D(PN, \mu_0)$，$M(PN, \mu_0)$，を定義する．

定義 6 $PN = (P, T, F, W, \mu_0)$ をペトリネットとする．$\mu \in Re(\mu_0)$ に対し，T^* の subset $Stab(\mu)$ を次で定める．

$$Stab(\mu) = \{w \in T^* | \delta(\mu, w) = \mu\}$$

$Stab(\mu)$ は T^*の submonoid をなす．$Stab(\mu) \neq \{1\}$ ならば，$Stab(\mu)$ の base を $S(PN, \mu)$ で表す．

定理 1 $S(PN, \mu) \neq \emptyset$ ならば，$S(PN, \mu)$ は prefix code をなす．

定理 2 $S(PN, \mu) \neq \emptyset$ ならば，次のいずれかが成り立つ

(1) $S(PN, \mu) = T$ かつ PNはループ型．

(2) $S(PN, \mu)$ は maximal prefix code ではない．

定義 7 $PN = (P, T, F, W, \mu_0)$ をペトリネットとし，μ_0 を正値マーキングとする．$w \in Stab(\mu_0)$ は，wの任意の左因子 u, $(u \neq 1\ , w)$ にたいし，

$$\delta(\mu_0, u) \neq \mu_0 \ \text{かつ}\ \delta(\mu_0, u)\ \text{は正値マーキング}$$

であるとき，μ_0 の**強固定発火列**と呼ばれる．μ_0 の強固定発火列の集合を $D(PN, \mu_0)$ で表す．

定理 3 $D(PN, \mu_0) \neq \emptyset$ ならば，$D(PN, \mu_0)$ は T上の prefix code である．

定義 8 $PN = (P, T, F, W, \mu_0)$ をペトリネットとし，μ_0 を正値マーキングとする．

$$w = t_1 t_2 \ldots t_r, (t_i \in T,\ r \geq 1)\ \text{かつ},\ \mu_i = \delta(\mu_{i-1}, t_i)\ (i = 1, 2, \ldots, r),$$

とする．もし $\mu_i, (0 \leq i \leq r-1)$ がすべて正値マーキングで，かつ μ_rが正値マーキングでないとき，wは μ_0 における**中断発火列**と呼ばれる．中断発火列の集合を $C(PN, \mu_0)$ で表す．

定理 4 $C(PN, \mu_0) \neq \emptyset$ ならば，$C(PN, \mu_0)$ は prefix code である．

$w \in T^*$に対し，T^*の subset $\Phi(w)$ を

$$\Phi(w) = \{u| \quad u \in T^*, \quad |u|_a = |w|_a \quad \forall a \in T\}$$

と定める．

定理 5 次が成り立つ．
(1) $w \in C(PN, \mu_0)\ , u \in \Phi(w) \cap Seq(\mu_0) \Longrightarrow u \in C(PN, \mu_0)T^*$
(2) $uv \in C(PN, \mu_0),\ v \neq 1 \Longrightarrow \Phi(u) \cap C(PN, \mu_0) = \phi$

例 定理5はペトリネット PN上で定義される prefix code $C(PN,\ \mu_0)$ のクラスが比較的に小さいことを示している．例えば,$T = \{a, b, \cdots\}$ 上の prefix code C が $ba,\ ab^2 \in C$ ならば，$C = C(PN, \mu_0)$ となるペトリネット PNは存在しない．なぜならば，もしそのような PN が存在するならば，ab は ab^2の左因子でありかつ $ba \in \Phi(ab) \cap C(PN, \mu_0)$．これは定理5の (2) に矛盾する．

定義 9 $w = t_1t_2 \ldots t_r, (t_i \in T, r \geq 1)$ が，$w \in C(PN, \mu_0)$ であり，かつ 任意の $i, (i = 1, 2, \ldots, r-1)$，に対し $\delta(\mu_0, t_1t_2 \ldots t_i) \neq \mu_0$ であるとき，wをμ_0 における**基本中断発火列**と呼ぶ．μ_0 における基本中断発火列の集合を $B(PN, \mu_0)$ で表す．
$B(PN, \mu_0)$ は $C(PN, \mu_0)$ の部分集合だから次が成り立つ．

定理 6 $B(PN, \mu_0) \neq \emptyset$ ならば，$B(PN, \mu_0)$ は prefix code である．

$PN_1 = (P_1, T_1, F_1, W_1, \mu_1)$，$PN_2 = (P_2, T_2, F_2, W_2, \mu_2)$ をペトリネットとする．もし $(P_1 \cup T_1) \cap (P_2 \cup T_2) = \phi$ ならば，PN_1 と PN_2 は互いに素と呼ばれる．互いに素なペトリネット PN_1，PN_2 の和 $PN_1 + PN_2$ は次で定義される．$PN_1 + PN_2 \ = (P_1 \cup P_2,\ T_1 \cup T_2,\ F_1 \cup F_2,\ W_0,\ \mu_0)$ ここで，

$$W_0(p) = \begin{cases} W_1(a) & a \in F_1 \text{のとき} \\ W_2(a) & a \in F_2 \text{のとき} \end{cases}$$

$$\mu_0(p) = \begin{cases} \mu_1(p) & p \in P_1 \text{のとき} \\ \mu_2(p) & p \in P_2 \text{のとき} \end{cases}$$

イニシャルマーキング μ_0 をベクトルの対 $(\mu_1,\ \mu_2)$ で表すことが出来る．一般にペトリネットはいくつかの（連結な）ペトリネットの和である．

T^* の語 $x,\ y$ に対し，x と y の shuffle product $s(x,\ y)$ は次で定義される．

$$s(x, y) = \{x_1y_1 \ldots x_ny_n \,|\, n \geq 1,\ x = x_1 \ldots x_n,\ y = y_1 \ldots y_n,\ x_i, y_i \in T^*\ \}$$

言語 X, Yに対し，$s(X,Y)=\bigcup_{x\in X,y\in Y}s(x,y)$ とする．ただし Xまたは Yが空集合の場合はそれらの shuffle product は空集合とする．

$w = a_1a_2a\ldots a_n, (a_i \in T,\ n \geq 1)$ を T 上の語とする．列 $a_1, a_2, \ldots a_n$ の部分列 $a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{im}, (1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n)$ より作られる語 $w = a_{i1}a_{i2}\ldots a_{im}$ を w の部分列語と呼ぶ．

$u = a_1a_2\ldots a_n \in s(x,y)$, $(a_i \in T)$ とする．u の left factor u_iを次で定める；

$$u_i = a_1a_2\ldots a_i,\ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

u は x と yの shuffle product の元だから，次の (1) と (2) を満たす kが唯ひとつ存在する．

(1) u_{k-1}の任意の部分列語は x と一致しない．

(2) u_kのある部分列語は x に等しい．

このとき，u_kを u^xで表す．T^+の部分集合 $s_x(x,y)$ をつぎのように定義する．

$$s_x(x,y) = \{\, u^x \mid u \in s(x,\, y)\,\}$$

言語 X, Y に対しては

$$s_X(X,Y) = \bigcup_{x\in X,y\in Y} s_x(x,y)$$

と定義する．一般に，任意の語 $x \in T^+$と任意の言語 $L \subseteq T^*$に対し，$s_x(x,L)$ は prefix code になるが，本論分ではこれについては触れない．

$v = b_1b_2\ldots b_n \in s(x,y)$, $(b_i \in T)$ とする．vの left factor v_jを次で定める；

$$v_j = b_1b_2\ldots b_i,\ (j = 1, 2, \ldots, m)$$

vは x と yの shuffle product の元だから，次の (1) と (2) と (3) を満たす h が唯ひとつ存在する．

(1) v_{h-1}の任意の部分列語は x と一致しない．

(2) v_{h-1}の任意の部分列語は yと一致しない．

(3) v_hのある部分列語は x または yと一致する．

このとき，v_hを$\overline{v}$で表す．x と yの semi-shuffle product $ss(x,y)$ は $ss(x,y) = \{\overline{v}|v \in s(x,y)\}$ で定義される．また，言語 X, Yに対して $ss(X,Y) = \bigcup_{x\in X,y\in Y} ss(x,y)$ と定義される．

定理 7 PN_i ,$(i = 1, 2)$, を互いに素なペトリネットとし，μ_iを PN_i, $(i = 1, 2)$, の正値初期マーキングとする．$C_i = C(PN_i, \mu_i)$, $(i = 1, 2)$, とおくと

(1) $C_1 \cup C_2 = \emptyset$ ならば，$C(PN_1 + PN_2, \mu_0) = \emptyset$

(2) $C_1 \neq \emptyset$ かつ $C_2 = \emptyset$ ならば，$C(PN_1 + PN_2, \mu_0) = s_{C_1}(C_1, PSeq(PN_2, \mu_2))$.

(3) $C_1 \neq \emptyset$ かつ $C_2 \neq \emptyset$ ならば，$C(PN_1 + PN_2, \mu_0) = ss(C_1, C_2)$.

3 入力正規なペトリネット

任意の $t \in T$ に対し，次のいずれかが成り立つとき PN は**入力正規**であると呼ばれる．

(1) $W(p,t) = 1, \forall (p,t) \in F$,

(2) $\cdot t = \emptyset$ （つまり t はソーストランジション）

定理8 $PN = (P, T, F, W, \mu_0)$ を入力正規なペトリネットでμ_0を正値マーキングとする．次は同値である．

(1) $C(PN, \mu_0) = \emptyset$.

(2) 任意の $t \in T$について，t は次を満たす；

(a) $\cdot t = \emptyset$,　　または,　　(b) $\cdot t \neq \emptyset$かつ $\cdot t \subseteq t\cdot$

定理9 次のいずれかが成り立つ．

(1) $C(PN, \mu_0) = B(PN, \mu_0)$

(2) $C(PN, \mu_0) = D(PN, \mu_0)^* B(PN, \mu_0)$

入力正規なペトリネットにおいては，正値マーキングに対し，任意のトランジションは少なくとも１回は発火可能である．このことが結果的には次の定理を成立させる．

定理１０ $PN = (P, T, F, W, \mu_0)$ を正値マーキングμ_0を持つ入力正規なペトリネットとする．$C(PN, \mu_0) \neq \emptyset$ ならば，$C(PN, \mu_0)$ は maximal prefix code である．

T^*の部分集合 $M(PN, \mu_0)$ を次で定義する．

$$M(PN, \mu_0) = D(PN, \mu_0) \cup B(PN, \mu_0)$$

定理１１ $M(PN, \mu_0) \neq \emptyset$ ならば，$M(PN, \mu_0)$ は prefix code である．

定理１２ $PN = (P, T, F, W, \mu_0)$ を正値マーキングμ_0を持つ入力正規なペトリネットとする．$M(PN, \mu_0) \neq \emptyset$ ならば，$M(PN, \mu_0)$ は maximal prefix code である．

注意 一般に，prefix code Xの自明でない分割 $Y \cup Z$ があり，$C = Y^* Z$が prefix code であるとき，C は鎖（chain）と呼ばれる．一般に C が maximal prefix code であるための必要かつ十分な条件は X が maximal prefix code である，ことである（[BP 1. p106]）．

一般に，集合 A に対し A^n は maximal prefix code である．任意の A と任意の正整数 n に対し，$C(PN,\mu_0)=A^n$ となる PN が存在する．例えば，$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ のときは，$PN=(\{p\},\{a_1,a_2,\ldots,a_k\},F,W,\mu_0)$ ，ここで $F=\{(p,a_i)\ \mid\ i=1,2,\ldots,k\}$，かつ $\forall(p,a_i)\in F$ に対し $W(p,a_i)=1$，かつ $\mu_0(p)=n$ とおくと，$C(PN,\mu_0)=A^n$ となる．

ペトリネット PN のトランジション a に対し，プレイスの集合 $S(a)$ を，$S(a)=\cdot a-(\cdot a\cap a\cdot)$ で定義する．またトランジションの集合 W に対して，$K(W)=\bigcap_{a\in W}S(a)$ と定める．

m を正整数とする．有限集合 T の部分集合の集合 $F_m(T)$ を次で定義する：

$$F_m(T)=\begin{cases}\{T\} & m\geq|T|\ \text{のとき}\\ \{W|\quad W\subset T\quad and\quad |W|=m\} & m<|T|\ \text{のとき}\end{cases}$$

定理１３ $PN=(P,T,F,W,\mu_0)$ を正値マーキング μ_0 を持つ入力正規なペトリネットとする．$C(PN,\mu_0)=T^n$ ならば，次の (1)，(2)，(3) が成り立つ．

(1) 任意の $W\in F_n(T)$ に対し，$K(W)\neq\phi$.

(2) 任意の $W\in F_n(T)$ に対し，$min\{\mu_0(p)|p\in K(W)\}=n$.

(3) 任意の $a\in T$ と任意の $p\in S(a)$ に対し，$\mu_0(p)\geq n$.

定理１４ $PN=(P,T,F,W,\mu_0)$ を正値マーキング μ_0 を持つ入力正規なペトリネットとし，PN は次に条件を満たすとする；

(1) ある正整数 $m(1\leq m\leq|T|)$ が存在し，任意の $W\in F_m(T)$ に対し，$K(W)\neq\phi$.

(2) ある正整数 n が存在し，任意の $W\in F_m(T)$ に対し，$min\{\mu_0(p)|p\in K(W)\}=n$.

(3) 任意の $a\in T$ と任意の $p\in S(a)$ に対し，$\mu_0(p)\geq n$.

すると

もし $m=|T|$ ならば，$C(PN,\mu_0)=T^n$.

もし $m<|T|$ かつ $m\geq n$ ならば，$C(PN,\mu_0)=T^n$.

定理１４を用いて次の結果が証明される．

定理１５ PN を正値マーキング μ_0 を持つ入力正規なペトリネットとする．もし $C(PN,\mu_0)\neq T^n$ ならば，$C(PN,\mu_0)$ は suffix code ではない．

定理１５はユニホームコード T^n 以外の biprefix code は入力正規なペトリネットのコード $C(PN,\mu_0)$ として実現出来ないことを示している．最後に，入力正規なペトリネットの特別な場合である状態機械についての結果を述べる．

定義１０　ペトリネット PNの各トランジションがただ一つの入力アークとただ一つの出力アークを持ち，かつ各アークのウエイトが１のとき，つまり

$$(\forall t)\{t \in T \Longrightarrow |\cdot t| = 1 \text{ かつ } |t\cdot| = 1\}$$

が成り立ち，かつ $\forall p \in \cdot t$　$[resp.\ \ p \in t\cdot]$ に対し，$W(p,t) = 1$　$[resp.\ \ W(t,p) = 1]$ のとき，ペトリネット PNは**状態機械** (state machine) と呼ばれる．

定義１１ PNを状態機械とする．

$$p_1 t_1 p_2 \ldots p_n t_n p_{n+1} \ (p_i \in P,\ t_j \in T)$$

は，$\cdot t_i = \{p_i\}$ かつ $t_i \cdot = \{p_{i+1}\}$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ が成り立つとき，PNにおける **path** と呼ばれる．
path は，$1 \leq i \neq j \leq n$ ならば $p_i \neq p_j$であり，かつ ある m に対し $p_{n+1} = p_m$がなりたつとき，**茎**と呼ばれる．茎はもし $p_1 = p_m$ならば，**cycle** と呼ばれる．
もし PN中に cycle が存在しなければ，PNは **acycle** であると呼ばれる．

定理１６ $PN = (P, T, F, W, \mu_0)$ を状態機械とする．$D(PN, \mu_0) \neq \emptyset$ であるための必要かつ十分な条件は，つぎの (1) または (2) がなりたつことである：
(1) ループトランジション　$t \in T$ が存在する．
(2)　$\mu_0(p) \geq 2$ なる $p \in P$ を含む cycle が PN中に存在する．

定理１７ PNを状態機械とする．$C(PN, \mu_0)$ が無限集合ならば，PN中に茎が存在する．

従って，PN中に茎が存在しない場合，つまり PNが acycle である場合は $C(PN, \mu_0)$ は有限集合である．定理１７の逆が成立すれば，PNが状態機械の場合に $C(PN, \mu_0)$ が有限か無限かという問題に対しては，茎の存在だけを見ればよいことになる．しかし，つぎの定理が示すように，定理１７の逆は一般に成立しない．逆の成立のためにはいくつかの条件が必要となる．

定理１８ PNを状態機械とすると次が成り立つ．
(1) PN中のトランジションがすべてループトランジションならば，$C(PN, \mu_0) = \emptyset$

(2) PN中にループトランジションとループトランジションでないものがともに存在すれば，$D(PN,\mu_0) \neq \emptyset$ であり，$C(PN, \mu_0) = D(PN,\mu_0)^* B(PN,\mu_0)$

(3) PN中にループトランジション は存在しないが，ある p_i について$\mu_0(p_i) \geq 2$ となるような cycle $p_1 t_1 p_2 \ldots p_n t_n p_{n+1}$ $(p_i \in P,\ t_j \in T,\ n \geq 2)$ が存在すれば，$D(PN,\mu_0) \neq \emptyset$ であり，

$C(PN,\mu_0) = D(PN,\mu_0)^* B(PN,\mu_0)$

(4) PN中にループトランジションが存在せず，かつ任意の cycle $p_1 t_1 p_2 \ldots p_n t_n p_{n+1}$ ($p_i \in P$, $t_j \in T$, $n \geq 2$) の任意の p_i について$\mu_0(p_i) = 1$であるが，ある茎 $q_1 s_1 q_2 \ldots q_n s_n q_{m+1}$ ($q_i \in P, s_j \in T$) で，ある q_jについては $\mu_0(p_i) \geq 2$ となるものが存在すれば，$C(PN,\mu_0) = B(PN,\mu_0)$ （無限集合）

(5) PN中にループトランジションが存在せず，かつ任意の茎$p_1 t_1 p_2 \ldots p_n t_n p_{n+1}$ ($p_i \in P, t_j \in T$) の任意の p_i について$\mu_0(p_i) = 1$ ならば，$C(PN,\mu_0) = B(PN,\mu_0)$ （有限集合）

(6) PNが acycle ならば，$C(PN,\mu_0) = B(PN,\mu_0)$ （有限集合）

参考文献

[1]Berstel,J.,and Perrin,D.: Theory of Codes. Academic Press, 1985.

[2]Lallement,G.: Semigroups and Combinatorial Applications. Wiley. 1979.

[3] 村田忠男: ペトリネットの解析と応用. 近代科学社. 1992.

[4]Peterson,J.L.: Petri Net Theory and the Modelling of Systems. Prentice-Hall.1981. （邦訳「ペトリネット入門」, 市川・小林 訳, 共立出版.1984.）