数理解析研究所講究録
915巻 1995年 61-63

特異な非対称差分行列のSOR法

大阪女子大学　石原 和夫　(Kazuo Ishihara)

1. SOR法. $A = D - L - U = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$ とし，$D, -L, -U$ は A の対角，狭義の下三角，狭義の上三角成分，$a_{ii} \ne 0$, $1 \le i \le n$, $J = D^{-1}(L+U)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$を Jの固有値，ωを加速係数，$H_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$, $\rho(J) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$, $\gamma(J) = \max_{1 \le i \le n} \{|\lambda_i|; \lambda_i \ne 1\}$, $\delta(J) = \max_{1 \le i \le n} \{|\lambda_i|; |\lambda_i| \ne 1\}$, とする. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の SOR 法は $\boldsymbol{x}_{k+1} = H_\omega \boldsymbol{x}_k + \omega(D - \omega L)^{-1}\boldsymbol{b}, k = 0, 1, 2, \ldots$ となる。

補題 1 [1, 6] . (i) A が convergent ($\lim_{k\to\infty} A^k = \boldsymbol{O}$) $\Leftrightarrow$ $\rho(A) < 1$.

(ii) $\rho(A) = 1$ とする. A が semiconvergent ($\lim_{k\to\infty} A^k$ が存在) $\Leftrightarrow$ $\gamma(A) < 1$ かつ A の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear .

仮定 1 . A が consistently ordered かつ 2-cyclic である.

仮定 2 . $\det A = 0$ かつ Jの固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear である.

補題 2 [6] . A は仮定 1 を満たす正則行列, Jの固有値はすべて実数で $\rho(J) < 1$ とする. $\Rightarrow$ H_ωは convergent ($\rho(H_\omega) < 1,\ 0 < \omega < 2$), $\omega_{\rm opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$ は $\rho(H_{\omega_{\rm opt}}) = \min_{0<\omega<2} \rho(H_\omega)$ となる.

補題 3 [1, 2] . A は仮定 1 と 2 を満たす特異行列, Jの固有値はすべて実数で$\rho(J) = 1$ とする. $\Rightarrow$ H_ω は semiconvergent ($\gamma(H_\omega) < 1,\ 0 < \omega < 2$) , $\omega_{\rm opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\delta(J)^2}}$ は $\gamma(H_{\omega_{\rm opt}}) = \min_{0<\omega<2} \gamma(H_\omega)$ となる. $\boldsymbol{b} \in {\rm Im}A$ の時, $\boldsymbol{x}_k$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解に収束する。

2. Neumann 境界条件の差分行列. 次のような 2 点境界値問題を考える.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
y''(x) = p(x)y'(x) + r(x), \quad a \le x \le b, \\
y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta.
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

ここで $p(x), r(x)$ は連続とする. $[a, b]$ を $(n-1)$ 等分し, $h = \frac{b-a}{n-1}$, $x_i = a + (i-1)h$, $1 \le i \le n$. (1) を中心差分により近似し, $y(x_i)$ の近似解を v_i とすれば (1) の差分方程式は $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ となる ($\det A = 0$) .

定理 1． $h \cdot \max_{a \le x \le b} |p(x)| < 2$ とする．$\Rightarrow$ H_ω は semiconvergent ($\gamma(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$) で $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\delta(J)^2}}$ は$\gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \gamma(H_\omega)$ となる．さらに，$h = \frac{b-a}{n-1}$ が十分小ならば，$\omega_{\text{opt}} \approx \frac{2}{1+\sin\frac{\pi}{n-1}}$．

3. 周期境界条件の差分行列． 次のような 2 点境界値問題を考える．

$$
\text{(2)} \qquad \begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + r(x), & a \le x \le b, \\ y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b). \end{cases}
$$

ここで $p(x)$, $r(x)$ は連続とする．$[a,b]$ を n 等分し，$h = \frac{b-a}{n}$,

$$
x_i = \begin{cases} a + (j-1)h, & \text{if } i = 2j-1, \\ b - jh, & \text{if } i = 2j, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, n.
$$

を mesh type II とする．(2) の中心差分による差分方程式は $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ となる ($\det A = 0$)．

定理 2． n は偶数，mesh type II, $h \cdot \max_{a \le x \le b} |p(x)| < 2$, $\prod_{i=1}^{n} \left\{1 + \frac{1}{2}p(x_i)h\right\} = \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - \frac{1}{2}p(x_i)h\right\}$ とする．$\Rightarrow$ H_ω は semiconvergent ($\gamma(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$) で $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\delta(J)^2}}$ は$\gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \gamma(H_\omega)$ となる．さらに，$h = \frac{b-a}{n}$ が十分小ならば，$\omega_{\text{opt}} \approx \frac{2}{1+\sin\frac{2\pi}{n}}$．

定理 3． n は偶数，mesh type II, $h \cdot \max_{a \le x \le b} |p(x)| < 2$, J は複素固有値をもつとする．$\Rightarrow$ $0 < \omega < \omega_{\max}$ で H_ω は semiconvergent となる $\omega_{\max} < 2$ が存在し，$\gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0<\omega<\omega_{\max}} \gamma(H_\omega)$ となるω_{opt} が存在する．さらに，$h = \frac{b-a}{n}$ が十分小ならば，$\omega_{\max} \approx 2$, $\omega_{\text{opt}} \approx \frac{2}{1+\sin\frac{2\pi}{n}}$．

注意． 境界値問題 (1),(2) の解は次の例のように存在しないこともある．

$$
\text{(3)} \qquad \begin{cases} y''(x) = 2, \quad 0 \le x \le 1, \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \end{cases}
$$

$$
\text{(4)} \qquad \begin{cases} y''(x) = 2, \quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1). \end{cases}
$$

また解 $y(x)$ が存在する時は，$y(x) + c$ も解となる (c は任意定数)．特に (1) の場合，$y'(x)$ を初期値問題 $y''(x) = p(x)y'(x) + r(x), a \le x \le b$, $y'(a) = \alpha$ の解とし，$y'(b) \ne \beta$ となる時 (1) の解 $y(x)$ は存在しない．なお (3),(4) の差分方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} \notin \mathrm{Im}A$ すなわち inconsistent な方程式となり，SOR 法は semiconvergence しないことが言える．

参考文献

[1] Bermann, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.

[2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Meth., 6 (1985), 555 – 566.

[3] Ishihara, K., Projected successive overrelaxation method for finite element solutions to the Dirichlet problem for a system of nonlinear elliptic equations, J. Comput. Appl. Math., 38 (1991), 185 – 200.

[4] Ishihara, K. and Yamamoto, M., Optimum relaxation parameter of SOR iterations for discrete Neumann type arising from two–point boundary value problems, Math. Japon., 39 (1994), 385 – 393.

[5] Ishihara, K. and Yamamoto, M., On the optimum SOR iterations for finite difference approximation to periodic boundary value problems, Math. Japon., 41 (1995), 199 – 209.

[6] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice–Hall, 1962.