数理解析研究所講究録
914巻 1995年 28-39

流体運動の幾何学的側面

神部　勉　（東大理）

1．はじめに

流体の運動は、ある時刻の流体粒子の配置から、次の時刻の流体粒子の配置への写像とみることができる。流線（正確には粒跡線）に沿うこの写像（Lie dragging）は微分同相写像（diffeomorphism）をなす。完全流体の運動方程式である Euler 方程式は、この微分同相写像群の測地線方程式となっている。この微分同相写像群は無限次元の多様体で、測地線は一般には flat ではなく、ゼロでないリーマン曲率を有することが示される。このような幾何学的な考察は最初 Arnold (1966) によってなされて、その後数学者によって発展させられ、数理物理学の一分野を形成するまでになってきている。

本稿では、まず力学理論の骨格であるポアソン括弧とハミルトン関数による定式化とその一般化を述べる。次に、KdV 方程式および非線形シュレディンガー(NLS) 方程式などのソリトン系が、二重ハミルトン力学系であることを示す。これらの方程式は、水波および渦線運動といった流体運動から導かれることはよく知られている。続く第4節では、完全流体の運動方程式のハミルトン形式を示す。これらの方程式は、Lie 群上の測地線方程式になっている。その幾何学的概念を、直線のアフィン変換群を例にとって説明する（第5節）。第6節で流体運動のリーマン曲率、第7節でKdV 方程式のリーマン曲率を示す。著しい性質は、完全流体の運動では一般に負の曲率が得られるのに対し、KdV系では曲率が正になることである。

2．ポアソン括弧とその一般化

古典的な $2n$ 自由度のハミルトン力学系の一般座標、一般運動量を $q=(q_k)$, $p=(p_k)$ $(k=1, . . . , n)$ とし、その関数を $F(q,p)$, $G(q,p)$ と書こう。この力学系のハミルトン関数を $H(q,p)$ とすると、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}q_i=\{q_i,H\},\qquad \frac{d}{dt}p_i=\{p_i,H\} \tag{1}$$

と表される。ここで、$F(q,p)$, $G(q,p)$ に対するポアソン括弧は

$$\{F,G\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k}-\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right) \tag{2}$$

で与えられる。

場 $Q(x)$, $P(x)$ の無限自由度の力学系にこれを拡張するに当たっては、変数 x は座標のラベルとみなされる。汎関数 $F[Q,P]$, $G[Q,P]$ に対するポアソン括弧は

$$\{F,G\}=\int_V\left(\frac{\delta F}{\delta Q(x)}\frac{\delta G}{\delta P(x)}-\frac{\delta F}{\delta P(x)}\frac{\delta G}{\delta Q(x)}\right)dV \tag{3}$$

と書かれる。ただし、$\delta F/\delta Q$ は汎関数微分で、$(Q(x), P(x))$ の時間発展は

$$\frac{\partial}{\partial t}Q=\{Q,H\}\ , \qquad \frac{\partial}{\partial t}P=\{P,H\} \tag{4}$$

で与えられ、これは無限次元の力学系とみなされる。

ここで、 q と p を結合した変数 $(u^{\mu})=(q_k,p_k)$ を導入すると、ポアソン括弧の定義から

$$\{u^{\mu},u^{\nu}\}=\varepsilon^{\mu\nu}\ , \qquad [\varepsilon^{\mu\nu}]=\begin{bmatrix}O_n & I_n\\ -I_n & O_n\end{bmatrix} \tag{5}$$

を得る。ここで、I_n, O_n は n行 n列の単位行列、0行列である。この $\varepsilon^{\mu\nu}$ を使うと、ポアソン括弧が

$$\{F,G\}=\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial u^{\mu}}\frac{\partial G}{\partial u^{\nu}}$$

と内積の形に書けることがわかる。これを汎関数に拡張すると、

$$\{F,G\}=\int dx\int dy\ \ \{u(x),u(y)\}\ \frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{\delta G}{\delta u(y)} \tag{6}$$

と書ける。ここで、$u=(Q,P)$ として、

$$\begin{aligned}&\{Q(x),P(y)\}=\delta(x-y), && \{P(x),\ Q(y)\}=-\delta(x-y)\\ &\{Q(x),\ Q(y)\}=0, && \{P(x),\ P(y)\}=0\end{aligned} \tag{7}$$

とすると、式（３）に帰着する。これを拡張して、次の local skew-symmetric bilinear form （局所的２次形式）を定義する：

$$\{u,v\} = \int_{\Omega} a_{\mu\nu}(x, w^{\lambda}(x)) \ \ u^{\mu}(x) \ \ u^{\lambda}(x) \ \ d\Omega(x), \qquad a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu} \tag{8}$$

Localの意味は、skew-symmetricな $a_{\mu\nu}$ が場 $w^{\lambda}(x)$ に依存することである。ここで $\{u,v\}$ が closed であることを要請しよう。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}} a_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} a_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial u^{\nu}} a_{\lambda\mu} = 0$$

このときには、ポアソン括弧 $\{u,v\}$ はヤコビ恒等式を満たすことが示される（Magri 1978)。

このようにして、ポアソン括弧が有限次元から無限次元へ、非局所形から局所形への拡張がなされることがわかる。その結果、一つの発展方程式に対して、ポアソン括弧（６）と local なポアソン括弧（８）の２種のポアソン括弧と、２種のハミルトン関数があって、同じ発展方程式が導かれる力学系が知られている。ソリトン力学系のＫｄＶ方程式および非線形シュレディンガー方程式がその例であるが、後者については別の新しい形を提出する。

Magri（1978）によれば、２つの独立なハミルトン関数をもつ力学系は、逐次に無限個の保存量を決定することができる。このため、無限個の保存量をもつソリトン系はみな第２ハミルトン関数を有すると推測される。

３．二重ハミルトン関数の力学系

ここではＫｄＶ方程式および非線形シュレディンガー（ＮＬＳ）方程式に対し、二組のポアソン括弧およびハミルトン関数を示す。

ＫｄＶ系： $u_t \ = \ 6u\,u_x - \ u_{xxx}$

[I] First system:

$$\{u(x), \ u(y)\}_{\mathrm{I}} = \delta'(x-y)$$

$$\{F, G\}_{\mathrm{I}} = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \left(\frac{\delta G}{\delta u(x)} \right)_x ,$$

$$H_{\mathrm{I}} = \int dx \left[\ \frac{1}{2}(u_x)^2 \ + \ u^3 \ \right]$$

$$\{u(x), \ H_{\mathrm{I}}\}_{\mathrm{I}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta H_{\mathrm{I}}}{\delta u(x)} \right)$$

$$u_t = \{u(x), \ H_{\mathrm{I}}\}_{\mathrm{I}} = 6u\,u_x - u_{xxx}$$

[II] Second syst

$$\{u(x),u(y)\}_{\mathrm{II}} = -\delta'''(x-y) + 2u(x)\ \delta'(x-y) + \partial_x\left(2u(x)\delta(x-y)\right)$$

$$\{F,G\}_{\mathrm{II}} = \int dx\ \frac{\delta F}{\delta u(x)}\left[-\left(\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)''' + 4u(x)\left(\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)' + 2u'(x)\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right]$$

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\int dx\ u^2(x)$$

$$\{u(x),H\}_{\mathrm{II}} = -\left(\frac{\delta H}{\delta u(x)}\right)''' + 4u(x)\left(\frac{\delta H}{\delta u(x)}\right)' + 2u'(x)\frac{\delta H}{\delta u(x)}$$

$$u_t = \{u(x),H_{\mathrm{II}}\}_{\mathrm{II}} = 6u\,u_x - u_{xxx}$$

NLS系： $i\ u_t = -u_{xx} + 2|u|^2 u$

[I] First system:

$$\{u(x),\bar{u}(y)\}_{\mathrm{I}} = -\{\bar{u}(x),u(y)\}_{\mathrm{I}} = -i\,\delta(x-y)$$

$$\{u(x),u(y)\}_{\mathrm{I}} = \{\bar{u}(x),\bar{u}(y)\}_{\mathrm{I}} = 0$$

$$\{F,G\}_{\mathrm{I}} = -i\int\left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{\delta G}{\delta \bar{u}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \bar{u}(x)}\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)dx$$

$$H_{\mathrm{I}} = \int dx\left[\ u_x\overline{u_x} + u^2\bar{u}^2\ \right]$$

$$\{u(x),H_{\mathrm{I}}\}_{\mathrm{I}} = -i\frac{\delta H}{\delta \bar{u}(x)}$$

$$u_t = \{u(x),\ H_{\mathrm{I}}\}_{\mathrm{I}} = -i\left(-\partial_x u_x + 2u^2\bar{u}\right)$$

[II] Second system:

$$\{u(x),\bar{u}(y)\}_{\mathrm{II}} = -\{\bar{u}(x),u(y)\}_{\mathrm{II}} = i\,\delta''(x-y)\ -i\,u(x)\ \bar{u}(y)\,\delta(x-y)$$

$$\{u(x),u(y)\}_{\mathrm{II}} = \{\bar{u}(x),\bar{u}(y)\}_{\mathrm{II}} = 0$$

$$\{F,G\}_{\mathrm{II}} = i\int\frac{\delta F}{\delta u(x)}\left[\left(\frac{\delta G}{\delta \bar{u}(x)}\right)'' - 2u(x)\overline{u(x)}\frac{\delta H}{\delta \bar{u}(x)}\right]dx$$

$$H_{\mathrm{II}} = \int dx\ u(x)\ \overline{u(x)}$$

$$\{u(x),H_{\mathrm{II}}\}_{\mathrm{II}} = i\left(\frac{\delta H}{\delta \bar{u}(x)}\right)_{xx} - i\ 2u(x)\overline{u(x)}\left(\frac{\delta H}{\delta \bar{u}(x)}\right)$$

$$u_t = \{u(x),H_{\mathrm{II}}\}_{\mathrm{II}} = i\left(u_{xx} - 2|u|^2 u\right)$$

4． 完全流体の運動

3次元の領域Ωにおける非圧縮の完全流体の運動について、ハミルトン関数とポアソン括弧によるformulationはどのよう形になるであろうか。いま、速度場を$v(x)$, 渦度場を$\omega(x)$としたとき、ベクトルポテンシャル$B(x)$を

$$v = \mathrm{rot}\ B\ , \qquad \mathrm{div}\, B = 0$$

によって導入すると、

$$\omega = \mathrm{rot}\ v = \mathrm{rot\,rot}\, B\ , \qquad B(x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\omega(x')}{|x-x'|}\,dx'$$

このとき、全運動エネルギーH（または$H(\omega)$）は

$$H = \frac{1}{2}\int_\Omega (v,\ v)\ dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{rot}\, B,\ \mathrm{rot}\, B)\ dx$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega (B,\omega)\ dx = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\omega(x)\omega(x')}{|x-x'|}\ dx\, dx' \qquad (4.1)$$

となる。ここで、部分積分から生ずる表面$\partial\Omega$上の積分はゼロとなるものと仮定している。例えば、$\Omega = T^3$で周期境界条件の場合、あるいはΩが無限領域であっても、$|x|\to\infty$で、$|v|\to 0$および$|\omega(x)|$は十分速く0に近づく、等である。

ポアソン構造は次の Lie-Poisson bracket で与えられる：

$$\{F,G\} = \int_\Omega \omega \cdot \left[(\mathrm{rot}\frac{\delta F}{\delta\omega}),\ (\mathrm{rot}\frac{\delta G}{\delta\omega})\right] dx$$

$$= \int_\Omega \frac{\delta F}{\delta\omega_i}\ \big((\omega\bullet\nabla)g_i - (g\bullet\nabla)\omega_i\big)\ dx$$

ここで、$g = \mathrm{rot}(\delta G/\delta\omega)$ で、[ ] はベクトル積を表す。式（3.1）のハミルトン関数$H(\omega)$に対しては

$$g = \mathrm{rot}\ (\delta H/\delta\omega) = \mathrm{rot}\ B = v$$

となる。従って、運動方程式は

$$\omega_t = \{\omega,\ H\} = (\omega\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)\omega$$

あるいは

$$\omega_t + \nabla\times(\omega\times v) = 0\ , \qquad \mathrm{div}\ v = 0 \qquad (4.2)$$

これはよく知られた非圧縮完全流体の渦度方程式で、Euler の運動方程式から導かれる。いまΩを(リーマン多様体上の)有界領域とし、ΩからΩへの体積保存の微分同相写像群を考え、これをG(Ω)とする。この群G(Ω)は非圧縮完全流体の configuration space をなしている。完全流体の運動をこのような Lie群上の運動として見るために、analogy として、次に簡単なリーマン多様体の例を考えてみる。

5.　リーマン多様体の簡単な例

流体運動とその曲率の考察に入る前に、Arnold & Avez (1968) に従って負曲率の簡単なリーマン多様体の例を考えて見よう。

実直線$\{t \mid t \in \Re\}$のアフィン変換群Gの元g が次のような形

$$g \ : \ t \ \rightarrow \ yt + x \ , \qquad x, y \in \Re, \quad y>0$$

をとるものとする。これを $g=(x, y)$ で表わそう。元$g=(x, y)$ に $g'=(x',y')$ を作用させるとき、

$$g' \circ g(t) \ = \ y'(yt+x)+x' \ = \ y'yt + y'x + x'$$

となる。従って、群演算を$\circ$で表すとすると、これは

$$(x',y') \circ (x, y) \ = \ (y'x+x', \ y'y)$$

と表せる。この群の単位元は $e=(0, 1)$で、$g=(x, y)$の逆元は

$$g^{-1} \ = \ (-xy^{-1}, \ y^{-1})$$

である。x－y 面の上半面$\{(x,y) \mid y>0\}$をMとする。演算 $\circ$ および逆 $g \rightarrow g^{-1}$ はなめらかな演算で、MをMに移すことから、Gはリー群であり、上半面Mと微分同相的 (diffeomorphic)である。この群Gの多様体Mに次のリーマン計量

$$ds^2 \ = \ \frac{dx^2+dy^2}{y^2} \tag{5.1}$$

を定義することができる。単位元 e ではこれは次の形となる：

$$ds^2 \ = \ dx^2+dy^2$$

Gの２つの元 $g=(x, y)$および$g+\Delta g=(x+\Delta x, \ y+\Delta y)$に対し、$g^{-1}$による left translation を$L_{g^{-1}}$とすると、

$$L_{g^{-1}}(g) \ = \ (0, \ 1) \ , \qquad L_{g^{-1}}(g+\Delta g) \ = \ \left(\frac{\Delta x}{y}, \ 1+\frac{\Delta y}{y} \right) .$$

従って、gにおける接ベクトル $X=(\xi,\eta)\in TG_g$ の left translation は

$$L^*_{g^{-1}}\ X = \left(\frac{\xi}{y}, \frac{\eta}{y}\right)$$

となる。 TG_e での Lie algebra の metric を

$$<\overline{X},\ \overline{X}>_e = \overline{\xi}^2 + \overline{\eta}^2, \qquad \overline{X}=(\overline{\xi},\ \overline{\eta})\in TG_e$$

と定義すると、点gでの left-invariant metric は

$$<X,X>_g = <L^*_{g^{-1}}X,\ L^*_{g^{-1}}X>_e = \frac{\xi^2+\eta^2}{y^2} \tag{5.2}$$

となる。このことは式（5.1）の計量を意味する。

計量が与えられたこの上半面Mは Lobatchewsky-Poincare 面と呼ばれている。その面上の測地線は、直線［x＝定数、$y>0$］および、x軸上に中心のある上半円であることが知られている。この面のガウス曲率Kは定数で、Kは－１に等しい。

6. 流体運動のリーマン曲率

流体の運動によるΩからΩへの写像の群G(Ω)の右不変計量は運動エネルギーHで与えられる。無限次元の Lie 群論で知られている曲率を形式的に適用することで群Gの曲率が得られることが Arnold (1966) によって示された。 Arnold の方法を以下に要約し、さらにわれわれの問題に応用した結果を述べる。

Ωを(リーマン多様体上の)有界領域とする。ΩからΩへの体積保存の微分同相写像群を考え、これをG(Ω)と書く。群G(Ω)に対応するLie algebra は、Ω上の発散ゼロのすべてのベクトル場の集合で、この空間を V(Ω)で表す。群G(Ω)は非圧縮完全流体の configuration space をなし、G(Ω)が無限次元の Lie群をなしている。V(Ω)の２つの元u, vの内積を

$$<u,\ v> = \int_\Omega (u(x),\ v(x))\ dx \tag{6.1}$$

によって定義する。ここで、$(u(x),\ v(x))$はΩ上でリーマン計量を与える内積で、dxはリーマン密度である。このとき、完全流体（非圧縮非粘性）に対する Eulerの運動方程式は群G(Ω)上の測地線方程式になっていることをArnoldは示した。

領域Ω上の完全流体の運動は、群G(Ω) 上の曲線$t\rightarrow\ g_t$によって記述される。g_tは微分同相写像で、$t=0$での流体粒子の配置から、時刻tでの流体粒子の配置への写像である。運動エネルギーHは、この微分同相写像群上の右不変のリーマン計量を与える。

実際、時刻t、配置g_tでの速度場をuとすると、微小時刻 τ 後の $t+\tau$ での配置は $e^{u\tau}\circ g_t$で表せよう。ここで $e^{u\tau}$ は接ベクトル場uによる one-parameter group である。それ故、速度場uは、群Gに点g_tでの接ベクトルdg_t/dt から、右移動g^{-1}によって得られる：$u= R^*_{g^{-1}}(dg_t/dt)$。このことは運動エネルギー$T=H=\frac{1}{2}<u,u>$が右不変の計量を与ええることを意味している。すなわち（式（4.2）参照）

$$<\dot{g}_t,\ \dot{g}_t>_t\ =\ <R^*_{g^{-1}}\ \dot{g},\ R^*_{g^{-1}}\ \dot{g}>_e =\ <u, u>_e$$

測地線方程式においては、接ベクトルdg_t/dt は曲がった空間で平行移動される。そのとき大きさ$<\dot{g}_t,\ \dot{g}_t>_t^{1/2}$ は不変で、定数ベクトルのごとくふるまう。従って、微分同相写像群g_t は one-parameter group をなすと考えられる。

Ωは有界な３次元連結多様体とする。発散０の速度場$u(x)$は群Gの接ベクトル空間TGの元で、その Lie algebra の commutator は

$$[u,\ v]\ =\ (u\cdot\nabla)v-(v\cdot\nabla)u\ ,\qquad u,\ v\in\ \mathrm{TG} \tag{6.2}$$

で与えられる。内積は（6.1）で、また right-invariant metric は（4.1）で与えられる。次の式によって a bilinear operation $B(u,v)$ を導入する：

$$<u,\ [v,w]>\ =\ <B(u,v),\ w> \tag{6.3}$$

作用素adを、$ad_v w=[v,w]$によって導入し、その共役作用素をad^*とすると、$B(u,v)=\mathrm{ad}^*_v u$ と書ける。上の定義から、３次元ベクトル場の場合は

$$\mathrm{ad}^*_v\ u\ =B(u,v)\ =\ -(\mathrm{rot}\ u)\times v-\mathrm{grad}\ P$$

と書ける。ここで、PはΩ上の一価の関数で、div $B=0$を保証するよう決定される。Arnold（1966）によれば、”拡張された剛体運動”のオイラー方程式は

$$\partial_t v\ =\ B(v,\ v)\ =\ -\ \omega\times v\ \ -\mathrm{grad}\ P \tag{6.4}$$

となる（３次元剛体回転のオイラー方程式の一般化）。ここで、$P=p+v^2/2$ とすると，上式はいわゆる完全流体のオイラーの運動方程式であり，このとき pは圧力

で、上式の rotをとると、式（4.2）が得られる。
Arnold（1966）によれば、共変微分（covariant derivative）は

$$\nabla_u v = \frac{1}{2}\left([u, v] - B(u,v) - B(v,u)\right) \tag{6.5}$$

で与えられる。共変微分$\nabla_u v$ が与えられると、曲率テンソルは

$$R(u, v)\, w = -\nabla_u \nabla_v w + \nabla_v \nabla_u w + \nabla_{[u,v]} w \tag{6.6}$$

となる。さらに、2つの接ベクトル u, v で張られる2次元断面のガウス曲率は

$$K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)\, u, v\rangle}{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2} \tag{6.7}$$

である。 断面曲率が具体的に計算された例がある。

(I) 2次元トーラス $T^2 = \{(x,y),\ \mathrm{mod}\ 2\pi\}$ 上の完全流体の運動（Arnold 1966）.
2つの平行流、

$$u = (\sin y,\ 0),\quad v = (0,\ \sin x)$$

の断面曲率は負、すなわち

$$K(u, v) = -\frac{1}{8\pi^2}\ .$$

(II) 3次元トーラス $T^3 = \{(x,y,z),\ \mathrm{mod}\ 2\pi\}$ 上の完全流体の運動
(Nakamura, Hattori & Kambe 1992； Kambe,Nakamura & Hattori 1992).
ABC流、$U_{ABC} = (u, v, w)$ の速度成分を

$$u = C\cos y - A\sin z,\quad v = A\cos z - B\sin x,\quad w = B\cos x - C\sin y$$

として、$u = U_{ABC}$， $v = U_{A'B'C'}$ とすると

$$K(u, v) = -\frac{1}{64\pi^3}\ .$$

(I) (II) では、いずれも負の曲率が得られ、この点でもLobachewsky-Poincare 面と似ている。

ここで得られた微分同相写像群の曲率は、いろいろな測地線のふるまい、すなわち流体運動の安定性と関係づけられる。負の曲率は、初期速度場がわずかに異なる２つの運動において、流体粒子間の距離のノルムが時間とともに指数関数的に増大することを意味する（Hattori & Kambe 1994）。

(III) Lukatskyの定理（1993）

２つの正規直交の速度場を $u, v \in \mathrm{T}G(\Omega)$ とすると、

$$K(u, v) = -< \mathrm{Q}[u(v)] >^2 + < \mathrm{Q}[u(u)], v(v) > .$$

ここで、$u(v) = (u \cdot \nabla)v$, $\mathrm{Q} = \mathrm{I} - \mathrm{P}$ で、 Pは発散０の空間への射影である。

もし、$u(\boldsymbol{x}) = \hat{u}(\boldsymbol{k})\exp(i\,\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})$ と表せて、発散０の条件 $\boldsymbol{k} \cdot \hat{u}(\boldsymbol{k}) = 0$ を満たしているとすると、$\mathrm{div}(u(u)) = -(\boldsymbol{k} \cdot \hat{u})^2 \exp(i\,\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}) = 0$ となる。このとき、$\mathrm{Q}[u(u)] = (\mathrm{I} - \mathrm{P})[u(u)] = 0$ なので、

$$K(u, v) = -< \mathrm{Q}[u(v)] >^2 \qquad (< 0\ )$$

7. KdV方程式

第２節で示したKdV方程式 の Second system のハミルトン関数

$$H = \frac{1}{2} \int dx \ \ u^2(x)$$

は明らかに不変量で、$u(x)$を接ベクトル場とするとき、H は右不変計量を与える。この力学系の Poisson bracket と Commutator は Ovsienko & Khesin（1988）によって次のように formulate されている。

Virasoro 代数 $V(\mathrm{S}^1)$が、円周S^1上のベクトル場の Lie algebra の実数Rによる中心拡大として導入されることを念頭におくと、その元は2π周期関数($f(x)$, $g(x)$ 等)と数の対によって表現される。$V(\mathrm{S}^1)$の commutator は中心拡大の項に実数cをつけて

$$[\ f(x),\ g(x)\ ] = f(x)\,g'(x) - g(x)\,f'(x) + c \int_0^{2\pi} f'(x)\ g''(x)\ dx \qquad (7.1)$$

Poisson bracket は、

$$\{F,G\}_{\mathrm{II}} = \int dx \left[2u(x)\left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\left(\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)' - \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right)'\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right) - c\,\frac{\delta F}{\delta u(x)}\left(\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)'''\right]$$

$$= \int dx \ \left[-c\frac{\delta F}{\delta u(x)}\left(\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)''' + 4u(x)\,\frac{\delta F}{\delta u(x)}\left(\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)' + 2u'(x)\,\frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{\delta G}{\delta u(x)}\ \right]$$

$$B(u,v) = 4uv' + 2u'v - cv''' \tag{7.2}$$

上のハミルトン関数Hによるハミルトン方程式から、次の KdV方程式が得られる：

$$u_t = \{u(x), H\}_{\mathrm{II}} = -c\left(\frac{\delta H}{\delta u(x)}\right)''' + 4u(x)\left(\frac{\delta H}{\delta u(x)}\right)' + 2u'(x)\frac{\delta H}{\delta u(x)}$$

または

$$u_t = B(u,u) = 6uu_x - c\,u_{xxx}$$

内積は

$$<u, v> = \int_\Omega (u(x), v(x))\, dx$$

式(7.1), (7.2) のcommutatorとbilinear form B を使って、共変微分は式(6.5)、曲率テンソルは式(6.6)、接ベクトル u, v で張られる２次元断面のガウス曲率は式 (6.7) で与えられる。

ガウス曲率は当面は正負の符号だけに関心があるので、正値の分母を除いて、分子だけを計算する。分子を$C(u,v)$ とすると

$$\begin{aligned} C(u,v) &= <R(u,v)\,u, v> \\ &= <\nabla_u v, \nabla_v u> - <\nabla_u u, \nabla_v v> + <\nabla_{[u,v]} u, v> \\ &= <(uv' - u'v)^2> + c R_1 + c^2 R_2 \end{aligned}$$

最後の式の第１項は正定値である。第２，３項のR_1, R_2 は数項の積分で表せるが、値の正負は定まらない。定数 c の値が十分小さければ、曲率$C(u,v)$の値は正となりうる。実際、KdV方程式の数値実験で解の近似的な再帰性を示した Zabusky & Kruskal (1964) の例では、$C(u,v)$の値が正であることが示される。

いま得られた結果は、前節の最後に示した完全流体の運動の微分同相写像が負の曲率をもつという性質と対照的で、ソリトン系が一般の流体系とは異なる性質を有することの現われと解釈することができよう。

References

Arnold V.I.: (1966) *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* ***16***, 1, 319- 361;
(1978) *Mathematical Methods of Classical Mechanics* Appendix 2 (New York, Springer).

Arnold, V.I. & A. Avez (1968) *Ergodic Problems of Classical Mechanics,* Appendix 20 (New York, W.A. Benjamin).

Hattori Y. & T. Kambe (1994) "Motion of fluid particles and stretching of line elements of an ideal fluid" *Fluid Dyn. Res.* ***13***, 97-117.

Kambe, T., F. Nakamura and Y. Hattori (1992) "Kinematical instability and line-stretching in relation to the geodesics of fluid Motion", in *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas* (Kluwer Acad. Pub. , Dordrecht) 493-504.

Lukatsky, A.M. (1993) "On the curvature of the diffeomorphisms Group", in *Ann. of Glob. Anal. and Geom.* ***11***, *135-140.*

Nakamura, F., Y. Hattori & T. Kambe (1992) "Geodesics and curvature of a group of diffeomorphisms and motion of an ideal fluid", *J. Phys. A: Math. Gen.* ***25***, *L45-L50.*

Zabusky, N.J. & M.D. Kruskal (1965) "Interaction of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states", *Phys.Rev. Lett.* **15**, 35-36.