数理解析研究所講究録
915巻 1995年 209-217

方程式 $z^d=0$ に対する Durand-Kerner 法の収束について

龍谷大学 理工学部 数理情報学科
山岸 義和 (Yoshikazu Yamagishi)

1 序

一変数の複素数係数多項式 $p(z)$ が与えられたとき、その全根を同時に求める反復解法の或る族が知られている (概説 [6])。そのなかで最も定義式が簡素なものを、発見者の名にちなんで Durand-Kerner 法という。ここでは、定義本来の D-K 法 (Jacobi 型と呼ぶ) と、Gauss-Seidel 型の加速を施したものを考える。多項式 $p(z)$ の次数を d とすればDurand-Kerner 法は $\mathbb{C}^d$ 上の Newton 法である [4] から、もし $p(z)$ に重根がなければ、その根を各座標に並べた点 $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_d)$ は安定な不動点である。つまり、γ に近い点を出発値として反復を始めれば、γ に収束する点列を得る。

Durand-Kerner 法の力学系が完全に解析されているのは、一次方程式を論外とすれば、二次方程式に対する Jacobi 型 D-K 法だけである [2]:これらの力学系は、一変数の関数 $z\mapsto z^2$ (単根のとき) あるいは $z\mapsto z/2$ (重根を持つとき) の反復と共役である。

次数 $d\geq 3$ の方程式のなかで、ここでは $p(z)=z^d=0$ を考える。これは簡単な方程式だが、そのときの近似根の列の振舞いの解析は、以下の二つの局所的問題と密接な関連を持つ。すなわち、ひとつは、一般の多項式の D-K 法で、無限に大きい出発値をとったときの、初期段階のダイナミクス。あるいは、多項式の根がすべて原点に密集したものと考えてもよい。この場合、多項式の最高次よりも低い項が軌道に与える影響は、少ないと考えられる。つまり、近似的に方程式を $z^d=0$ とみなしてよい。またもうひとつは、重根を持つ一般の多項式の D-K 法での、後期段階のダイナミクス。この場合、それぞれの根に対して、重複度をこめて同数の近似根が近づいているので、一つの根のまわりで近似根の振舞いを考えるときには、他の根のそばの近似根の影響は、少ないと考えられている。つまり、近似的に方程式を $z^m=0$ (m は考えている根の多重度) とみなしてよい。いってみれば、始めに方程式 $z^d=0$ が現れ、終りに方程式 $z^m=0$ が現れる。

方程式 $z^d=0$ の Jacobi 型 D-K 法を、都田 [5] は、近似根同士の比をとるというアイデアで解析した。すなわち、D-K 法を有理写像 f で表すとき、反復の出発値を

$$(\omega, \omega^2, \ldots, \omega^d), \qquad (\omega \text{ は } 1 \text{ の原始 } d \text{ 乗根})$$

とすれば、

$$f(\omega, \omega^2, \ldots, \omega^d) = \frac{d-1}{d}(\omega, \omega^2, \ldots, \omega^d)$$

が成り立って軌道はゆっくりと原点に収束するが、さらに、この配置が安定であることを示した。いわゆる balanced convergence である。

ここで報告するのは、都田の方法を個別の力学系で詳しく展開した結果である。まず（§2）方程式 $z^3=0$ に対する D-K 法（Jacobi 型）の力学系を完全に記述する。また、同じ方法で、方程式 $z^4=0$ に対し出発値を $(z, w, -z, -w)$ とした場合の力学系を記述する。ここでは、balanced convergence に従う出発値の集合が full measure であることが示される。それ以外の軌道の記述は、出発値をすべて実数とした場合に帰着される。実数の場合も、力学系がエルゴード性をもつことから、ほとんどすべての出発値に対して軌道は原点に収束する。いわば chaotic convergence である。またさらに、収束の速さの平均は balanced convergence の収束の速さと一致することが示される。

次に（§3）方程式 $z^d=0$ の Gauss-Seidel 型 D-K 法に対し、とくに近似根の比の空間における不動点を調べる。Jacobi 型の場合これらはすべて安定だったが、この場合は不安定な不動点が存在する。ただし、安定な不動点はすべて原点に収束する軌道に対応すること、その個数は d のオイラー関数に等しく、また、ある方法で 1 の原始 d 乗根と一対一に対応することを、$d<10$ に対して「実験で」確かめた。なお、$d=2$ の場合は力学系が完全に記述された。

Gauss-Seidel 型 D-K 法を調べたきっかけは、軌道が螺旋を描くことを示した菅野 - 山本の数値実験 [3] であった。ここで求めた不動点は、そのまま螺旋軌道を表している。

2 （Jacobi 型） Durand-Kerner 法

ここで Durand-Kerner 法の定義を述べる。モニックな、つまり最高次の係数が 1 の、次数 d の一変数複素係数多項式を $p(z)$ とする。$p(z)$ に対する (Jacobi 型) D-K 法は、写像

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - p(z_1)/\prod_{j\neq 1}(z_1 - z_j) \\ \vdots \\ z_d - p(z_d)/\prod_{j\neq d}(z_d - z_j) \end{pmatrix}$$

の反復である。$p(z)$ の $d-1$ 次の係数を a_{d-1} とすれば、f の値域は平面

$$z_1 + \cdots + z_d = -a_{d-1} \tag{1}$$

に含まれることが知られている [1]。

方程式 $z^d = 0$ の Durand-Kerner 法は、さらに、相空間上の原点を通る直線を、原点を通る直線にうつす性質を持つ [5]。つまり、

$$f(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_d) = \lambda f(z_1, \ldots, z_d) \tag{2}$$

が $\lambda \neq 0$ に対して成り立つ。これによって、方程式 $z^3 = 0$ の Durand-Kerner 法は、一変数の写像に帰着される。つまり、近似根の比を

$$[z_0 : z_1 : z_2] = [1 : u : -1-u]$$

とおく変数変換によって、f は一変数の写像

$$g(u) = \frac{u(u^2-u-1)(u+2)}{(u^2+u-1)(2u+1)}$$

に（semi-conjugate に）変換される。写像 $g(u)$ は、さらに座標変換 $v = (u-\omega)/(\omega u - 1)$, $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$, によって写像

$$h(v) = v(2v^3+1)/(v^3+2)$$

に変換される。

写像 h は、有限 Blaschke 積と呼ばれる関数である。複素平面において、h は単位円周を保存する。h の安定な不動点は原点と無限遠点であり、単位円板の内部から出発する軌道は原点に、また、単位円板の外部から出発する軌道は無限遠点に収束する（最大値の原理から示すことができる）。原点および無限遠点に対応する近似根の配置は $[z_0 : z_1 : z_2] = [1 : \omega : \omega^2]$ および $[1 : \omega^2 : \omega]$、つまり都田の正 d 角形 $(d=3)$ である。以上で、ほとんどすべての出発値が balanced convergence に従うことが示された。

残るのは v が単位円周上にある場合だが、このとき近似根同士の比は実数である。つまり、最初から近似根がすべて実数の場合を考えることになる。さて、単位円周上で関数 h はルベーグ測度を保存する（関係式

$$\Sigma_{c\in h^{-1}(v)} 1/\left|h'(c)\right| = 1, \qquad |v| = 1$$

によって示される）。さらに、単位円周上でつねに $\left|h'(v)\right| > 1$ であることから、h は単位円周上でエルゴード性を有する。いま、D-K 法 f で軌道が原点に収束する速さを

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\|f^\nu(z_1,z_2,z_3)\|}{\|(z_1,z_2,z_3)\|}\right)^{1/\nu}, \qquad \|(z_1,z_2,z_3)\| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \tag{3}$$

と表せば、この値はほとんどいたるところ一定であることが、h のエルゴード性から従う。その値の対数は、単位円周上で関数 $\log(\|f(z_1,z_2,z_3)\|\,/\,\|(z_1,z_2,z_3)\|)$ の平均をとれば求まる、すなわち積分

$$\frac{1}{4\pi}\int_{|v|=1}\log\frac{(2v^3+1)(v^3+2)}{9(v^3+1)^2}\,|dv|$$

である。被積分関数は単位円周上に特異性を持つが、積分可能で、値は $\log(2/3)$ に等しい。以上で、出発値を実数としたときの大域収束性を示したことになる。

方程式 $z^4 = 0$ で出発値を $(z, w, -z, -w)$ に制限したときの力学系も、上と同様に記述することができる。すなわち、近似根の比を

$$[z : w : -z : -w] = [1 : u : -1 : -u]$$

とおく変数変換によって、f は一変数の写像

$$g(u) = u(u^2-2)/(2u^2-1)$$

に変換される。g はさらに座標変換 $v = (\sqrt{-1}-u)/(\sqrt{-1}+u)$ によって写像

$$h(v) = v(3v^2+1)/(v^2+3)$$

に変換される。この写像 h も有限 Blaschke 積である。出発値に対応する v が単位円周上になければ、h の反復によって二つの安定な不動点、原点と無限遠点に収束する。これらは、近似根の配置 $[1 : \sqrt{-1} : -1 : -\sqrt{-1}]$ および $[1 : -\sqrt{-1} : -1 : \sqrt{-1}]$ を表す。都田の正 4 角形である。

v を単位円周上にとることは、出発値をすべて実数にとることと同等である。このときも、$d = 3$ のときと同様に h は単位円周上でルベーグ測度を保存し、エルゴー

ド性を有する。D-K 法の軌道が原点に収束する速さを (3) で定義すれば、それは単位円周上のほとんどすべての v に対して一定で、積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|v|=1}\frac{1}{2}\log\frac{3v^4+10v^2+3}{16(v^2+1)^2}dv$$

に等しい。計算すれば log(3/4) である。以上で、$d=3$ の場合と同様、実および複素領域での大域的収束性を示すことができた。

3 Gauss-Seidel 型 D-K 法

まず、Gauss-Seidel 型の Durand-Kerner 法の定義を述べる。Jacobi 型と同様、モニックな次数 d の一変数複素係数多項式を $p(z)$ とする。$p(z)$ に対する第 k 番目の近似根を $(z_1^{(k)},\ldots,z_d^{(k)})$ とするとき、反復公式は

$$z_i^{(k+1)}=z_i^{(k)}-\frac{p(z_i^{(k)})}{\prod_{j<i}(z_i^{(k)}-z_j^{(k+1)})\prod_{j>i}(z_i^{(k)}-z_j^{(k)})},\qquad 1\le i\le d$$

で与えられる。つまり、最新の近似根 $z_i^{(k+1)}$ が得られた時点で古い $z_i^{(k)}$ を捨ててしまってよい。

この手続きは、次のように工夫すれば $\mathbb{C}^d$ の有理写像の反復として捉えることができる：写像 f を

$$f\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_{d-1}\\ z_d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_2\\ \vdots\\ z_d\\ z_1-p(z_1)/\prod_{j\neq1}(z_1-z_j)\end{pmatrix}$$

とおけば、f を d 回反復したものが、冒頭に定義した手続きの 1 ステップである。つまり

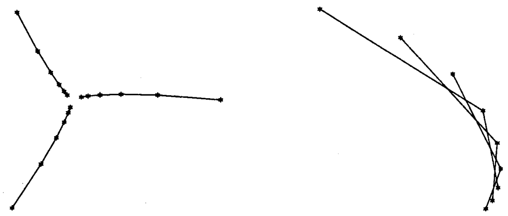
$$(z_1^{(k+1)},\ldots,z_d^{(k+1)})=f^d(z_1^{(k)},\ldots,z_d^{(k)})$$

が成り立つ。

Gauss-Seidel 型の場合、近似根の重心不変性 (1) は成り立たない。しかし、方程式を $p(z)=z^d=0$ とすれば、Jacobi 型のときと同様に斉次性 (2) が成り立つ。

方程式 $z^2=0$ の場合は、力学系が一変数の写像に帰着される。つまり、近似根の比を $[z_1:z_2]=[1:u]$ とおく変数変換によって、f は写像 $g(u)=1/(u-1)$ に変換される。写像 g はさらに、座標の一次分数変換 $v=(u-\alpha)/(u-\beta)$ ($\alpha=(1-\sqrt{5})/2$, $\beta=(1+\sqrt{5})/2$) によって写像 $v\mapsto(\alpha/\beta)v$ に変換される。$|\alpha/\beta|<1$ だから、不

図 1: 安定な螺旋（左）と不安定な螺旋（右）



動点 $v=0$ は安定、$v=\infty$ は不安定である。$v=0$ に対応する近似根の組、たとえば $(1,\alpha)$ は $f(1,\alpha)=\alpha(1,\alpha)$, $\alpha>1$ を満たし、その軌道は原点に収束する。また $v=\infty$ のほうは $f(1,\beta)=\beta(1,\beta)$, $\beta>1$ を満たし、軌道は無限遠に発散する。なお、$v=(\alpha/\beta)^{k-2}$, $k=1,\ldots,$ で表される近似根は $f^k(z_1,z_2)=(0,0)$ を満たし、有限回の反復で求める真の根（原点）に到達する。ここで原点自身は f の定義域に属さないことに注意。以上で、出発値 (z_1,z_2), $z_2/z_1\neq\beta$ は有限ないし無限回の反復で原点に至る軌道を持つことがわかった。

$d>2$ の場合、力学系の完全な記述は得られていない。ここでは、近似根の比が一定となる軌道を求めよう。それは方程式

$$f(z_1,\ldots,z_d)=\alpha(z_1,\ldots,z_d), \qquad \alpha\in\mathbb{C}$$

を解くことと同値である。これを解くと

$$[z_1:\ldots:z_d]=[\alpha:\ldots:\alpha^d] \tag{4}$$

で、α は方程式

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^d)=1 \tag{5}$$

の根として定まる。複素平面に近似根 $(\alpha,\ldots,\alpha^d)$ を並べると、それらは螺旋状の配置をとり、反復は螺旋を伸ばしていく。$|\alpha|<1$ なら螺旋は原点に収束し、$|\alpha|>1$ なら螺旋は無限遠に発散する。

$d=3$ の場合の、螺旋の例を図 1 に示した。左側は原点に収束する安定な螺旋、右側は無限遠に発散する不安定な螺旋である。

3.1　実験 1

方程式 (5) の根の個数は $d(d+1)/2$ 個である。そのうち単根 $\alpha=0$ は例外扱いにして、近似根の比の空間における不動点 (5) を安定性で分類したのが表 1である。こ

表 1: 螺旋の個数：安定性による分類

次数 d	$\|\alpha\| < 1$			$\|\alpha\| > 1$			計
	安定	鞍	不安定	安定	鞍	不安定	
d=3	2	1	0	0	0	2	5
d=4	2	3	0	0	0	4	9
d=5	4	5	0	0	0	5	14
d=6	2	9	0	0	0	9	20
d=7	6	11	2	0	0	8	27
d=8	4	13	2	0	4	12	35
d=9	6	15	2	0	6	15	44
d=10	4	21	2	0	6	21	54
d=11	10	23	2	0	8	22	65
d=12	4	33	2	0	6	32	77
d=13	12	31	2	0	11	34	90

の実験で示されることは、安定な不動点を表す α がすべて絶対値が 1 より小さいこと、さらに、安定な不動点を表す α の個数が、d のオイラー関数

$$\varphi(d) = \{1 \leq i \leq d \mid i \text{ は } d \text{ と互いに素}\}$$

と一致することである。

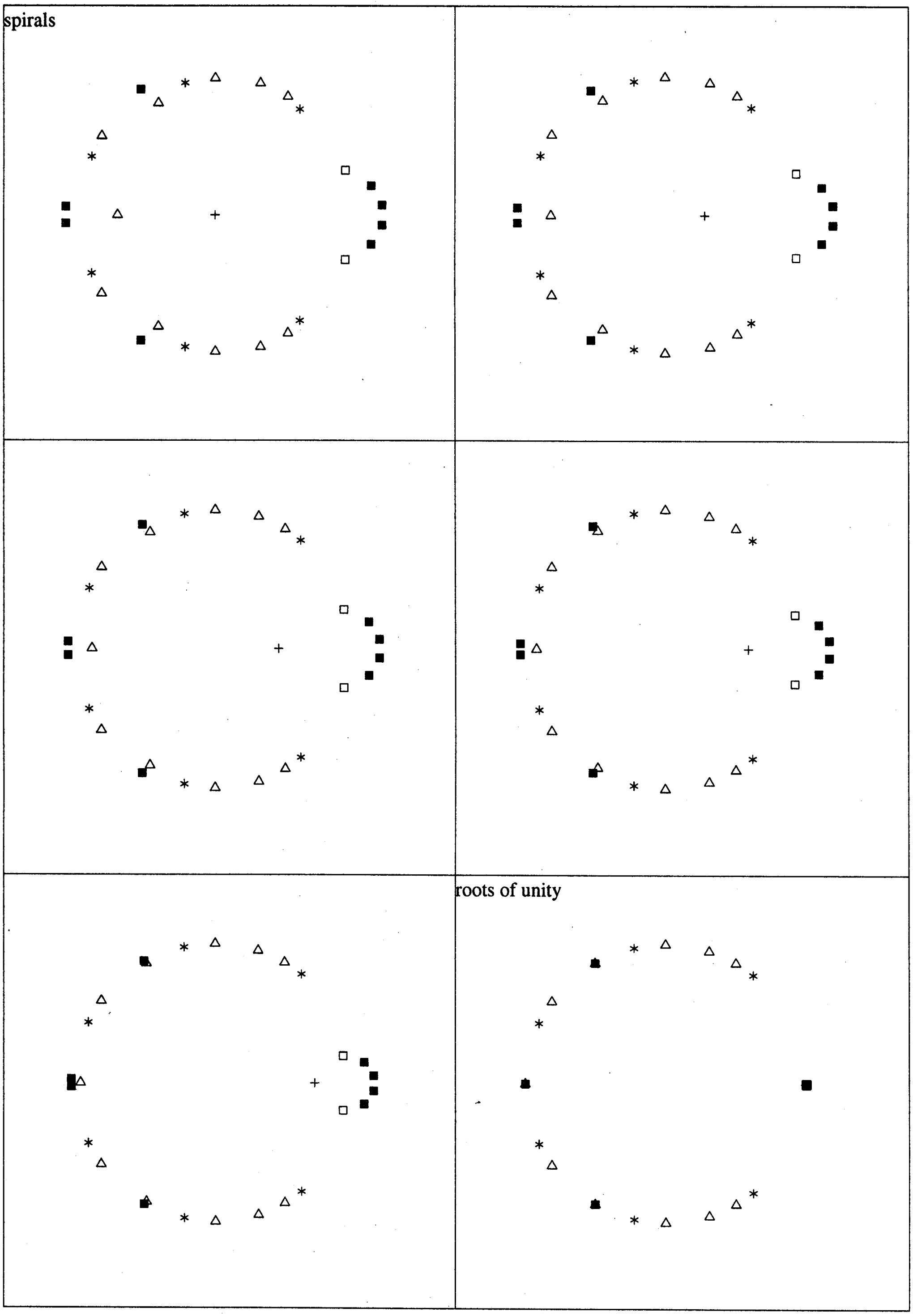
3.2 実験 2

実験 1 を正当化するために、別の観点からもうひとつ実験をおこなう。実パラメータ $0 \leq t \leq 1$ に対して、方程式

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^d) = t \tag{6}$$

を考える。t が動くとき、この方程式の各根 α は、t に解析的に依存する。これによって曲線 $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$ を考えることができる。各曲線で、$t=1$ の端点は不変な螺旋に対応しており、$t=0$ の端点は 1 の冪乗根を表す。さて、$t=0$ のときの (6) の根のうち、1 の原始 d 乗根はちょうど $\varphi(d)$ 個ある。これらを $t=0$ の側の端点にもつ曲線 $\alpha(t)$ に対して、もう一方の $t=1$ の側の端点 α は、ちょうど安定な螺旋軌道を生成していることを示す。

図 2: 螺旋を生成する α を、1 の冪根に結びつける



たとえば $d=7$ の場合が図 2である。上段左が $t=1$, 上段右が $t=0.64$, 以下 $t=0.36, 0.16, 0.04$ と降りて下段右が $t=0$ のときの、方程式 (6) の根を複素平面上に並べたものである。上段左図で、$*$ 印は、不動点が安定点であること、三角は鞍点、四角は不安定点を表す（+印は $\alpha=0$）。α の絶対値が >1 のとき記号を塗りつぶしてある。ここでみられるように、安定な螺旋を生成する α は曲線 $\alpha(t)$ によって 1 の原始 d 乗根と結ばれる。同様の実験は $d<10$ に対して行なった。

参考文献

[1] K. Dochev, Vidoizmenen metod na Newton za edinovremenno priblizitel'no presmyatane na vsichki koreni na dadeno algebrichno uravenie, *Fiz.-Mat. Spis. B"lgar. Akad. Nauk.* **5** (2) (1962) 136–139 (in Bulgarian); also in English: An alternative method of Newton for simultaneous calculation of all the roots of a given algebraic equation, *Phys. Math. J. Bulgar. Acad. Sci.* **5** (2) (1962) 136–139.

[2] M.W. Green, A.J. Korsak and M.C. Pease, Simultaneous iteration towards all roots of a complex polynomial, *SIAM Rev.* **18** (1976) 501–502.

[3] S. Kanno, and T. Yamamoto, Validated computation of polynomial zeros by the Durand-Kerner method, II, in: J. Herzberger, ed., Topics in Validated Computations (North-Holland, Amsterdam, 1994)

[4] I.O. Kerner, Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, *Numer. Math.* **8** (1966) 290–294.

[5] T. Miyakoda, Balanced convergence of iterative methods to a multiple zero of a complex polynomial, *J. Comput. Appl. Math.* **39** (1992) 201–212.

[6] T. Yamamoto, S. Kanno, and L. Atanassova, Validated computation of polynomial zeros by the Durand-Kerner method, in: J. Herzberger, ed., Topics in Validated Computations (North-Holland, Amsterdam, 1994)