数理解析研究所講究録
919 巻 1995 年 19-26

q-Zeta 関数と超幾何関数

上野 喜三雄 (Kimio Ueno) 早大理工
西澤 道知 (Michitomo Nishizawa) 早大理工

1 動機

我々は 次によって q-Hurwitz Zeta 関数を導入しよう。

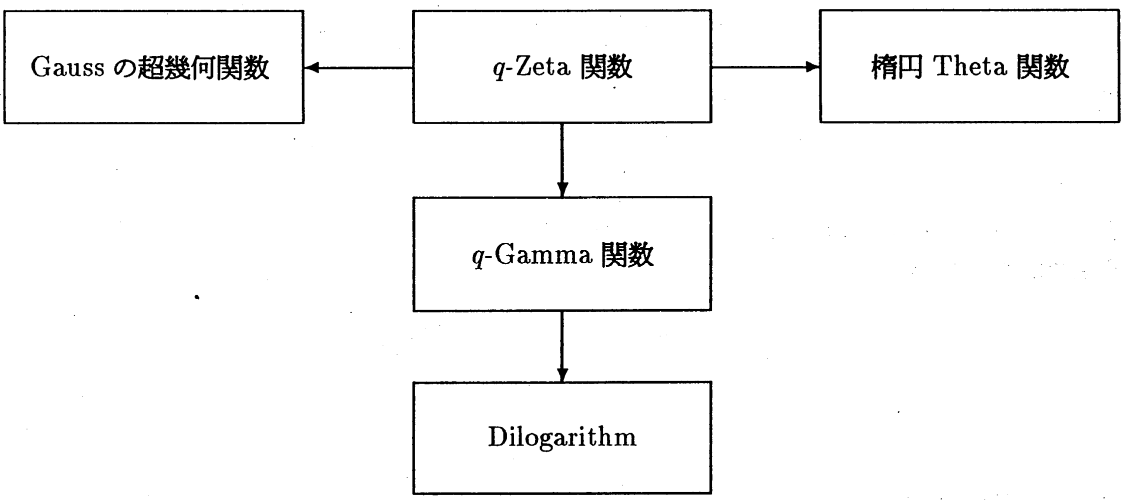
(1) $$\zeta(s, z : q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{s(k+1)}}{{[k+z]_q}^s}$$

ここで

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}.$$

名前の示す通り、この関数は Hurwitz Zeta 関数の q- 類似として導入された [1]。 それは q- 多重 Hurwitz Zeta 関数へと拡張されるし、また (1) の定義においても、より多くのパラメーターを持つように定義を一般化することが可能である。しかし、当面は最も単純な (1) の場合を深く考察したい。

さて、私達（上野と西澤）は、この q-Zeta 関数を研究していく過程で、それが種々の基本的な特殊関数と深く結びついていることを発見した。その関係を図示すると次の様になっている。



何故、q-Zeta 関数を取り巻くように、これらの特殊関数が現れるのか？ この現象に対する真の理解に到達しているわけではないが、ともかく、q-Zeta 関数とひとつひとつの特殊関数の関わりを説明していくことにしよう。

2 Hurwitz Zeta 関数の基本的性質

q-Hurwitz Zeta 関数の性質を理解するうえで、もともとの Hurwitz Zeta 関数の基本的性質を説明しておこう。

$$\zeta(s,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+z)^s} \tag{2}$$

これが Hurwitz Zeta 関数である。ただし、$\Re z>0$ である。

よく知られているように $\Re s>1$ において右辺は絶対収束して正則関数になる。また $z=1$ で Riemann Zeta 関数になる。

$$\zeta(s,1)=\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

(A) $\zeta(s,z)$ は全 s 平面に有理型関数として解析接続される。$s=1$ が唯一の極であり、それは 1 位である。

この事実は種々の方法で示される。例えば、次の積分表示から直ちに証明できる。

(B) 積分表示

$$\zeta(s,z)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{(-t)^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt \tag{3}$$

また、この積分表示を用いれば次が証明できる。

(C) Hurwitz の公式

$0<z\leq 1,\ \Re s<0$ とすると、

$$\zeta(s,z)=\Gamma(1-s)\left\{(2\pi i)^{s-1}\mathcal{L}_{1-s}(z)+(-2\pi i)^{s-1}\mathcal{L}_{1-s}(1-z)\right\}. \tag{4}$$

ここで、

$$\mathcal{L}_s(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}}{n^s}\quad(\Re s>1,\quad z\in R).$$

である。(4) を Hurwitz の公式というのだが、ここで、$z=1$ とすれば、Riemann Zeta 関数に対する関数等式が得られることになる。

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin(\frac{\pi s}{2})\zeta(1-s).$$

以上の三つの性質はよく知られている事実であり、Zeta 関数を扱った大抵の書物（例えば [2]）に紹介されている。ところで、次の (D) に言及したものを（少なくとも）私達は知らない。

(D) s は正整数でないとする。このとき、

$$\zeta(s,z)=\frac{z^{1-s}}{s-1}+\frac{z^{-s}}{2}+\frac{sz^{-s}}{2\pi i}\sum_{l\neq 0}\frac{1}{l}U(1,1-s:-2\pi ilz). \tag{5}$$

が成立する。l は 0 以外の整数全体をわたる。

ここで、$U(\alpha,\gamma:x)$ は Kummer の合流型超幾何微分方程式

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0$$

の解であって、

$$U(\alpha,\gamma:x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-xu}u^{\alpha-1}(1+u)^{\gamma-\alpha-1}du. \tag{6}$$

と積分表示される [3]。また、

$$U(\alpha,\gamma:x)\sim x^{-\alpha}\qquad(x\to\infty) \tag{7}$$

という漸近展開をもつことも知られている。また、Kummer の合流型超幾何関数 $F(\alpha,\gamma:x)$ を用いると、

$$\begin{aligned}U(\alpha,\gamma:x)&=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}F(\alpha,\gamma:x)\\&+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}e^xx^{1-\gamma}F(1-\alpha,2-\gamma:-x)\end{aligned}$$

とも表示され、従って、特に

$$U(1,1-s:x)=\frac{1}{s}F(1,1-s:x)+\Gamma(-s)e^xx^s \tag{8}$$

である。(7),(8) より (5) 式右辺の級数は $s\notin\mathbf{Z}_{>0}$ において、絶対収束している。

(D) は、Euler-MacLaurin の和公式

$$\begin{aligned}\sum_{r=a}^{b-1}f(r)=\int_a^bf(t)dt&+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k!}\left\{f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)\right\}\\&+(-1)^{n-1}\int_a^b\frac{\overline{B}_n(t)}{n!}f^{(n)}(t)dt.\end{aligned} \tag{9}$$

($B_k(t)$ は Bernoulli 多項式、$B_k=B_k(0)$ は Bernoulli 数、また $\overline{B}_k(t)=B_k(t-[t])$) において

$$f(t)=(t+z)^{-s},\qquad a=0,\quad b=\infty,\quad n=2$$

とおくことによって証明される。また、**(C)** の Hurwitz の公式は (8) 式を (5) 式に代入することによっても示される。

次の **(E)** は Gamma 関数がある作用素の行列式として理解できることを意味する。

(E) ($s=0$ における $\zeta(s,z)$ の Taylor 展開)

$$\zeta(s.z)=-z+\frac{1}{2}+s\log\left(\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}}\right)+O(s^2) \tag{10}$$

従って

$$e^{\zeta'(0,z)}=\Gamma(z)/\sqrt{2\pi}$$

3 q-Hurwitz Zeta 関数について

第1節で提示したように、q-Hurwitz Zeta 関数は次式で定義される。

$$\zeta(s,z:q)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{s(k+1)}}{{[k+z]_q}^{s}}. \tag{11}$$

ここで、$0<q<1,\quad \Re z>0$ を仮定する（以下においてもこのように仮定する。）。右辺の無限級数は $\Re s>0$ において絶対収束して、解析関数を定める。また、$\Re s>1$ のとき、

$$\zeta(s,z:q)\to\zeta(s,z)\qquad(q\to 1-0)$$

となることが示せる。この意味において、q-Hurwitz Zeta 関数は、確かに Hurwitz Zeta 関数の q- 類似なのである。第1節において、q-Hurwitz Zeta 関数を取り巻いて様々の特殊関数が現れるといった。これらの特殊関数は具体的には、次の解析のプロセスで現れたのである。

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Gauss の超幾何関数}} & \boxed{q\text{-Zeta 関数}} \arrow[l, "(D)_q"'] \arrow[r, "(B)_q"] \arrow[d, "(E)_q"] & \boxed{\text{楕円 Theta 関数}} \\
 & \boxed{q\text{-Gamma 関数}} \arrow[d, "(D)'_q"] & \\
 & \boxed{\text{Dilogarithm}} &
\end{tikzcd}$$

ここで、
$(B)_q$ は積分表示,
$(D)_q$, $(D)'_q$ は Euler-MacLaurin の和公式の適用、
$(E)_q$ は $s=0$ における Laurant 展開、
を各々意味する。以下において、$(A)_q\sim(E)_q$ を必ずしもこの順序ではないが、示していくことにしよう。

$(A)_q$ 解析接続について

$\Re s>0$ のとき、二項定理を用いることで、

$$\zeta(s,z:q)=(q-q^2)^s\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(s)_r}{r!}\frac{q^{rz}}{1-q^{r+s}},$$

となることを示すことができる。ところで、$\Re z>0$ であるから、右辺の級数は、実際には、$s\neq -r+l\delta$ （ここで、$r\in\mathbf{Z}_{\geq 0},\quad l\in\mathbf{Z},\quad \delta=\frac{2\pi i}{\log q}$ である。）に対して、絶対収束している。つまり、$\zeta(s,z:q)$ は

$$s=-r+l\delta\qquad(r\in\mathbf{Z}_{\geq 0},\quad l\in\mathbf{Z},\quad \delta=2\pi i/\log q)$$

を1位の極とする有理型関数として全 s- 平面に解析接続される。

$(\boldsymbol{E})_q$ $s=0$ における Laurant 展開

(2) において、$(s)_r = s(s+1)\cdots(s+r-1)$, $(s)_0 = 1$ であるから、これより、$s=0$ における $\zeta(s,z:q)$ の Laurant 展開を求めることができる。

$$\zeta(s,z:q) = \frac{\alpha_{-1}}{s} + \alpha_0 + s\left\{\alpha_1 - \log\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{z-1+k})\right\} + O(s^2), \tag{12}$$

ここで

$$\alpha_{-1} = -\frac{1}{\log q}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} - \frac{\log(q-q^2)}{\log q}$$
$$\alpha_1 = -\frac{1}{12}\log q + \frac{1}{2}\log(q-q^2) - \frac{1}{2}\frac{\log^2(q-q^2)}{\log q}$$

($\log^2 x = (\log x)^2$ である。)(12) の s の 1 次の係数として q-Gamma 関数

$$\Gamma(z:q) = (1-q)^{1-z}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1-q^{k+1}}{1-q^{k+z}} \tag{13}$$

の対数の（本質的部分）が現れているが、これは第 2 節 (E) の事実と符合している。また、(12) の解析的意味であるが、それは ”$\Gamma(z:q)$ はある種の作用素の Fredholm 行列式としてとらえられる。” ということである。

$(\boldsymbol{D})_q$ Euler-Maclaurin の和公式の応用

Euler-Maclaurin の和公式（第 2 節 (9) 式）において

$$f(t) = \frac{q^{(t+1)s}}{(1-q^{t+z})^s}, \qquad a=0, \quad b=\infty, \quad n=2$$

とおく。

$$\zeta(s,z:q) = (q-q^2)^s\sum_{r=0}^{\infty}f(r)$$

だから、Gauss の超幾何関数の積分表示

$$F(\alpha,\beta,\gamma:x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du. \tag{14}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\zeta(s,z:q) &= -\frac{(q-q^2)^s}{s\log q}F(s,s,s+1:q^z) + \frac{1}{2}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s \\ &+ \frac{s(q-q^2)^s}{2\pi i}\sum_{l\neq 0}\frac{1}{l(s+\delta l)}F(s+1,s+\delta l,s+1+\delta l:q^z).\end{aligned} \tag{15}$$

を示すことができる。右辺の級数において、l は 0 でない整数全体をわたる。この級数は $s\neq -r+l\delta$, $(r\in\mathbf{Z}_{\geq 0}, \quad l\in\mathbf{Z}_{\neq 0})$ に対して絶対収束していることが示せる。

$(C)_q$ Hurwitz の公式の q- 類似

(15) 式を出発点として、さらに次の事実を証明できる。

$$\zeta^*(s,z:q) = \zeta(s,z:q) + \frac{(q-q^2)^s q^{-zs}}{\log q}\frac{\pi}{\sin \pi s}. \tag{16}$$

とおく。

Theorem 1 $s \in \mathbf{Z}_{>0}$ とすると

$$\zeta^*(s,z:q) \to \zeta(s,z). \qquad (q \to 1) \tag{17}$$

Theorem 2 $0 < z \leq 1$, $\Re s < 0$ かつ s が極でないとき

$$\zeta^*(s,z:q) = -\frac{(q-q^2)q^{-zk}}{\log q}\sum_{l \neq 0}\frac{\Gamma(1-s)\Gamma(s+\delta l)}{\Gamma(\delta l+1)}e^{-2\pi i l z}. \tag{18}$$

が成立する。ただし、右辺において、l は 0 でない整数全体をわたる。

さて、 Gamma 関数に対する Stirling の公式を用いると ((18) の右辺の Gamma 因子の $l \to \infty$ のときの漸近展開を調べる。)、(18) の右辺は、定理 2 の仮定の下でで絶対収束していることがわかる。また同様に、この Gamma 因子の $q \to 1-0$ での漸近挙動を調べることにより、

$$\{(18)\,\text{式の右辺}\} \to \{\text{Hurwitz の公式 (4) の右辺}\} \qquad (q \to 1-0)$$

を証明できる。従って、定理 1 と合わせて 定理 2は Hurwitz の公式の q- 類似とみなすことができる。

定理 1、定理 2 を示すうえで、超幾何関数の接続公式

$$\frac{1}{s}F(s,s,s+1:q^z) = \frac{1}{1-s}(1-q^z)^{1-s}F(1,1,2-s:1-q^z) + \frac{\pi}{\sin \pi s}q^{-zs} \tag{19}$$

および

$$\begin{aligned}&\frac{s}{s+l\delta}F(s+1,s+l\delta,s+l\delta+1,:q^z)\\ &\quad = (1-q^z)^{-s}F(l\delta,1,1-s:1-q^z) - \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(s+l\delta)}{\Gamma(l\delta)}q^{-zs}e^{-2\pi i l z}\end{aligned} \tag{20}$$

が本質的な役割を果たす。また定理 1を示す際には、$\zeta(s,z)$ に対する展開公式 (13) も欠かすことができない。

$(D)'_q$ Euler-MacLaurin の和公式を級数

$$\log\prod_{k=0}^{\infty}(1-q^{k+z}) = \sum_{k=0}^{\infty}\log(1-q^{k+z})$$

に応用することで、次の展開公式を得る。(cf. [4])

Theorem 3 $\Re z \to +\infty$ のとき

$$
\begin{aligned}
\log(q^z : q)_\infty \quad &\sim \quad \frac{1}{\log q} Li_2(q^z) - \frac{1}{12}\log q + \frac{1}{2}\log(1-q^z) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{\log q}{q^z - 1}\right)^{2k-1} P_{2k-1}(q^z)
\end{aligned} \tag{21}
$$

ここで、$P_k(x) \quad (k = 1, 2, 3\cdots)$ は、条件

$$P_1(x) = 1, \quad (x - x^2)P_k'(x) + kxP_k(x) = P_{k+1}(x)$$

によって定められる。$(k-1)$ 次多項式（係数は正整数, *cf.* [4]）である。また、$Li_2(x)$ は *Euler* の *Dilogarithm* 関数

$$Li_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \tag{22}$$

である。

漸近展開 (21) は、最近の L.D.Fadeev 氏の仕事 [5] 、"Quantum Dilogarithm" と密接に関係している。

$(B)_q$ 積分表示

最後に、$\zeta(s, z : q)$ の積分表示について議論する。$\tau = 1/\delta = \log q/2\pi i$ とおいて、楕円 Theta 関数 $\vartheta(x|\tau)$

$$\vartheta(x) = \vartheta(x|\tau) = 2q^{\frac{1}{8}} \sin \pi x \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)(1 - 2q^n \cos 2\pi x + q^{2n}) \tag{23}$$

を考える。次の公式が知られている [6]。

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\vartheta'(0)\vartheta(x+y)}{\vartheta(x)\vartheta(y)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i l y}}{1 - q^l e^{-2\pi i x}} \tag{24}$$

右辺は、$x \notin \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau, \quad i\tau < \Im y < 0$ に対して絶対収束している。

この公式と Beta 関数の積分表示 [7] を用いれば、次の結果に到達する。

Theorem 4 $0 < \Re z < 1$ のとき、

$$\zeta(s, z : q) = \frac{(q - q^2)^s e^{\pi i s}}{4\pi \sin \pi s} \int_C \frac{du}{u}(1 - u)^s \frac{1}{2\pi i} \frac{\vartheta'(0)\vartheta(-\tau s - \tau z + v)}{\vartheta(-\tau s)\vartheta(-\tau s + v)} \tag{25}$$

ただし、$e^{2\pi i v} = u$。 積分路 C は、条件

$$C \ni u \Rightarrow q^{\Re z} < |u| < q^{\Re z - 1}$$

を満たすように取られた、 0 と 1 を結ぶ捩れサイクルである。

(25) 式と、第 2 節 (3) 式（$\zeta(s, z)$ に関する積分表示）の関係は、現在検討中である。

4 課題

以上見てきたように、q-Zeta 関数の周囲には、Gauss の超幾何関数、楕円 Theta 関数、Euler の Dilogarithm、はたまた、Fadeev の Quantum Dilogarithm といった役者が顔をそろえているが、q-Zeta 関数という舞台の上で進行している劇の筋書きが見えているわけではない。

台本はどこにあるのか？

それを手に入れるのが今後の課題である。

参考文献

[1] K.Ueno, M.Nishizawa. *Quantum groups and zeta-functions* Proc.of the Karpacz Winter School 1994, hep-th/9408143

[2] E.C.Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function (2nd ed.)* Oxford Science Publ.(1986)

[3] L.J.Slator. *Confluent Hypergeometric Functions,* Cambridge. Univ. Press

[4] D.S.Moak, *The q-analogue of Stirling Formula,* Rocky Mountain J. Math,14 (1984),p.403–413

[5] L.D.Fadeev and R.M.Kashaev, *Quantum Dilogarithm,* Mod. Phys. Lett. A 9 (1994) p.427–434

[6] C.Jordan, *Fonctions Elliptiques,* Springer-Verlag (1981)

[7] E.T.Whittaker and G.N.Watson, *A Course of Modern Analysis,* Cambridge Univ. Press