

Title	変換ネットについてのいくつかの性質(半群・形式言語および語の組合せ論)
Author(s)	国持, 良行; 猪俣, 俊光; 田中, 源次郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 910: 44-54
Issue Date	1995-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/59539">http://hdl.handle.net/2433/59539</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 変換ネットについてのいくつかの性質

Y. Kunimochi † T. Inomata † G. Tanaka †

国持 良行 猪股俊光 田中源次郎  
(静岡理科大学・理工)

あらまし ネット(特にペトリネット)は, 計算機による動作解析のモデルとしてよく用いられる. ここでは, まず, 変換ネット間の同型写像を定義する. 次に, 変換ネットと呼ぶネットを用いて, 半群とその半群上の変換を表現する. 1 節では, これらに関連する用語を定義し, ネット上の自己同型写像全体が群をなすことを示す. 続いて, 2 節では, 任意の有限群  $G$  に対してある変換ネット  $N$  が存在し,  $N$  上の自己同型写像全体が  $G$  と(群として)同型になることを示す. 最後に, 3 節では変換ネットをもとに得られる L 型ペトリネット言語が正規言語になることを示す.

### 1 諸定義といくつかの性質

本節では, 諸定義とそれらから導かれるいくつかの性質を述べる. なお, 以下では, 非負整数の集合を  $\mathbf{N}$  で表す. さらに  $\mathbf{N} - \{0\}$  と  $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$  を, それぞれ  $\mathbf{N}^+$  と  $\omega$  で表す. まず, (ペトリ) ネットやそれに関する言語について定義する.

**定義 1.1** 以下の (i) ~ (v) を満たす 4 項対  $(P, T, A, W)$  のことをネットと呼ぶ. さらに, (vi) を満たす 5 項対  $(P, T, A, W, \mu)$  のことをペトリネットと呼ぶ.

(i)  $P$  はプレース (place) の有限集合であり, (ii)  $T$  はトランジション (transition) の有限集合であり, そして (iii)  $P \cap T = \emptyset$  かつ  $P \cup T \neq \emptyset$  を満たす. (iv)  $A \subset (P \times T) \cup (T \times P)$  はアーク (arc) の集合であり, (v)  $W$  は重み付け関数と呼ぶ,  $A$  から  $\mathbf{N}^+$  への関数である. (vi)  $\mu$  はマーキング (marking) (または, 拡張マーキング) と呼ばれる,  $P$  から  $\mathbf{N}$  への (または,  $P$  から  $\omega$  への) 関数である. ■

(v) について, アーク  $a \in A$  に対して,  $W(a)$  を  $a$  の重さと呼ぶ. また,  $a = (p, t) \in A \cap (P \times T)$  と表されているとき,  $W(a)$  を  $W((p, t))$  と書く代わりに,  $W(p, t)$  と書く. 同様に,  $a = (t, p) \in A \cap (T \times P)$  と表されているとき,  $W(a)$  を  $W((t, p))$  と書く代わりに,  $W(t, p)$  と書くことにする.

(vi) について, 通常のペトリネットのマーキングは,  $P$  から  $\mathbf{N}$  への関数であるが, 本論文では,  $\infty$  を値として取り得るものとし, これを拡張マーキングと呼び, 通常のマーキングと区別している.

† Department of Computer Science, Shizuoka Institute of Science and Technology, Fukuroi-shi, Japan, 437

**記法 1.1**  $N = (P, T, A, W)$  をネットとする。このとき、  
 プレース  $p \in P$  に対して、 $p$  への入力トランジション全体 ( $\{t \in T | (t, p) \in A\}$ ) を  $\cdot p$  で表し、 $p$  からの出力トランジション全体 ( $\{t \in T | (p, t) \in A\}$ ) を  $p \cdot$  で表す。  
 トランジション  $t \in T$  に対して、 $t$  への入力プレース全体 ( $\{p \in P | (p, t) \in A\}$ ) を  $\cdot t$  で表し、 $t$  からの出力プレース全体 ( $\{p \in P | (t, p) \in A\}$ ) を  $t \cdot$  で表す。 ■

**定義 1.2**  $N = (P, T, A, W)$  をネットとし、 $\mu$  をマーキングとする。このとき、  
 (i) トランジション  $t \in T$  に対して、

$$(\forall p) \{p \in \cdot t \implies W(p, t) \leq \mu(p)\} \quad (1)$$

が成立するとき、 $t$  はマーキング  $\mu$  のもとで発火可能という。このとき、遷移関数  $\delta_N(\mu, t) = \mu'$  を以下のように定義し、 $\mu \xrightarrow{t} \mu'$  と表す。

$$\mu'(p) = \begin{cases} \mu(p) - W(p, t) & p \in \cdot t - t \text{ のとき} \\ \mu(p) + W(t, p) & p \in t \cdot - \cdot t \text{ のとき} \\ \mu(p) - W(p, t) + W(t, p) & p \in t \cdot \cap \cdot t \text{ のとき} \\ \mu(p) & \text{その他のとき} \end{cases} \quad (2)$$

また、この  $t$  に関するマーキングの書き換えを、 $t$  の発火ということもある。

(ii) トランジションの列  $\beta = t_1 t_2 \cdots t_k$  ( $k = 0$  すなわち  $\beta$  が空列の場合を含む) に対して、 $\mu_0 = \mu$  かつ  $\mu_{i-1} \xrightarrow{t_i} \mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) が成り立つとき、 $\beta$  は  $\mu$  からの発火列であるという。そして、 $\mu_k$  は  $\mu$  から ( $\beta$  によって) 可達であるという。このとき、 $\delta_N(\mu, \beta)$  を  $\mu_k$  で定義し、 $\mu \xrightarrow{\beta} \mu_k$  または  $\mu \xrightarrow{*} \mu_k$  と表す。また、 $\mu$  から可達なマーキングの集合を  $\mathbf{R}_N(\mu)$  と書く。

(iii)  $\Sigma$  をアルファベット (**alphabet**) と呼ばれる、記号の空でない有限集合とする。また、 $\sigma : T \rightarrow \Sigma$  をラベリング関数とする。さらに、 $F$  は任意のマーキングの集合とする。このとき、

$$L = \{\sigma(t_1)\sigma(t_2)\cdots\sigma(t_k) | t_1 t_2 \cdots t_k \in T^* \text{ かつ } \delta_N(\mu, t_1 t_2 \cdots t_k) \in F\} \quad (3)$$

を、( $\mu$  を初期マーキング、 $F$  を最終状態集合とする)  $N$  の **L 型ペトリネット言語** [1] と呼び、 $L_N^\sigma(\mu, F)$  と表す。なお、ここでは、 $L_N^\sigma(\mu, F)$  の正規性のみを議論している。 $\sigma$  を恒等写像 1 とした場合の言語  $L_N^1(\mu, F)$  が正規であることと任意の  $\sigma$  について正規であることは同値である。そこで、以後  $T$  自身を  $\Sigma$  (つまり  $\sigma$  は恒等写像) とみなして、言語  $L_N^1(\mu, F)$  を **L 型ペトリネット言語** と定義し、単に  $L_N(\mu, F)$  と表すことにする。 ■

**定義 1.3** 以下の (i) ~ (v) を満たす 5 項対  $(Q, \delta, \Sigma, s, F)$  のことを **有限状態機械 (finite state machine)** という。

(i)  $Q$  は状態 (**state**) の有限集合であり、(ii)  $\Sigma$  はアルファベットである。(iii)  $\delta$  は遷移関数と呼ばれる、 $Q \times \Sigma$  から  $Q$  への関数である。(iv)  $s \in Q$  は初期状態 (**initial state**) であり、(v)  $F \subset Q$  は最終状態 (**final state**) の集合である。

以下では、語  $w \in \Sigma^*$  に対しても遷移関数  $\delta: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q: (q, w) \mapsto \delta(q, w)$  が次の方法で定義されるものとする:

$$\delta(q, w) = \begin{cases} \delta(\delta(q, x), w') & w = xw' (x \in \Sigma \text{ と } w' \in \Sigma^* \text{ の接続}) \\ q & w = \lambda (\text{空語}) \end{cases} \quad (4)$$

有限状態機械  $C = (Q, \delta, \Sigma, s, F)$  によって生成される言語  $L(C)$  とは  $L(C) = \{\beta \in \Sigma^* \mid \delta(s, \beta) \in F\}$  のことである。そして、有限状態機械によって生成される言語のことを正規言語という。 ■

ここで、ペトリネット言語と有限状態機械の関連について述べる。ネット  $N = (P, T, A, W)$  に対して、 $\mu_0$  から可達なマーキングの集合  $\mathbf{R}_N(\mu_0)$  が有限集合であるならば、一つの有限状態機械  $C_N(\mu_0, F)$  を構成することができる: 状態集合  $Q$  として  $\mathbf{R}_N(\mu_0)$  を、アルファベット  $\Sigma$  として  $T$  そのものを、遷移関数  $\delta$  として  $\delta_N$  を、初期状態  $s$  として  $\mu_0$  を、最終状態集合  $F$  として  $\mathbf{R}_N(\mu_0)$  の任意の部分集合を、それぞれ採用して得られる 5 項対  $C_N(\mu_0, F) = (\mathbf{R}_N(\mu_0), T, \delta_N, \mu_0, F)$  は有限状態機械である。よって、 $N$  のペトリネット言語  $L_N(\mu_0, F)$  は、 $C_N(\mu_0, F)$  によって生成される正規言語  $L(C_N(\mu_0, F))$  と一致する。

続いて、ネット上の同型写像に関する定義を行なう。なお、 $P$  上、 $T$  上、および  $A$  上の写像は、引数を左から写像に適用するものとする。

**定義 1.4**  $N_1 = (P_1, T_1, A_1, W_1)$  と  $N_2 = (P_2, T_2, A_2, W_2)$  はネットとする。このとき、写像  $\alpha: P_1 \rightarrow P_2$  と  $\beta: T_1 \rightarrow T_2$  の対  $\varphi = (\alpha, \beta)$  が次を満たすならば、 $N_1$  から  $N_2$  への準同型 (homomorphism) と呼ぶ。

$$(\forall a)\{a \in A_1 \implies (a)\tilde{\varphi} \in A_2 \text{ かつ } W_2((a)\tilde{\varphi}) \leq W_1(a)\} \quad (5)$$

但し、 $\varphi$  に対して全射  $\tilde{\varphi}: A_1 \rightarrow A_2$  を、

$$(a)\tilde{\varphi} = \begin{cases} ((p)\alpha, (t)\beta) & a = (p, t) \in A_1 \cap (P_1 \times T_1) \text{ のとき} \\ ((t)\beta, (p)\alpha) & a = (t, p) \in A_1 \cap (T_1 \times P_1) \text{ のとき} \end{cases} \quad (6)$$

で定義する (以後、誤解を生じない場合には、 $(a)\tilde{\varphi}$  を単に  $(a)\varphi$  と書く)。 ■

**定義 1.5**  $\varphi = (\alpha, \beta): N_1 \rightarrow N_2$  を準同型とする。  $\alpha$  と  $\beta$  がともに、全射であるとき、 $\varphi$  は上への準同型と呼ぶ。さらに、 $\varphi$  が、

$$(\forall a)\{a \in A \implies W_2((a)\varphi) = W_1(a)\} \quad (7)$$

を満たすとき、 $\varphi$  は整合的 (well-formed) 準同型と呼ばれる。 ■

**定義 1.6** ネット  $N_1$  から  $N_2$  への整合的準同型  $\varphi = (\alpha, \beta)$  は、 $\alpha$  と  $\beta$  がともに、単射であるとき、同型写像 (isomorphism) と呼ばれる。とくに、 $N_1 = N_2 = N$  のときは、 $N$  の自己同型 (automorphism) と呼ばれる。また、 $N$  の自己同型全体を  $\mathbf{Aut}(N)$  で表す。 ■

まず、上に定義した  $\mathbf{Aut}(N)$  は、

$$(id_P, id_T) \in \mathbf{Aut}(N) \quad (8)$$

であるから、 $\mathbf{Aut}(N) \neq \emptyset$  である。ここに、 $id_P: P \rightarrow P$  と  $id_T: T \rightarrow T$  は恒等写像である。なお、以下では、 $(id_P, id_T) \in \mathbf{Aut}(N)$  を  $\mathbf{1}_{\mathbf{Aut}(N)}$  (誤解を生じないときは単に  $\mathbf{1}$ ) と書くことにする。続いて、 $\mathbf{Aut}(N)$  が群をなすことを示す。

### 性質 1.1

1. 2つの自己同型の各要素の合成して得られる組も自己同型になる、つまり

$$\varphi_1 = (\alpha_1, \beta_1), \varphi_2 = (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbf{Aut}(N) \implies (\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2) \in \mathbf{Aut}(N) \quad (9)$$

が成り立つので、 $\mathbf{Aut}(N)$  上の 2 項演算  $\cdot$  を次のように定義できる：任意の 2 要素  $\varphi_1, \varphi_2$  に対し、 $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2)$  ( $\cdot$  は写像の合成を表すが、以下では特に注意を必要とする場合以外は、 $\cdot$  を省略する)。

2. このとき、 $(\mathbf{Aut}(N), \cdot)$  は群をなす。単位元は  $(id_P, id_T)$  であり、任意の元  $\varphi = (\alpha, \beta)$  の逆元  $\varphi^{-1}$  が一意に存在し、 $\varphi^{-1} = (\alpha^{-1}, \beta^{-1})$  と表される。 ■

1. について 式 (9) が成り立つことを示す。

$\varphi_i = (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbf{Aut}(N)$  ( $i = 1, 2$ ) であることから、 $\alpha_i: P \rightarrow P$  と  $\beta_i: T \rightarrow T$  は、ともに全単射、すなわち置換となる。したがって、 $\alpha_1 \alpha_2: P \rightarrow P$  と  $\beta_1 \beta_2: T \rightarrow T$  も全単射となる。さらに、 $\varphi_1$  は整合的準同型だから、

$$a \in A \implies (a)\varphi_1 \in A \text{ かつ } W((a)\varphi_1) = W(a)$$

$\varphi_2$  も整合的準同型だから、

$$(a)\varphi_1 \in A \implies W((a)\varphi_1\varphi_2) = W((a)\varphi_1)$$

よって、

$$a \in A \implies (a)\varphi_1\varphi_2 \in A \text{ かつ } W((a)\varphi_1\varphi_2) = W((a)\varphi_1) = W(a)$$

従って、 $\varphi_1\varphi_2$  は整合的準同型である。よって、(9) が成り立つ。

以上のように、(8) と (9) から  $\mathbf{Aut}(N)$  における演算 (合成)  $\cdot$  を  $(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2)$  で定義すると、 $(\mathbf{Aut}(N), \cdot)$  はモノイドをなす ( $\cdot$  が結合律を満たすことは明らかである)。なお、単位元は、 $\mathbf{1}$  である。

2. について 任意の元  $\varphi$  に逆元が存在することを示す、すなわち、

$$\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N) \implies (\exists! \varphi^{-1} \in \mathbf{Aut}(N)) \{ \varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \mathbf{1} \} \quad (10)$$

が成り立つことを示す：

置換  $\alpha$  と  $\beta$  について、 $P$  と  $T$  がともに有限だから、 $\alpha^n = id_P$  かつ  $\beta^m = id_T$  となる  $n, m \in \mathbf{N}^+$  が存在する。 $\varphi^{nm} = (\alpha, \beta)^{nm} = (\alpha^{nm}, \beta^{nm}) = \mathbf{1}$  すなわち、 $\varphi\varphi^{nm-1} = \varphi^{nm-1}\varphi = \mathbf{1}$  と

なるから、 $\varphi^{-1} = \varphi^{nm-1} \in \mathbf{Aut}(N)$  である (逆元の一意性は明らか)。なお、 $\varphi^{-1} = (\gamma, \delta)$  とすると、 $(\alpha\gamma, \beta\delta) = (id_P, id_T)$  より、 $\gamma = \alpha^{-1}$ 、 $\delta = \beta^{-1}$  であるから、

$$\varphi^{-1} = \varphi^{nm-1} = (\alpha^{nm-1}, \beta^{nm-1}) = (\alpha^{-1}, \beta^{-1}) \quad (11)$$

と表せる。

(10) と (11) から任意の  $\varphi = (\alpha, \beta)$  は逆元  $\varphi^{-1} = (\alpha^{-1}, \beta^{-1})$  をもち、モノイド  $\mathbf{Aut}(N)$  は群をなす。 ■

**定義 1.7**  $N = (P, T, A, W)$  をネットとする。このとき、次の (i) ~ (vi) の条件を満たすならば、 $N$  のことを **変換ネット** と呼ぶ。

(i)  $P$  はソースプレースの集合  $S$  と内部プレースの集合  $Q$  と呼ばれる、空でない互いに素な 2 つ集合からなる ( $P = Q \cup S$ ,  $Q \cap S = \emptyset$ ,  $Q \neq \emptyset$ ,  $S \neq \emptyset$ )。

(ii) 各ソースプレースと各内部プレースに対して出力トランジションが (一意に) 定まる:

$$(\forall q)(\forall x)\{q \in Q \wedge x \in S \implies |q \cdot \cap x| = 1\} \quad (12)$$

(iii) 相異なる 2 つの内部プレースに共通な出力トランジションは存在しない:

$$(\forall p)(\forall q)\{p \in Q \wedge q \in Q \wedge p \neq q \implies |p \cdot \cap q| = 0\} \quad (13)$$

(iv) 相異なる 2 つのソースプレースに共通な出力トランジションは存在しない:

$$(\forall x)(\forall y)\{x \in S \wedge y \in S \wedge x \neq y \implies |x \cdot \cap y| = 0\} \quad (14)$$

(v) ソースプレースへの入力トランジションはない:

$$(\forall x)\{x \in S \implies |\cdot x| = 0\} \quad (15)$$

(vi) 各トランジションの入力プレース数は 2 であり、出力プレース数は 1 である:

$$(\forall t)\{t \in T \implies |\cdot t| = 2 \text{ かつ } |t \cdot| = 1\} \quad (16)$$

■  
 $\forall q \in Q$  と  $\forall x \in S$  に対して、(12)~(14) により、 $q \cdot \cap x = \{t\}$  となる  $t \in T$  が唯一存在し、逆にすべてのトランジションは 2 つの入力プレースをもち、一方は内部プレースであり、他方はソースプレースである。故に、このトランジションを  $t(q, x)$  と表すことができる。そして、(15) により、ソースプレース  $x \in S$  への入力トランジションはないので、トランジションの出力は、常に内部プレースとなる。従って、 $t(q, x)$  に対し、(15) と (16) により、 $(t, q') \in A$  となる唯一の  $q' \in Q$  が存在する。この  $q'$  を  $q(q, x)$  と表す。

**例 1.1** 上記定義の変換ネット  $N$  において、 $x \in S$  に対して、変換:

$$(x)\tau : Q \longrightarrow Q : q \longmapsto q(q, x) \quad (17)$$

が考えられる. 変換集合  $\{(x)\tau | x \in S\}$  で生成される,  $Q$  上の変換半群 (つまり, 上記変換集合を含む最小の変換半群) を  $T(N)$  で表し, ネット  $N$  の特性半群と呼ぶ.

逆に, 集合  $Q$  上の変換の集合  $S$  を考える.  $S$  で生成される変換半群  $S'$  について,  $(Q)S' = \{(q)f | q \in Q, f \in S'\}$  が  $Q$  に等しければ,

$$(i) \quad P = Q \cup S$$

$$(ii) \quad T = Q \times S$$

$$(iii) \quad A = \{(q, (q, f)) | f \in S, q \in Q\} \cup \\ \{(f, (q, f)) | f \in S, q \in Q\} \cup \\ \{(q, f), (q)f | f \in S, q \in Q\}$$

$$(iv) \quad W(q, (q, f)) = W(f, (f, q)) = W((q, f), (q)f) = 1 (W \text{ は適当でよい})$$

とおくことにより, 変換ネット  $N = (P, T, A, W)$  が考えられる. ■

**例 1.2**  $Q$  と  $S$  を空でない互いに素な集合とし,  $\tau$  は  $\tau : S \longrightarrow (Q \longrightarrow Q)$  なる写像とする, このとき, 次のネット  $N = (P, T, A, W)$  は変換ネットになる.

$$(i) \quad P = Q \cup S$$

$$(ii) \quad T = Q \times S$$

$$(iii) \quad A = \{(q, (q, x)), (x, (q, x)), ((q, x), (q)(x)\tau) | q \in Q, x \in S\}$$

$$(iv) \quad W : A \longrightarrow \mathbf{N}^+ \text{ なる写像とする.}$$

$N$  が変換ネットである理由は以下の通りである. (ii) と (iii) より各内部プレース  $q \in Q$  と各ソースプレース  $x \in S$  に対して, それら 2 つを入力プレースとするトランジション  $(q, x)$  が存在し, その出力プレースは内部プレース  $(q)(x)\tau$  唯一つである. そして, これ以外のトランジションは存在しない. これを図示すると, 図 1 のようになる. 図中では, プレースを円で表し, トランジションを線分で表し, そしてアークを矢印で表す.

この変換ネットを,  $Q, S, \tau, W$  によって決まる標準的変換ネットと呼び,  $\mathcal{N}(Q, S, \tau, W)$  と表す. ■

## 2 ネットの同型写像

**定理 2.1** 任意の有限群  $G$  に対して,  $G$  と  $\mathbf{Aut}(N)$  とが同型 ( $\mathbf{Aut}(N) \cong G$ ) となるネット  $N$  が存在する. ■

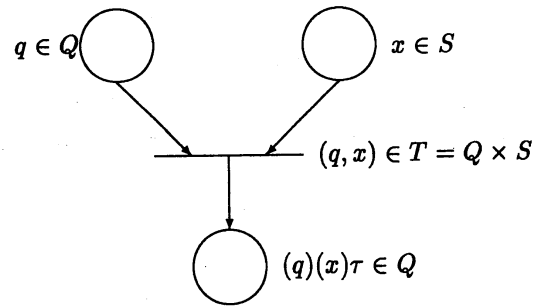


図 1: 標準的変換ネット  $\mathcal{N}(Q, S, \tau, W)$  の構造

**証明**  $G'$  を  $G$  と同型な群とする. なお,  $y \in G$  の同型写像による像を  $y' (\in G')$  と書く.  $\rho: G' \rightarrow \mathbf{N}$  を単射とする. 但し, 任意の  $y' \in G'$  に対して,  $\rho(y') \geq 2$  とする.

このとき, 標準的な変換ネット  $N_1 = \mathcal{N}(G, G', \tau_1, W_1)$  とする. ただし,  $\tau_1: G' \rightarrow (G \rightarrow G)$  と重み付け関数  $W_1$  を次のように定義する.

$$(i) \quad (\forall x \in G)(\forall y' \in G')\{(x)(y')\tau_1 = xy\}$$

$$(ii) \quad (\forall x \in G)(\forall y' \in G')\{W_1(x, (x, y')) = W_1((x, y'), xy) = 1\} \wedge \{W_1(y', (x, y')) = \rho(y')\}$$

つまり,  $P = G \cup G'$  はプレースの集合であり,  $G$  は内部プレースの集合であり,  $G'$  はソース(プレース)の集合である.  $T = G \times G'$  はトランジションの集合であり, 各トランジション  $(x, y') \in G \times G'$  へは内部プレース  $x$  とソースプレース  $y'$  からのちょうど 2 つ入力アークがあり,  $(x, y')$  からは内部プレース  $xy \in G$  へのただ 1 つの出力アークがある. なお, このネット  $N_1$  のアーク全体を  $A_1$  と表すことにする:

$$A_1 = \{(x, (x, y')), (y', (x, y')), ((x, y'), xy) | x \in G, y' \in G'\}$$

そして, ソースプレース  $y'$  からトランジションへのアークの重みは,  $\rho(y') \geq 2$  (なお,  $\rho$  は単射) で与えられ, その他のアークの重みは 1 である. これを図示すると, 図 2 のようになる.

そこで,

1.  $\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$  について,  $\alpha|_{G'} = id_{G'}$ .
2.  $\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$  について,  $\alpha$  が  $G$  の単位元  $e$  を固定するとき,  $\varphi = (\alpha, \beta) = 1$  である, つまり,

$$(e)\alpha = e \implies (\alpha, \beta) = 1. \quad (18)$$

3.  $G$  から  $\mathbf{Aut}(N_1)$  への同型写像  $\phi$  が存在する.



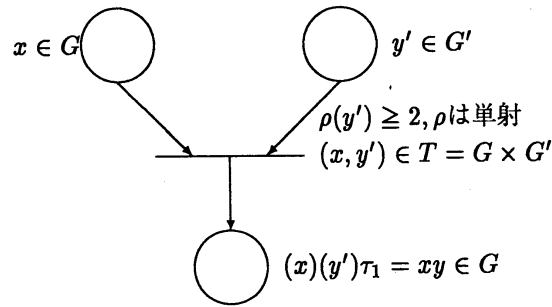


図 2: 標準的変換ネット  $N_1 = \mathcal{N}(G, G', \tau_1, W_1)$

の構造

の 3 段階に分けて証明をする。

1. について  $\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$  とする。この  $N_1$  の自己同型写像  $\varphi$  によって、任意のソース  $y' \in G'$  から出るアーク  $(y', (x, y')) \in A_1$  は、アーク  $((y')\alpha, (x, y')\beta) \in A_1$  に移る。そして、 $\varphi$  の整合性 (7) の条件から、

$$W_1((y')\alpha, (x, y')\beta) = W_1(y', (x, y')) = \rho(y')$$

である。 $\rho$  は単射であるから、 $\rho(y')$  の重さを持つアークは、ネット  $N_1$  中ではソース  $y'$  から出るものに限られる。よって、 $(y')\alpha = y'$ 。 $\alpha$  は  $G'$  のすべての元を固定する。従って、 $\alpha$  の  $G'$  上の制限は単位置換である ( $\alpha|_{G'} = id_{G'}$ )。

2. について  $(e)\alpha = e$  であるとき、任意のソースプレース  $y' \in G'$  に対して、 $\beta$  はトランジション  $(e, y')$  を固定する、すなわち、 $(e, y')\beta = (e, y')$  である。なぜならば、

$$(e, (e, y')) \in A_1 \text{ より, } ((e)\alpha, (e, y')\beta) = (e, (e, y')\beta) \in A_1 \quad (\text{仮定による})$$

$$(y', (e, y')) \in A_1 \text{ より, } ((y')\alpha, (e, y')\beta) = (y', (e, y')\beta) \in A_1 \quad (1. \text{による})$$

$(e, y')\beta$  は、 $e$  と  $y'$  によって決まるトランジションだから、 $(e, y')\beta = (e, y')$ 。

さらに、

$$((e, y'), y) \in A_1 \text{ より, } ((e, y')\beta, (y)\alpha) = ((e, y'), (y)\alpha) \in A_1$$

であるから、 $ey = y = (y)\alpha$  となる。 $\alpha$  は  $G$  の各元を固定する、つまり  $\alpha = id_P$ 。また、 $(x, y') \in G \times G'$  について、

$$(x, (x, y')) \in A_1 \text{ より, } ((x)\alpha, (x, y')\beta) = (x, (x, y')\beta) \in A_1 \quad (\alpha = id_P \text{による})$$

$$(y', (x, y')) \in A_1 \text{ より, } ((y')\alpha, (x, y')\beta) = (y', (x, y')\beta) \in A_1 \quad (\alpha = id_P \text{による})$$

$(x, y')\beta$  は、 $x$  と  $y'$  によって決まるトランジションだから、 $(x, y')\beta = (x, y')$ 。つまり  $\beta = id_T$ 。

3. について 任意の  $g \in G$  に対して、 $\phi(g) = (\alpha_g, \beta_g)$  を次のように定義すると、 $\phi(g)$  は  $N_1$  の自己同型写像になる。すなわち、 $\phi(g) \in \mathbf{Aut}(N_1)$  ( $\phi(G) \subset \mathbf{Aut}(N_1)$ )。

$$(z)\alpha_g = \begin{cases} gz & z \in G \text{ のとき} \\ z & z \in G' \text{ のとき} \end{cases} \quad (19)$$

$$(x, y')\beta_g = (gx, y') \quad (20)$$

逆に, 任意の  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$  に対して, ある  $g \in G$  が存在して,  $(\alpha, \beta) = \phi(g)$  となることを示す:

$(e)\alpha = g$  とする. このとき,  $(\alpha, \beta)$  と  $\phi(g^{-1}) = (\alpha_{g^{-1}}, \beta_{g^{-1}}) \in \mathbf{Aut}(N_1)$  の合成は,

$$(e)\alpha\alpha_{g^{-1}} = (g)\alpha_{g^{-1}} = g^{-1}g = e$$

であるから,  $\alpha\alpha_{g^{-1}}$  は  $e$  を固定するので, 2. により,

$$(\alpha\alpha_{g^{-1}}, \beta\beta_{g^{-1}}) = \mathbf{1}_{\mathbf{Aut}(N_1)} \in \mathbf{Aut}(N_1) \quad (21)$$

となる. ところで,  $\alpha_g$  と  $\beta_g$  の定義により,

$$\begin{aligned} x \in G &\implies (x)\alpha_g\alpha_{g^{-1}} = (gx)\alpha_{g^{-1}} = g^{-1}gx = x \\ y' \in G' &\implies (y')\alpha_g\alpha_{g^{-1}} = (y')\alpha_{g^{-1}} = y' \end{aligned} \quad (22)$$

かつ

$$(x, y') \in G \times G' \implies (x, y')\beta_g\beta_{g^{-1}} = (gx, y')\beta_{g^{-1}} = (g^{-1}gx, y') = (x, y') \quad (23)$$

であるので,  $(\alpha_{g^{-1}})^{-1} = \alpha_g$  および  $(\beta_{g^{-1}})^{-1} = \beta_g$  が成り立つ. よって, 式 (21) と上記の性質から,

$$\alpha = (\alpha_{g^{-1}})^{-1} = \alpha_g \text{ かつ } \beta = (\beta_{g^{-1}})^{-1} = \beta_g \quad (24)$$

従って,

$$\mathbf{Aut}(N_1) = \phi(G) = \{(\alpha_g, \beta_g) | g \in G\} \quad (25)$$

以上により,

$$\phi: G \rightarrow \mathbf{Aut}(N_1): g \longmapsto (\alpha_g, \beta_g) \quad (26)$$

は同型写像である. よって,  $\mathbf{Aut}(N_1) \cong G$  となる. ■

### 3 変換ネットと L 型ペトリネット言語の関係

$N = (P, T, A, W)$  を変換ネットとし, その重み付け関数  $W$  が,  $(\forall a \in A)(W(a) = 1)$  とする.

$\mu_0$  を後で定義する単純マーキングとすると,  $N$  の  $\mu_0$  から可達な集合  $\mathbf{R}_N(\mu_0)$  が有限であるならば,  $(\mu_0$  を初期マーキング,  $F$  を最終状態集合とする)  $N$  の L 型言語  $L_N(\mu_0, F)$  は,

有限状態機械  $C_N(\mu_0, F) = (\mathbf{R}_N(\mu_0), \delta_N, T, \mu_0, F)$  によって生成されるので、正規言語となる。以下では、 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$  が有限であることを証明する。

まず、マーキングについての定義をする。

**定義 3.1**  $N = (P, T, A, W)$  を変換ネットし、 $\mu : P \rightarrow \omega$  を拡張マーキングとする。また、任意の内部プレース  $p \in Q$  に対して、 $\mu(p) \neq \infty$  のとき、 $\mu$  のことを単純マーキングと呼ぶ。単純マーキング  $\mu$  の内部プレース集合  $Q$  上への制限  $\mu|_Q$  を内部マーキングと呼び、 $\bar{\mu}$  で表す。 ■

まず、変換ネットに関する定理を証明するために、補題を示す。なお、以下では、混乱を招かない場合は  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  のようにプレースに番号がついているとし、 $\mu$  を  $n$  項対  $(\mu(p_1), \mu(p_2), \dots, \mu(p_n))$  で表す。

**補題 3.1**  $N = (P, T, A, W)$  を変換ネットとし、 $(\forall a \in A)(W(a) = 1)$  とする。さらに、 $\mu_0$  を単純マーキング  $\mu_0$  とする。このとき、初期マーキング  $\mu_0$  から可達なマーキングの集合  $\mathbf{R}_N(\mu_0)$  は有限集合である。 ■

**証明** 単純マーキングには、

1. 任意の  $x \in S$  について、 $\mu(x) = \infty$  .
2. 任意の  $x \in S$  について、 $\mu(x) \neq \infty$  .
3. ある  $x \in S$  について、 $\mu(x) = \infty$ 、ある  $y \in S$  について、 $\mu(x) \neq \infty$  .

の 3 種類のケースがある。

1. の場合  $\bar{\mu} = (m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n)$  を内部マーキングとする。  $\bar{\mu}(p_i) = m_i > 0$  とする。このとき、任意の  $x \in S$  について、 $p_i$  と  $x$  で定まるトランジション  $t$  は発火可能である。  $t = \{p_j\}$  ならば

$$\bar{\mu} = (m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n) \xrightarrow{t} (m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_j + 1, \dots, m_n) \quad (27)$$

となる。よって、 $t$  を繰り返し  $m_i$  回発火させたのち、 $p_i$  のトークンはすべて  $p_j$  に移る。従って、 $\mu_0$  から可達な内部マーキング  $\bar{\mu} = (m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n)$  は、整数方程式:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n m_i = m \quad (28)$$

の非負整数解でなくてはならない。よって、

$$|\mathbf{R}_N(\mu_0)| \leq_{n+m-1} C_m \quad (29)$$

である。等号は、特性半群  $T(N)$  が  $Q$  上可移の (すなわち、任意の  $q, q' \in Q$  に対して、ある  $s \in T(N)$  が存在して  $q' = (q)s$  となる) ときに成り立つ。

2. と 3. の場合

$$X = \{x \in S \mid \mu(x) \neq \infty\} \subset S \quad (30)$$

とおく、内部マーキング  $\bar{\mu}$  に、 $r = |X|$  個の項を付けた  $r + n$  対を考える:

$$(\mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_r); \mu(p_1), \mu(p_2), \dots, \mu(p_n)) \text{ 但し, } x_i \in X, p_j \in Q \quad (31)$$

$y \in S - X$  のとき、 $t \in y$  なる  $t$  が発火しても、 $k_1 = (\sum_{i=1}^r \mu(x_i)) + (\sum_{j=1}^n \mu(p_j))$  の値は不変である。

$x \in X$  のとき、 $t \in x$  なる  $t$  が発火すると、 $t = \{x, p\}$  であるソースプレース  $x$  と内部プレース  $p$  からトークンが一つずつ除かれ、 $t = \{q\}$  である内部プレース  $q$  へトークンが1つ追加される。従って、 $t$  の発火によって、ネットのトークンの総数は1つ減る。従って、 $k_0 = (\sum_{j=1}^n \mu(p_j))$  とすると、起こり得る  $r + n$  項対  $(u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_n)$  は、整数不等式:

$$k_0 \leq u_1 + u_2 + \dots + u_r + v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq k_1 \quad (32)$$

の非負整数解でなくてはならない。つまり、 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$  は有限である。 ■

**定理 3.1**  $N = (P, T, A, W)$  を変換ネットとし、 $(\forall a)(W(a) = 1)$  とする。さらに、 $\mu_0$  を単純マーキング  $\mu_0$  とし、 $F$  を任意のマーキングの集合とする。このとき、 $\mu_0$  を初期マーキングとし  $F$  を最終状態集合とする  $N$  の L 型ペトリネット言語  $L_N(\mu_0, F)$  は正規である。 ■

**証明** 上記補題により、可達なマーキング集合  $\mathbf{R}_N(\mu_0)$  は有限集合であるから、 $N$  から有限状態機械  $C_N(\mu_0, F)$  が構成される。そして  $L_N(\mu_0, F)$  は、 $C_N(\mu_0, F)$  によって生成される正規言語  $L(C_N(\mu_0, F))$  と一致する。 ■

## 参考文献

- [1] James. L. Peterson: "Petri net theory and the modeling of systems", Prentice-Hall, (1981), 邦訳 "ペトリネット入門", 市川・小林訳, (共立出版).