数理解析研究所講究録
913 巻 1995 年 185-190

Navier–Stokes 方程式の外部問題について

小林 孝行 (Takayuki Kobayashi) 筑波大・数学系

柴田 良弘 (Yoshihiro Shibata) 筑波大・数学系

本講演は我々の共同研究 ([KbS 1, 2]) の発表を中心に行いたいと思う. 3 次元物体 $\mathcal{O}$ のまわりを流れる非圧縮性粘性流体の運動はいわゆる次の Navier–Stokes 方程式によって記述される.

$$\text{(1.a)} \qquad \partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\Omega,$$

$$\text{(1.b)} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } (0,\infty)\times\partial\Omega,$$

$$\text{(1.c)} \qquad \mathbf{u}(0,x) = \mathbf{a} \quad \text{in } \Omega,$$

$$\text{(1.d)} \qquad \lim_{|x|\to\infty} \mathbf{u}(t,x) = \mathbf{u}_\infty, \quad {}^\forall t \in [0,\infty).$$

但し簡単の為, 質量密度と粘性係数は共に 1 とした. また基本的な記号として, Ω は $\mathcal{O}$ の補集合, $\partial\Omega$ はその境界でなめらかな超曲面であると仮定する, $x = (x_1, x_2, x_3)$ は $\mathbf{R}^3$ の点, t は時間, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial_j$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, $\nabla = {}^T(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ (^{T} は転置を表す), $\cdot$ は $\mathbf{R}^3$ の通常の内積, $\mathbf{0} = {}^T(0,0,0)$, 太字のアルファベットはベクトル値関数を表す. 例えば $\mathbf{u} = {}^T(u_1, u_2, u_3)$. ここではいわゆる強解の時間大域的一意存在についてのみ考察する. $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{0}$ かつ $\mathcal{O}$ が空集合の場合 ($\Omega = \mathbf{R}^3$) は T. Kato [Ka] により初期値 $\mathbf{a}$ の L_3 ノルムが十分小かつ $\nabla\cdot\mathbf{a} = 0$ の場合に強解の時間大域的一意存在が示された. その方法は線形部分の Stokes 作用素に対する Cauchy 問題の解の後に詳しく述べるいわゆる L_q–L_r 評価と云われるものを示し, 非線形項を small perturbation と見なして問題（1）を解くというものである. $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{0}$ かつ $\mathcal{O}$ が空でない有界集合の場合は H.Iwashita [I] により初期値 $\mathbf{a}$ の L_3 ノルムが十分小かつ $\nabla\cdot\mathbf{a} = 0$ の場合に強解の時間大域的一意存在が示された. その方法はやはり線形部分の Stokes 作用素に対する外部問題の解の L_q–L_r 評価を示し, 非線形項を small perturbation と見なして問題（1）を解くというものである. ここでは, $\mathbf{u}_\infty \neq \mathbf{0}$ の場合について T. Kato [Ka] 及び H. Iwashita [I] の結果を拡張できることについて述べたいと思う. R. Finn [ChF, Fi 1–Fi 6] の定常問題に関する良く知られた仕事に続いて J. G. Heywood [He 1–He 3] は $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_\infty(t)$ が $L_2(0,\infty)$ の元となる場合に L_2 の意味での弱解の存在を示した.（さらなる研究については K. Masuda [Ma 1] を参照せよ.）ここでの興味は $\mathbf{u}_\infty$ が定数ベクトルの時の時間大域的強解の一意存在を示す事にある. 講演者の知る限り長年の未解決問題であった. 解く過程を述べながら主定理を述べていこう.

記号. 先ずここで用いる記号の説明をしよう. D を $\mathbf{R}^3$ の領域とするとき, $L_q(D)$ を D 上の通常の L_q空間, $\|\cdot\|_{q,D}$ をそのノルムとする. さらに次のようにおく.

$$\|\mathbf{u}\|_{q,D} = \left(\sum_{j=1}^{3} \|u_j\|_{q,D}^q\right)^{1/q} \quad (1 \leqq q < \infty); \quad \|\mathbf{u}\|_{\infty,D} = \max_{j=1,2,3} \|u_j\|_{\infty,D},$$

$$\|u\|_{q,m,D} = \|\overline{\partial}_x^m u\|_{q,D};\ \ \|\mathbf{u}\|_{q,m,D} = \|\overline{\partial}_x^m \mathbf{u}\|_{q,D};\ \ \overline{\partial}_x^m u = (\partial_x^\alpha u, |\alpha| \leqq m).$$

簡単の為，次の省略形を用いる．

$$\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{q,\Omega},\ \|\cdot\|_{q,m} = \|\cdot\|_{q,m,\Omega},\ |\cdot|_q = \|\cdot\|_{q,\mathbf{R}^3},\ |\cdot|_{q,m} = \|\cdot\|_{q,m,\mathbf{R}^3}.$$

$\mathcal{S}'$ は tempered distributions の空間，また $C_0^\infty(D)$ を D に含まれるコンパクトな台をもつ無限階微分可能な関数の全体，さらに次の様に空間を定義する．

$$L_{q,b}(D) = \{u \in L_q(D) \mid u(x) = 0\ \ {}^\forall x \notin B_b\},\ B_b = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| < b\};$$
$$W_{q,loc}^m(\mathbf{R}^3) = \{u \in \mathcal{S}' \mid \partial_x^\alpha u \in L_q(B_b)\ \ {}^\forall\alpha : |\alpha| \le m \text{ and } {}^\forall b > 0\};$$
$$W_{q,loc}^m(D) = \{u \mid {}^\exists U \in W_{q,loc}^m(\mathbf{R}^3) \text{ such that } u = U \text{ on } D\};$$
$$L_{q,loc}(D) = W_{q,loc}^0(D);$$
$$W_q^m(D) = \{u \in W_{q,loc}^m(D) \mid \|u\|_{q,m,D} < \infty\};$$
$$\dot{W}_q^m(D) = \text{the completion of } C_0^\infty(D) \text{ with respect to } \|\cdot\|_{q,m,D};$$
$$\dot{W}_{q,a}^m(D) = \{u \in \dot{W}_q^m(D) \mid \int_D u(x)dx = 0\};$$
$$\hat{W}_q^m(D) = \{u \in W_{q,loc}^m(D) \mid \|\partial_x^m u\|_{q,D} < \infty\},\ \ \partial_x^m u = (\partial_x^\alpha u, |\alpha| = m).$$

3次元ベクトル値関数の対応する空間を次の様に表す．

$$\mathbb{L}_q(D) = \{\mathbf{u} = {}^T(u_1, u_2, u_3) \mid u_j \in L_q(D), j = 1, 2, 3\}.$$

また，$\mathbb{C}_0^\infty(D)$, $\mathbb{L}_{q,b}(D)$, $\mathbb{W}_{q,loc}^m(D)$, $\mathbb{L}_{q,loc}(D)$, $\mathbb{W}_q^m(D)$, $\dot{\mathbb{W}}_q^m(D)$, $\hat{\mathbb{W}}_q^m(D)$ も同様に定義される．更に

$$\mathbb{J}_q(D) = \text{the completion in } \mathbb{L}_q(D) \text{ of the set } \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}_0^\infty(D) \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } D\};$$
$$\mathbb{G}_q(D) = \{\nabla p \mid p \in \hat{W}_q^1(D)\}.$$

と置く． この時，D. Fujiwara and H. Morimoto [FwM], T. Miyakawa [Mi] により Banach 空間 $\mathbb{L}_q(D)$ はつぎの Helmholtz 分解をもつ．

$$\mathbb{L}_q(D) = \mathbb{J}_q(D) \oplus \mathbb{G}_q(D) \qquad \oplus \text{ は直和}$$

$\mathbb{P}$ を $\mathbb{L}_q(\Omega)$ から $\mathbb{J}_q(\Omega)$ の上への continuous projection とする．Stokes 作用素 $\mathbb{A}$ と Oseen 作用素 $\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty)$ は定義域を $\mathcal{D}_q(\mathbb{A}) = \mathcal{D}_q(\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty)) = \mathbb{J}_q(\Omega) \cap \dot{\mathbb{W}}_q^1(\Omega) \cap \mathbb{W}_q^2(\Omega)$ とする関係式 $\mathbb{A} = -\mathbb{P}\Delta$ と $\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty) = \mathbb{A} + \mathbb{P}(\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla)$ によって各々定義される作用素とする．$\mathcal{B}(I; X)$ を I 上定義された X 値の有界連続な関数の全体とする．T. Miyakawa [Mi] により $\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty)$ は $\mathbb{J}_q(\Omega)$ 上の解析的半群 $e^{-t\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty)}$ 生成する事が知られている．

主定理．第一段階として $\mathbf{u}(t,x)=\mathbf{u}_\infty+\mathbf{v}(t,x)$ と置くと $\mathbf{v}$ についての方程式はつぎのものとなる．

$$\begin{array}{llr}
(2.a) & \partial_t\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v}+(\mathbf{u}_\infty\cdot\nabla)\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\nabla p=\mathbf{0},\ \ \nabla\cdot\mathbf{v}=0 & \text{in } (0,\infty)\times\Omega,\\
(2.b) & \mathbf{v}=-\mathbf{u}_\infty & \text{on } (0,\infty)\times\partial\Omega,\\
(2.c) & \mathbf{v}(0,x)=\mathbf{a}-\mathbf{u}_\infty & \text{in } \Omega.
\end{array}$$

境界条件を零と為すために，次の Oseen 方程式に対する定常問題を考える．

$$(3)\ \ -\Delta\mathbf{w}+(\mathbf{u}_\infty\cdot\nabla)\mathbf{w}+(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{w}+\nabla p=\mathbf{0},\ \ \nabla\cdot\mathbf{w}=0\ \ \text{in }\Omega,\ \ \mathbf{w}=-\mathbf{u}_\infty\ \ \text{on }\partial\Omega.$$

この $\mathbf{w}$ を用いて $\mathbf{u}(t,x)=\mathbf{u}_\infty+\mathbf{w}(x)+\mathbf{v}(t,x)$ と改めて置きなおすと $\mathbf{v}$ に対する方程式は次のものとなる．

$$\begin{array}{llr}
(4.a) & \partial_t\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v}+(\mathbf{u}_\infty\cdot\nabla)\mathbf{v}+L[\mathbf{w}]\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\nabla p=\mathbf{0}, & \text{in } (0,\infty)\times\Omega,\\
(4.b) & \nabla\cdot\mathbf{v}=0 & \text{in } (0,\infty)\times\Omega,\\
(4.c) & \mathbf{v}=\mathbf{0} & \text{on } (0,\infty)\times\partial\Omega,\\
(4.d) & \mathbf{v}(0,x)=\mathbf{b}=\mathbf{a}-\mathbf{u}_\infty-\mathbf{w} & \text{in } \Omega.
\end{array}$$

但し，$L[\mathbf{w}]\mathbf{v}=(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{w}$. T. Kato [Ka] のアイデアに従って，方程式（４）を次の積分方程式として解くことにする．

$$(5)\qquad \mathbf{v}(t)=e^{-t\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty)}\mathbf{b}-\int_0^t e^{-(t-s)\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty)}\mathbb{P}(L[\mathbf{w}]\mathbf{v}(s)+(\mathbf{v}(s)\cdot\nabla)\mathbf{v}(s))ds.$$

まず基本となるのは $e^{-t\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty)}$ に対する次のいわゆる L_q–L_r 評価である．

Theorem 1. *(1) Let $1<q\leqq r<\infty$ and let $\kappa>0$ be any small number. Then, there exists a constant σ_0: $0<\sigma_0\leqq 1$ depending on q but independent of κ, $\mathbf{u}_\infty$ and r such that*

$$(6)\quad \|e^{-t\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty)}\mathbf{a}\|_r\leqq C_{q,r,\kappa}|\mathbf{u}_\infty|^{-\kappa}t^{-\nu}\|\mathbf{a}\|_q\quad {}^\forall t>0,\ \ {}^\forall\mathbf{a}\in\mathbb{J}_q(\Omega),\ \ \nu=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right),$$

provided that $0<|\mathbf{u}_\infty|\leqq\sigma_0$, where $C_{q,r,\kappa}$ is independent of $\mathbf{u}_\infty$.
(2) In addition, we assume that $1<q\leqq r\leqq 3$. Then,

$$(7)\qquad \|\nabla e^{-t\mathbb{O}(\mathbf{u}_\infty)}\mathbf{a}\|_r\leqq C_{q,r,\kappa}|\mathbf{u}_\infty|^{-\kappa}t^{-(\nu+1/2)}\|\mathbf{a}\|_q\quad {}^\forall t>0,\ \ \mathbf{a}\in\mathbb{J}_q(\Omega)$$

provided that $0<|\mathbf{u}_\infty|\leqq\sigma_0$.

方程式（３）の可解性と解の評価に対しては次の定理が成立する．

Theorem 2. *Let* $3 < q < \infty$ *and let* δ *and* β *be any numbers such that* $0 < \delta < \beta < 1 - \delta$. *Then, there exists a constant* $\sigma_1 : 0 < \sigma_1 \leqq 1$ *depending on* q, δ *and* β *but independent of* $\mathbf{u}_\infty$ *such that if* $0 < |\mathbf{u}_\infty| \leqq \sigma_1$, *then the problem* (3) *admits solutions* $\mathbf{w} \in \mathbb{W}_q^2(\Omega)$ *and* $p \in W_q^1(\Omega)$ *possessing the estimate:*

$$\|\mathbf{w}\|_{q,2} + |||\mathbf{w}|||_\delta + \|p\|_{q,1} \leqq |\mathbf{u}_\infty|^\beta. \tag{8}$$

Here, we put

$$|||\mathbf{w}|||_\delta = \sup_{x\in\Omega}(1+|x|)(1+s(\mathbf{u}_\infty)(x))^\delta|\mathbf{w}(x)| + \sup_{x\in\Omega}(1+|x|)^{3/2}(1+s(\mathbf{u}_\infty)(x))^{1/2+\delta}|\nabla\mathbf{w}(x)|, \tag{9}$$

$$s(\mathbf{u}_\infty)(x) = |x| - \mathbf{u}_\infty \cdot x/|\mathbf{u}_\infty|. \tag{10}$$

積分方程式（５）を解く為に次のいわゆる一般化されたポアンカレの不等式が解の評価において重要な働きをなす.

Theorem 3. *Let* $0 \leqq \alpha < 1/3$ *and put* $d(x) = s(\mathbf{u}_\infty)(x)^\alpha|x|^{1-\alpha}\log|x|$. *Then,*

$$\int_\Omega \left|\frac{v(x)}{d(x)}\right|^3 dx \leqq C\|\nabla v\|_3^3 \quad {}^\forall v \in \dot{W}_3^1(\Omega). \tag{11}$$

Kato [Ka] の議論に沿って Theorems 1, 2 and 3 を用いて次の結果を得る.

Theorem 4. *Let* q *be a fixed number* > 3. *Then, there exists a constant* $\epsilon > 0$ *such that if* $\mathbf{a} \in \mathbb{J}_3(\Omega)$, $0 < |\mathbf{u}_\infty| \leqq \epsilon$ *and* $\|\mathbf{a} - \mathbf{u}_\infty\|_3 \leqq \epsilon$, *then the problem* (4) *admits a unique solution* $\mathbf{v}(t,x) \in \mathcal{B}([0,\infty);\mathbb{J}_3(\Omega))$ *possessing the following properties:*

$$t^{3(1/3-1/q)/2}\mathbf{v}(t,x) \in \mathcal{B}([0,\infty);\mathbb{J}_q(\Omega)), \tag{12}$$

$$t^{1/2}\nabla\mathbf{v}(t,x) \in \mathcal{B}([0,\infty);\mathbb{L}_3(\Omega)), \tag{13}$$

$$\lim_{t\to 0+} \|\mathbf{v}(t,\cdot) - \mathbf{b}\|_3 + [\mathbf{v}]_{q,3(1/3-1/q)/2,t} + [\nabla\mathbf{v}]_{3,1/2,t} = 0. \tag{14}$$

Here, we put

$$[v]_{q,\rho,t} = \sup_{0<s<t} s^\rho\|v(s,\cdot)\|_q. \tag{15}$$

こうして得られた $\mathbf{w}(x)$ と $\mathbf{v}(t,x)$ を用いて $\mathbf{u}(t,x) = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{w}(x) + \mathbf{v}(t,x)$ と置くとこれがもとの方程式（１）の所求の解である.

最後に我々の話に関連する Navier–Stokes 方程式に関する若干の文献を掲げておく, 勿論完全を期しているわけではないことをお断りして置く.

NAVIER–STOKES 方程式に関する文献

[BrM 1] W. Borchers and T. Miyakawa, *Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exterior domains*, Acta Math. **165** (1990), 189–227.

[BrM 2] ______, *Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exterior domains, II*, Hiroshima Math. J. **21** (1991), 621–640.

[BrM 3] ______, *On stability of exterior stationary Navier–Stokes flows*, Acta Math. (to appear).

[Fi 1] R. Finn, *Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier-Stokes equations*, Bull. Math. dela Soc. Sci. Math. Phys. de la RPR. **3 (51)** (1959), 387–418.

[Fi 2] ______, *An energy theorem for viscous fluid motions,*, Arch. Rational Mech. Anal. **6** (1960), 371–381.

[Fi 3] ______, *On the steady-state solutions of the Navier–Stokes equations, III*, Acta Math. **105** (1961), 197–244.

[Fi 4] ______, *On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations and associated perturbation problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **19** (1965), 363–406.

[Fi 5] ______, *Stationary solutions of the Navier–Stokes equations*, Proc. Symp. Appl. Math. **19** (1965), 121–153, Amer. Math. Soc..

[Fi 6] ______, *Mathematical questions relating to viscous fluid flow in an exterior domain*, Rocky Mountain J. Math. **3 (1)** (1973), 107–140.

[FtK] H. Fujita and T. Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem I*, Arch. Rational Mech. Anal. **16** (1964), 269–315.

[FwM] D. Fujiwara and H. Morimoto, *An L_r–theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec., 1 **24** (1977), 685–700.

[Ga] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations*, Springer Tracts in Natural philosophy.

[He 1] J. G. Heywood, *On stationary solutions of the Navier-Stokes equations as limits of non–stationary solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **37** (1970), 48–60.

[He 2] ______, *The exterior nonstationary problem for the Navier–Stokes equations*, Acta Math. **129** (1972), 11–34.

[He 3] ______, *The Navier-Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 639–681.

[I] H. Iwashita, *L_q–L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier–Stokes initial value problems in L_q spaces*, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.

[Ka] T. Kato, *Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbf{R}^m$ with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471–480.

[KbM] T. Kobayashi and T. Muramatsu, *Abstract Besov space approach to the non-stationary Navier–Stokes equations*, Math. Meth. Appl. Sci. **15** (1992), 949–966.

[KbS 1] T. Kobayashi and Y. Shibata, *On the Oseen equation in exterior domains*, Preprint in 1994.

[KbS 2] ______, *The exterior initial-boundary value problem for nonstationary Navier–Stokes equations*, Preprint in 1994.

[Kz] H. Kozono, *On the Navier-Stokes equations in an exterior domain*, private notes in japanese.

[KzY 1] H. Kozono and M. Yamazaki, *Local and global unique solvability of the Navier–Stokes exterior problem with Cauchy data in the Space* $L^{n,\infty}$, preprint in 1994.

[KzY 2] ______, *Navier–Stokes equations in exterior domains*, preprint in 1994.

[Ma 1] K. Masuda, *On the stability of incompressible viscous fluid motions past objects*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 294–327.

[Mi] T. Miyakawa, *On nonstationary solutions of the Navier–Stokes equations in an exterior domain*, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 115–140.

[Os] C. W. Oseen, *Neuere Methoden und Ergebniss in der Hydrodynamik*, Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., Leipnig, 1927.

NAVIER–STOKES 方程式に関する文献

[BrM 1] W. Borchers and T. Miyakawa, *Algebraic L^2 decay for Navier–Stokes flows in exterior domains*, Acta Math. **165** (1990), 189–227.

[BrM 2] ______, *Algebraic L^2 decay for Navier–Stokes flows in exterior domains, II*, Hiroshima Math. J. **21** (1991), 621–640.

[BrM 3] ______, *On stability of exterior stationary Navier–Stokes flows*, Acta Math. (to appear).

[Fi 1] R. Finn, *Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier–Stokes equations*, Bull. Math. dela Soc. Sci. Math. Phys. de la RPR. **3 (51)** (1959), 387–418.

[Fi 2] ______, *An energy theorem for viscous fluid motions,*, Arch. Rational Mech. Anal. **6** (1960), 371–381.

[Fi 3] ______, *On the steady-state solutions of the Navier–Stokes equations, III*, Acta Math. **105** (1961), 197–244.

[Fi 4] ______, *On the exterior stationary problem for the Navier–Stokes equations and associated perturbation problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **19** (1965), 363–406.

[Fi 5] ______, *Stationary solutions of the Navier–Stokes equations*, Proc. Symp. Appl. Math. **19** (1965), 121–153, Amer. Math. Soc..

[Fi 6] ______, *Mathematical questions relating to viscous fluid flow in an exterior domain*, Rocky Mountain J. Math. **3 (1)** (1973), 107–140.

[FtK] H. Fujita and T. Kato, *On the Navier–Stokes initial value problem I*, Arch. Rational Mech. Anal. **16** (1964), 269–315.

[FwM] D. Fujiwara and H. Morimoto, *An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec., 1 **24** (1977), 685–700.

[Ga] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations*, Springer Tracts in Natural philosophy.

[He 1] J. G. Heywood, *On stationary solutions of the Navier–Stokes equations as limits of non-stationary solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **37** (1970), 48–60.

[He 2] ______, *The exterior nonstationary problem for the Navier–Stokes equations*, Acta Math. **129** (1972), 11–34.

[He 3] ______, *The Navier–Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 639–681.

[I] H. Iwashita, *L_q–L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier–Stokes initial value problems in L_q spaces*, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.

[Ka] T. Kato, *Strong L^p-solutions of the Navier–Stokes equation in $\mathbf{R}^m$ with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471–480.

[KbM] T. Kobayashi and T. Muramatsu, *Abstract Besov space approach to the non-stationary Navier–Stokes equations*, Math. Meth. Appl. Sci. **15** (1992), 949–966.

[KbS 1] T. Kobayashi and Y. Shibata, *On the Oseen equation in exterior domains*, Preprint in 1994.

[KbS 2] ———, *The exterior initial-boundary value problem for nonstationary Navier–Stokes equations*, Preprint in 1994.

[Kz] H. Kozono, *On the Navier–Stokes equations in an exterior domain*, private notes in japanese.

[KzY 1] H. Kozono and M. Yamazaki, *Local and global unique solvability of the Navier–Stokes exterior problem with Cauchy data in the Space* $L^{n,\infty}$, preprint in 1994.

[KzY 2] ———, *Navier–Stokes equations in exterior domains*, preprint in 1994.

[Ma 1] K. Masuda, *On the stability of incompressible viscous fluid motions past objects*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 294–327.

[Mi] T. Miyakawa, *On nonstationary solutions of the Navier–Stokes equations in an exterior domain*, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 115–140.

[Os] C. W. Oseen, *Neuere Methoden und Ergebniss in der Hydrodynamik*, Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., Leipnig, 1927.