

順圧不安定による擾乱の発達の上限を求める数値的手法

石岡圭一・余田成男

(京都大学理学部地球物理学教室)

要旨

球面上の帯状ジェットの順圧不安定による擾乱の発達に対して、厳密な上限値を求める2種類の数値的手法を提示した。

その1つは, Shepherd(1988)の手法に基づくもので, 領域平均された擬運動量密度の保存を利用するものである。ここでは, 離散化により, 変分最小化問題を準ニュートン法を用いて数値的に解いている。もう1つは, 著者らの独自の手法で, すべてのカシミール不変量および全絶対角運動量の保存則からなる束縛のもとで最小化問題を解くものである。ここでは, 2次計画問題を解くために, オペレーションズ・リサーチにおける手法である凸シンプレックス法を利用している。

これら2種類の手法をいくつかの不安定なジェット分布に適用して上限値を求め, その上限値を, 不安定なジェットからの非線形時間発展を高分解能の数値モデルによって計算した結果 (Ishioka and Yoden, 1994) と比較した。その結果, 得られた二種類の上限値はほとんど完全に等しく, 非線形時間発展の結果に対する良い見積りを与えることが示された。

1. 導入

帯状ジェットの順圧(シア)不安定は, 理論的な流体力学だけではなく, 気象力学にとっても興味深い問題である。なぜなら, 南半球上部成層圏の移動波のように, いくつかの大気現象がこの不安定によって励起されていると考えられているからである(例えば, Hartmann, 1983を参照)。帯状ジェットが順圧不安定であるとき, 擾乱は指数関数的に成長し, ある有限の振幅に達する。Ishioka and Yoden (1994, 以下, IY94として引用する)はHartmann (1983)により線形安定性が調べられていた極夜ジェットの非線形時間発展を数値的に調べた。そのような研究において, 「初期状態に依存して, 擾乱はどこまで成長しうのか?」という疑問が自然に湧いてくる。

Shepherd (1988)はこの種の疑問に対する一般的な解決を与えた。彼は, 擾乱の発達の厳密かつ完全非線形な上限を得るための新しい手法を提示し, 様々な流れの分布に対してその手法を適用し, その上限値を計算した。しかし, 彼の興味は主に問題の理論的側面にあったため, 彼は数値的な手段を用いてより小さな上限値を得ようとはしなかった。そこで, 本研究では, より小さな上限値を計算するための数値的な手法を探究することにする。また, いくつかの不安定な極夜ジェットに対して上限値を計算し, IY94の非線形時間発展の結果と比較する。

支配方程式および上限値の理論的な基礎は第2節で記述する。数値的な手続きは第3節で示し, 第4節ではジェットの分布および非線形時間発展について説明する。結果は第5節, 議論は第6節, そして結論は第7節で与える。

2. 基礎方程式および上限値の理論的基礎

絶対渦度 $q(\lambda, \mu, t) \equiv \zeta + 2\Omega\mu$ のラグランジュ保存則:

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial q}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \right) = 0, \tag{1}$$

で支配される地球上の2次元非発散流体運動を考える。ここに, $\zeta(\lambda, \mu, t)$ は渦度 ($\zeta \equiv \nabla^2 \psi$), $\psi(\lambda, \mu, t)$ は流線関数, λ は経度, $\mu \equiv \sin \phi$, ϕ は緯度, t は時刻, a は地球半径 ($= 6.37 \times 10^6 \text{m}$), Ω は地球自転角速度 ($= 7.29 \times 10^{-5} \text{/s}$), および ∇^2 は水平ラプラシアン:

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{a^2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \tag{2}$$

である。

この系において, 以下の3種類の量: “カシミール不変量” $C_f \equiv \overline{[f(q)]}$, 全絶対角運動量 $D \equiv [\mu \bar{q}]$, および全運動エネルギー $E \equiv [-\frac{1}{2} \overline{\psi \zeta}]$, が保存される。ここに $f(q)$ は q の任意関数であり $\overline{(\quad)}$ および $[(\quad)]$ はそれぞれ経度平均および緯度平均を表す。すなわち,

$$\overline{(\quad)} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\quad) d\lambda, \quad [(\quad)] \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\quad) d\mu. \tag{3}$$

さて、擾乱の発達の上限を考えよう。\$C_f\$の保存則から、全絶対エンストロフィー \$F \equiv [\frac{1}{2}\bar{q}^2]\$ もまた保存量である。この全絶対エンストロフィー \$F\$ は帯状成分エンストロフィー \$F_z\$ および波成分エンストロフィー \$F_w\$ に分けられる:

$$F = F_z + F_w, \quad (4)$$

$$F_z \equiv [\frac{1}{2}\bar{q}^2], \quad F_w \equiv [\frac{1}{2}q'^2], \quad (5)$$

ここに \$q' \equiv q - \bar{q}\$ である。以下の節では、不安定な帯状分布 \$\bar{q}_0(\mu)\$ および無限小擾乱から成る初期 \$q\$ 分布からの時間発展に対する \$F_w\$ の上限値について考察する。

a. 自明な上限値

角運動量 \$D\$ の保存則のみを考慮すれば、到達しうる \$F_z\$ の最小値は付録で示すように、ラグランジュの未定乗数法によって求められる:

$$(F_z)_{\min} = \frac{3}{2}D^2 = \frac{3}{2}[\mu\bar{q}_0(\mu)]^2. \quad (6)$$

そこで、波成分エンストロフィー \$F_w\$ に対する自明な上限値 \$F_0\$ は (4) から、

$$F_0 = (F_w)_{\max} = F - (F_z)_{\min} = F - \frac{3}{2}D^2 = [\frac{1}{2}\bar{q}_0(\mu)^2] - \frac{3}{2}[\mu\bar{q}_0(\mu)]^2 \quad (7)$$

と得られる。

b. Shepherd の上限値

擬運動量密度を

$$A(Q, q) \equiv - \int_Q^q \{Y(\eta) - Y(Q)\} d\eta, \quad (8)$$

と定義すれば、Shepherd (1987) に示されているように \$[A(Q, q)]\$ は保存量になる。ここに \$Q(\mu)\$ は \$\mu\$ に対する任意の単調な関数であり、\$Y(\eta)\$ はその逆関数である。ここで、本論文における \$q\$ の定義は Shepherd の定義と異なっていることに注意されたい; ここにおける \$q\$ は彼の \$Q+q\$ に等しい。この保存則は \$C_f\$ および \$D\$ の保存則から容易に導かれる (McIntyre and Shepherd, 1987 を参照)。この保存量に対して、以下の不等式が成立する:

$$|Y'|_{\min} [\frac{1}{2}(q - Q)^2] \leq |[A(Q, q)]| = |[A(Q, \bar{q}_0)]| \leq |Y'|_{\max} [\frac{1}{2}(\bar{q}_0 - Q)^2]. \quad (9)$$

(9) および \$F_w\$ に対する以下の不等式:

$$F_w = [\frac{1}{2}q'^2] \leq [\frac{1}{2}q'^2] + [\frac{1}{2}(\bar{q} - Q)^2] = [\frac{1}{2}(q - Q)^2], \quad (10)$$

を利用すれば、\$F_w\$ に対する上限を与える不等式が得られる:

$$F_w \leq \frac{1}{|Y'|_{\min}} |[A(Q, \bar{q}_0)]| \leq \frac{|Y'|_{\max}}{|Y'|_{\min}} [\frac{1}{2}(\bar{q}_0 - Q)^2]. \quad (11)$$

というわけで \$F_w\$ に対する2つの上限値 \$F_1\$ and \$F_2\$ が得られた:

$$F_1 \equiv \min \left(\frac{|Y'|_{\max}}{|Y'|_{\min}} [\frac{1}{2}(\bar{q}_0 - Q)^2] \right), \quad (12)$$

$$F_2 \equiv \min \left(\frac{1}{|Y'|_{\min}} |[A(Q, \bar{q}_0)]| \right), \quad (13)$$

ここに、\$\min()\$ は単調な関数 \$Q(\mu)\$ の任意の選択についてとられる。Shepherd (1987) は不等式 (11) を導いているが、Shepherd (1988) は上限値 \$F_1\$ のみしか利用していない。そこで、ここでは上限値 \$F_1\$ を“本来の Shepherd の上限値”、上限値 \$F_2\$ を“改良された Shepherd の上限値”と呼ぶことにする。\$F_2\$ が \$F_1\$ より小さいことは自明である。

c. 直接上限値

2.a小節では、角運動量保存則のみを利用した。しかし、カシミア不変量も束縛に加えれば、 $(F_2)_{\min}$ は(6)の見積もりより大きくなるはずである。すなわち、初期分布 $\bar{q}_0(\mu)$ から C_f および D の保存の束縛のもとでの気塊の再分配によって作られるすべての $q(\lambda, \mu)$ 分布を調べれば、より小さな上限値が得られる:

$$F_3 \equiv F - \min(F_2), \quad (14)$$

ここに $\min(\)$ は上記のようなすべての q 分布についてとられる。上限値 F_0, F_1, F_2 , および F_3 に対して以下の不等式:

$$F_w \leq F_3 \leq F_2 \leq F_1 \leq F_0. \quad (15)$$

が成立することは自明である。

3. 数値的手続き

a. 自明な上限値

自明な上限値 F_0 を計算するには、与えられた初期分布 $\bar{q}_0(\mu)$ に対して不変量 F および D の値が計算されなければならない。(7)式に現れる μ についての積分は、ガウス-ルジャンドル求積公式 (Press, et al., 1992, を参照。以下 *Numerical Recipes* として引用する) を使って計算した。ガウス緯度(分点)は100までとったが、次節で与える $\bar{q}_0(\mu)$ 分布にはこれで十分であった。

b. Shepherd の上限値

Shepherd の上限値 F_1 および F_2 を計算するには、変分最小化問題(12)および(13)を解かねばならない。数値計算するために、単調関数 $Q(\mu)$ を以下のように N 本の線分に分割する:

$$Q(\mu) = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{Y_i - Y_{i-1}}(\mu - Y_{i-1}) + Q_{i-1} \quad (Y_{i-1} \leq \mu \leq Y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (16)$$

ここに $Q_i = Q|_{\mu=Y_i}$ である。 $Q(\mu)$ は単調でなければならないので(ここでは、単調増大関数 $Q(\mu)$ を扱う; 以下の議論を単調減少関数に適用するのは容易である)、媒介変数 α_i および β_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を導入して分点 (Q_i, Y_i) をそれらで以下のように表す:

$$\frac{Q_{i+1} - Q_i}{Q_i - Q_{i-1}} = e^{\alpha_i}, \quad \frac{Y_{i+1} - Y_i}{Y_i - Y_{i-1}} = e^{\beta_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (Q_0, Y_0) &= \begin{cases} (q_{\min}, & -1 - \alpha_N) & (\alpha_N \geq 0) \\ (q_{\min} + \alpha_N, & -1) & (\alpha_N < 0), \end{cases} \\ (Q_N, Y_N) &= \begin{cases} (q_{\max}, & 1 + \beta_N) & (\beta_N \geq 0) \\ (q_{\max} - \beta_N, & 1) & (\beta_N < 0), \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 q_{\min} および q_{\max} はそれぞれ $\bar{q}_0(\mu)$ の最小、最大値である。(18)式は $Q(\mu)$ およびその逆関数 $Y(\eta)$ の定義域がそれぞれ $[-1, 1]$ および $[q_{\min}, q_{\max}]$ を含んでいなければならないことに由来する。すなわち、以下の不等式:

$$Q_0 \leq q_{\min}, \quad q_{\max} \leq Q_N, \quad Y_0 \leq -1, \quad 1 \leq Y_N, \quad (19)$$

が成立してなければならない。 α_N および β_N の値を変えることにより、端点 (Q_0, Y_0) および (Q_N, Y_N) は上記の制約を満しつつ動かすことができる。媒介変数 (α_i, β_i) ($i = 1, 2, \dots, N-1$) および(18)式によって決定される端点 (Q_0, Y_0) および (Q_N, Y_N) を与えれば、(17)式を連立させて解くことにより、分点 (Q_i, Y_i) ($i = 1, 2, \dots, N-1$) が以下の不等式:

$$Q_0 < Q_1 < \dots < Q_N, \quad Y_0 < Y_1 < \dots < Y_N \quad (20)$$

を満すように決定される。 (Q_i, Y_i) を (α_i, β_i) によって表すことにより、変分問題(12)および(13)は $2N$ 個の変数に対する制約なし最適化問題に変換される。(12)または(13)における μ に対する積分をガウス-ルジャンドル求積公式を用いて行えば、この最適化問題は、いろいろな数値解法で解くことができる。ここでは、収束の速さを考慮して、準ニュートン法 (*Numerical Recipes* を参照) に基づくライブラリサブルーチンを使用した。線分の数 (N) は10から50までを用いた。この理由は、 N が大きすぎると数値的最適化は局所的な最小値に収束してしまうことがあり、より大きな N が必ずしもより小さな上限値を与えるとは限らないからである。

c. 直接上限値

離散化の手法として、再びガウス-ルジャンドル求積公式を採用し、全球を M 個のバンド状の領域に分割する: 各バンドの面積は $2\pi a^2 \cdot w_j$ ($j = 1, 2, \dots, M$) とする. ここに、 w_j はガウシアンウェイトである. すなわち、各バンドの幅は μ -座標において w_j である. さて、順圧不安定非線形飽和過程における帯状バンド間の気塊の移動を考えよう. 初期の i -番目のバンドから最終的に j -番目のバンドに移動した気塊の面積を $2\pi a^2 \cdot r_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, M$) と書けば、 r_{ij} は以下の制約を受ける:

$$\sum_{i=1}^M r_{ij} = w_j \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^M r_{ij} = w_i \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (22)$$

$$r_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, M). \quad (23)$$

ここに、制約 (21) および (22) は気塊の面積 (または質量) の保存を意味し、(23) は面積が負になりえないことから要求される. 同様の制約条件はオペレーションズリサーチにおける輸送問題に現れる. ここで、(21) および (22) 式のうちの 1 つは、他の $2M - 1$ 個の式が成立すれば自動的に満たされる; すなわち、制約の次元は $2M - 1$ である、ということに注意されたい.

流れに沿った q の保存を考慮し、 r_{ij} を用いれば、最終状態における帯状平均絶対渦度 \bar{q}_j は以下のように表される:

$$\bar{q}_j = \frac{1}{w_j} \sum_{i=1}^M q_i r_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (24)$$

ここに、 $q_i = \bar{q}_0(\mu_i)$ ($i = 1, 2, \dots, M$) である. そこで、角運動量 D の保存則は以下のように表現される:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j \mu_j \bar{q}_j = D \quad (= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M w_i \mu_i q_i), \quad (25)$$

また、帯状成分のエンストロフィーは

$$F_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j \frac{1}{2} (\bar{q}_j)^2. \quad (26)$$

と書ける. というわけで、直接上限値を求める手続きが完成した; 「(26) のように定義される F_z を (21)~(25) の制約のもとで最小化せよ、そうすれば、直接上限値 (F_3) は (14) により得られる.」これは、やはりオペレーションズリサーチに現れる 2 次計画問題である. ここでは、その頑強さと簡潔さにかけて凸シンプレックス法 (例えば、Luenberger, 1973, を参照) を用いてこの問題を問いた. 帯状バンドの数 M は 100 まで用いたが、次節で与えられる $\bar{q}_0(\mu)$ 分布にはこれで十分であった.

4. ジェット分布と非線形時間発展

4 種類の上限值 $F_0 \sim F_3$ を我々の過去の研究 (IY94) における非線形時間発展の結果と比較するために、Hartmann (1983) によって導入された 2 種類のジェット分布 (それらは成層圏の極夜ジェットの理想化である) についての解析を行った.

この 2 種類の分布は以下のように定義される:

$$\text{tanh type jet:} \quad \bar{u}_0(\phi) = U \cos \phi \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{\phi - \phi_0}{B} \right), \quad (27)$$

$$\text{sech type jet:} \quad \bar{u}_0(\phi) = U \cos \phi \cdot \text{sech} \frac{2(\phi - \phi_0)}{B}, \quad (28)$$

ここに、 U はジェットの強さの指標で、 B は幅、 ϕ_0 は位置の指標である. tanh 型は帯状平均絶対渦度の負の緯度勾配をジェットの軸の赤道側に持っているのに対し、sech 型はそれを主にジェットの軸の極側に持っている. 帯状平均絶対渦度の初期分布 $\bar{q}_0(\mu)$ は以下のように与えられる:

$$\bar{q}_0(\mu) \equiv -\frac{1}{a} \frac{d}{d\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} \bar{u}_0 \right) + 2\Omega\mu. \quad (29)$$

非線形時間発展において、数値的な振舞いを滑らかにするために(1)式の右辺に人工的な粘性項を付加している:

$$\frac{Dq}{Dt} = \nu \left(\nabla^2 + \frac{2}{a^2} \right) q, \quad (30)$$

ここに、第2項($2/a^2$)は角運動量の保存則によるものである。本研究を通じて、粘性係数 ν を、我々のモデルにおける最大の全波数($n = 170$)での減衰時間スケールが1日になるような小さな定数に固定している。

非線形方程式(30)は初期状態 $q = \bar{q}_0(\mu) + q_d(\lambda, \mu)$ から数値的に時間積分した。ここに、 \bar{q}_0 は上で定義された初期帯状分布で、 q_d は初期擾乱である(その形状についてはIY94を参照)。 q_d の振幅は非常に小さくとってあるので、得られた結果は初期擾乱に依存しない。移流項は三角切断T170のスペクトル変換法を用いて計算した。時間積分には刻み幅0.01日のルンゲ-クッタ-ギル法を用いた。波成分エンストロフィーの最大値 $(F_w)_{\max}$ は積分期間(100日間)の間、毎ステップで記録した。以下、この最大値を F_4 と呼ぶことにする。

5. 結果

a. 上限値の比較

図1は上限値 F_1 , F_2 , and F_3 を、数値時間積分で得られた波成分エンストロフィーの最大値 F_4 と比較したものである。各値は自明な上限値 F_0 の値で規格化している。(a)および(b)は \tanh 型ジェットに対するものである;(a): $U = 180$ m/s, $B = 8^\circ$ で ϕ_0 を $35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$, および 55° としたもの, (b): $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 45^\circ$ で B を $4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ$, および 12° としたものである。(c)および(d)は sech 型ジェットに対するものである;(c): $\phi_0 = 60^\circ$, $B = 20^\circ$ で U を 120 m/s, 150 m/s, 180 m/s, 210 m/s, および 240 m/sとしたもの, (d): $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 60^\circ$ で B を $10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$, および 30° としたものである。

まず始めに、本来のShepherdの上限値 F_1 (三角形)を改良されたShepherdの上限値 F_2 (円)と比較すると、すべてのパラメータ範囲で改良された上限値は本来の上限値よりずっと小さな値になっていることが分かる。特に、(c)においてこれら2つの上限値の違いが顕著である; 本来の上限値 F_1 は U とともに大きくなっているのに対し、改良された上限値 F_2 は U によらずほとんど一定である。(b)および(d)においては、ジェットの幅が狭いとき(すなわち、(b)において $B = 4^\circ$ および 6° のとき、および(d)において $B = 10^\circ$ および 15° のとき)、本来の上限値は自明な上限値と等しくなってしまうが、改良された上限値はこれらの場合でもより小さな上限値を与えている。

次に、改良された上限値 F_2 と我々の直接上限値 F_3 (黒丸)を比較しよう。驚くべきことに、この2種の上限値は図1に示されているすべてのパラメータ範囲においてほとんど完全に等しくなっている。次節で示すように、この2種の上限値の等しさに対応して、直接上限値を与える \bar{q}_j 分布は改良されたShepherdの上限値を与える $Q(\mu)$ 分布にほとんど完全に等しい。

最後に、これらの上限値と非線形時間積分の結果 F_4 (四角)を比較しよう。ここで、 sech 型ジェットについて(c)の $U = 120$ m/sのところと(d)の $B = 30^\circ$ のところでは不安定性が弱いので、時間積分の最後まで波成分エンストロフィーはまだ増大していることに注意されたい。図1のすべてのパラメータ範囲において、改良されたShepherdの上限値および直接上限値は初期ジェットの分布を決める外部パラメータに対する F_4 の依存性をよく予測していることが分かる。ただし、これらの上限値は F_4 より数倍大きい。

b. 分布の比較

図2は、 \tanh 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 45^\circ$, $B = 8^\circ$ としたもの(a), および sech 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 60^\circ$, $B = 20^\circ$ としたもの(b)に対する帯状平均絶対過度分布を示したものである。初期分布 $\bar{q}_0(\mu)$ は点線で示されているように、 $d\bar{q}_0(\mu)/d\mu$ が負の部分を持っている。実線は、時間積分における波成分エンストロフィーの最大値に対応する $\bar{q}(\mu)$ 分布である。ここで、初期の $d\bar{q}_0(\mu)/d\mu$ が負の部分がすべての緯度でなくなっていることに注意されたい。改良されたShepherdの上限値に対応する $Q(\mu)$ 分布(破線)は直接上限値を与える \bar{q}_j 分布とほとんど完全に等しい(同じ破線に見えている)。これら2つの分布はすべての緯度で正の勾配を持ち、 $\bar{q}(\mu)$ に対するある見積りを与えているが、 \tanh 型ジェット(a)においてはかなり違いが見られる。両方の場合において、緯度微分が最大値をとるところで $Q(\mu)$ (または \bar{q}_j)分布に直線部分が現れるのは興味深い。このような直線部分の存在はShepherdの上限値に対してHaynesによって数学的に予言されている(Shepherd(1988)のAppendix Cを参照)。

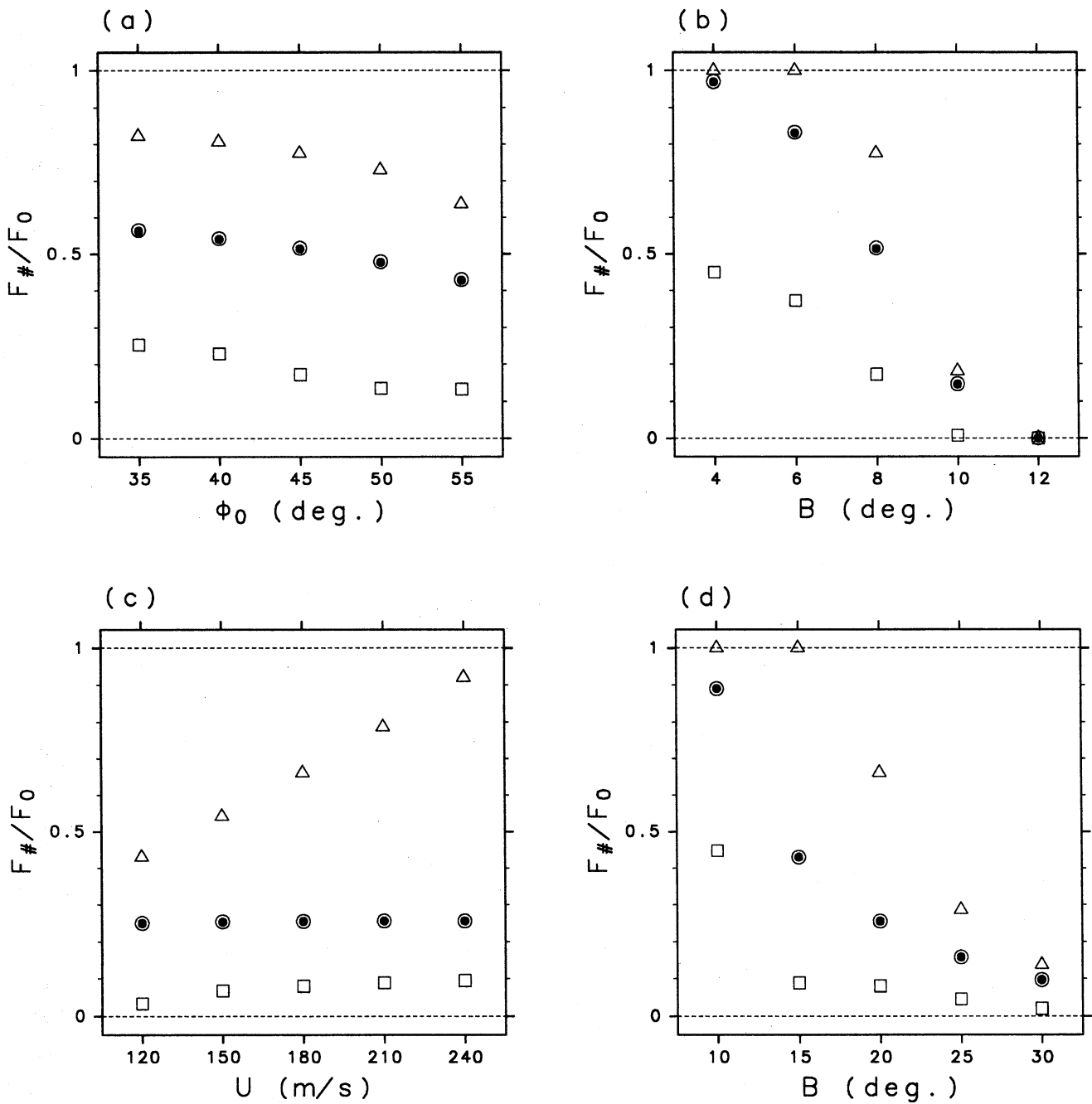


図1: 上限値 F_1 (三角), F_2 (円), および F_3 (黒丸) と波成分エントロピーの最大値 F_4 (四角) との比較. 各値は自明な上限値 F_0 の値で正規化されている. (a): tanh 型ジェットで $U = 180$ m/s, $B = 8^\circ$ として ϕ_0 を 35° から 55° まで変えたもの, (b): tanh 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 45^\circ$ として B を 4° から 12° まで変えたもの, (c): sech 型ジェットで $\phi_0 = 60^\circ$, $B = 20^\circ$ として U を 120 m/s から 240 m/s まで変えたもの, そして (d): sech 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 60^\circ$ として B を 10° から 30° まで変えたものである. $F_1 \sim F_4$ の意味については本文を参照.

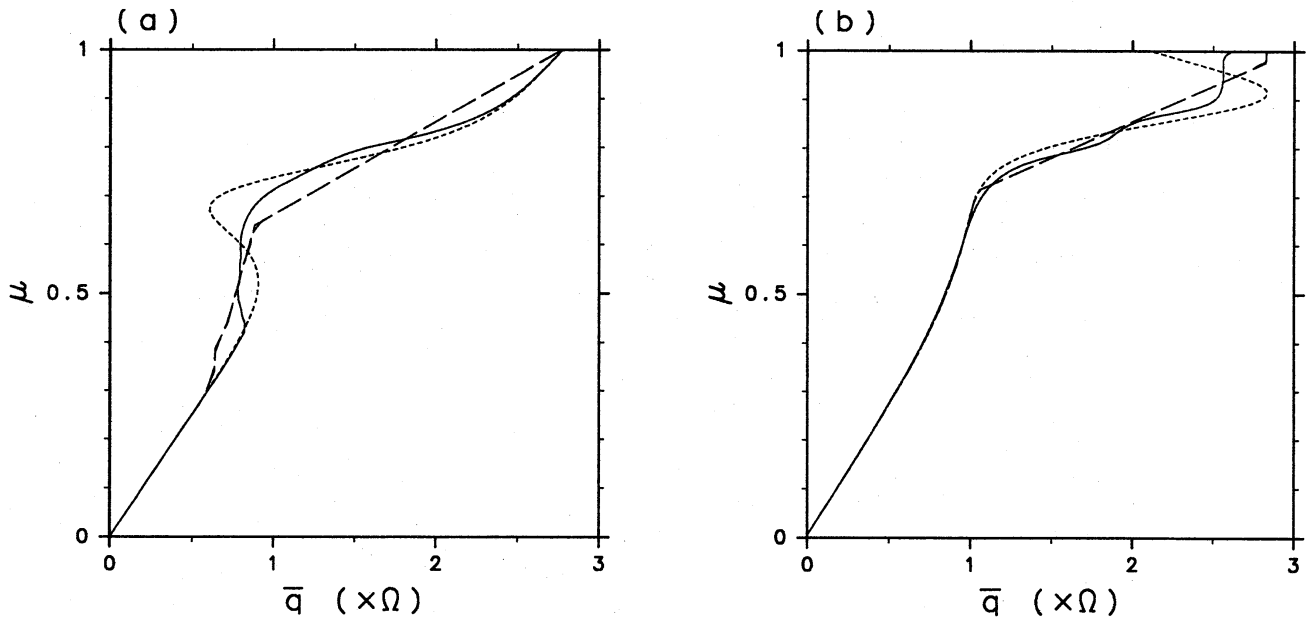


図 2: 帯状平均絶対渦度分布の比較. 点線は初期分布 $\bar{q}_0(\mu)$, 破線は改良された Shepherd の上限値に対する $Q(\mu)$ および直接上限値を与える \bar{q}_j 分布, そして, 実線は非線形時間積分における波成分エンストロフィーの最大値に対応する分布. (a): tanh 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 45^\circ$, $B = 8^\circ$ としたもの, (b): sech 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 60^\circ$, $B = 20^\circ$ としたもの.

6. 議論

前節で最も興味深い結果は, 改良された Shepherd の上限値と我々の直接上限値との間の同一性である. このような同一性は本稿で解析した分布についてだけでなく, その他の分布に対しても見られた. このことは, 改良された Shepherd の上限値はすべてのカシミア不変量および角運動量の保存の制約のもとでの最も小さな上限値を与えるということを示唆している. しかし, 上記の推測の証明は今後の研究で解決されるべき問題である. もし, 上記の推測が常に成立するならば, 改良された Shepherd の上限値は, 数値計算においてより経済的である. なぜなら, $Q(\mu)$ 分布は図 2 に示されているように直線部分を持つという性質のために少数の分点 (Q_i, Y_i) によってよく表現できるからである.

ここで論ずるべきもう一つの問題は, 改良された Shepherd の上限値(または我々の直接上限値)と非線形時間積分における波成分エンストロフィーの最大値との間の違いである. この違いについては以下の 3 つの原因が考えられる: 1) エネルギー保存則が取り込まれていないので, 上限値がまだ緩い. 2) 非線形時間積分のための (30) 式中の人工的粘性項が波成分エンストロフィーが真の最大値をとるのを妨害しているかもしれない. 3) 波成分エンストロフィーはべつに上限値の理論から見積られる最大値をとる必要はない. これらのうちのどれが最も重要な原因であるかを確かめるためには, エネルギー保存則を束縛として取り込んだ上限値の見積り方法が開発されねばならないし, 人工的粘性項の影響を減らすために, より高分解能モデルを用いた数値実験が必要である. これらは難しい問題であり, やはり今後研究されるべき課題である.

7. 結論

帯状ジェットの順圧不安定による擾乱の有限振幅成長に対する Shepherd (1988) の厳密な上限値を計算する数値的手法を開発した. さらに, すべてのカシミア不変量および全角運動量保存を束縛として含んだ「直接」上限値を求める新しい手法も提示した. 我々の数値手法においては凸シンプレックス法が利用された.

これらの手法を Hartmann (1983) によって提示された成層圏の極夜ジェットの不安定問題に対して適用した. いくつかの不安定なジェットの初期分布に対して上限値を得て, Ishioka and Yoden (1994) による非線形時間積分の結果と比較した. その結果, 改良された Shepherd の上限値は我々の直接上限値と等しく, このことは, この改良された上限値がすべてのカシミア不変量と全角運動量の保存の束縛のもとで最小の上限値を与えるということを示唆している. この改良された上限値と我々の直接上限値は, 初期ジェット分布を決定する外部パラメータに対する, 非線形時間積分における波成分エンストロフィーの最大値の依存性をよく予測している.

謝辞

第4節における最小化問題を解くために、京都大学大型計算機センター提供の富士通 SSL2 ライブラリの DMINF1 を用いた。また、図の描画には地球流体電脳ライブラリを用いた。石岡圭一は学術振興会の援助を受けており、本研究は部分的に文部省および東京大学気候システム研究センターとの共同研究の研究費から援助を受けている。

付録: 自明な上限値の導出

ある帯状分布 $\bar{q}(\mu)$ が $D \equiv [\mu\bar{q}]$ の保存のもとで $F_z \equiv [\frac{1}{2}\bar{q}^2]$ の最小値を与えるなら、任意の微小変分 $\delta\bar{q}(\mu)$ に対し以下の等式が成立していなければならない:

$$\delta F_z - \gamma \delta D = 0, \quad (31)$$

ここに、 γ はラグランジュの未定乗数で、 δF_z および δD はそれぞれ F_z および D の第1変分である。これらの変分は変分 $\delta\bar{q}(\mu)$ を使って以下のように表せる:

$$\delta F_z = \delta[\frac{1}{2}\bar{q}^2] = [\bar{q}\delta\bar{q}], \quad (32)$$

$$\delta D = \delta[\mu\bar{q}] = [\mu\delta\bar{q}]. \quad (33)$$

(32) および (33) を (31) に代入すれば:

$$[(\bar{q} - \gamma\mu)\delta\bar{q}] = 0. \quad (34)$$

この等式が任意の変分 $\delta\bar{q}(\mu)$ に対して満されるためには $\bar{q}(\mu)$ 分布は

$$\bar{q}(\mu) = \gamma\mu \quad (35)$$

となっていなければならない。(35) を D および F_z の定義式に代入すれば:

$$D = \gamma[\mu^2] = \frac{1}{3}\gamma, \quad (36)$$

$$F_z = \gamma^2[\frac{1}{2}\mu^2] = \frac{1}{6}\gamma^2. \quad (37)$$

(36) および (37) から γ を消去すれば:

$$F_z = \frac{3}{2}D^2. \quad (38)$$

これが D の保存のもとでの F_z の最小値を与える。

参考文献

- Hartmann, D. L., 1983: Barotropic instability of the polar night jet stream. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 817-835.
- Ishioka, K. and S. Yoden, 1994: Non-linear evolution of a barotropically unstable circumpolar vortex. *J. Meteor. Soc. Japan*, **72**, 63-80.
- Luenberger, D. G., 1973: *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 356pp.
- McIntyre, M. E. and T. G. Shepherd, 1987: An exact local conservation theorem for finite-amplitude disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Arnol'd's stability theorems. *J. Fluid Mech.*, **181**, 527-565.
- Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, 1992: *Numerical Recipes in FORTRAN: the art of scientific computing - 2nd. ed.*, Cambridge University Press, 963pp.
- Shepherd, T. G., 1987: Non-ergodicity of inviscid two-dimensional flow on a beta-plane and on the surface of a rotating sphere. *J. Fluid Mech.*, **184**, 289-302.
- Shepherd, T. G., 1988: Rigorous bounds on the nonlinear saturation of instabilities to parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, **196**, 291-322.