

等方性乱流における負のフラクタル次元

電気通信大学	細川 巖
航空宇宙技術研究所	山本 稀義
電気通信大学	生出 伸一

1. Intermittencyの記述

等方性乱流のIntermittencyは、Kolmogorov によって初めて考察された。Refined Similarity Hypothesis によれば、粘性に関係のない慣性領域において

$$\Delta u_r = v(\epsilon_r)^{1/3} \tag{1}$$

ここに Δu_r は距離 r にまたがるその方向の速度差、 ϵ_r は散逸の r をスケールとする体積平均値、 v は普遍確率変数である。 ϵ_r が一様ならIntermittencyはないが、そうでないときにIntermittencyが現われる。 v の分布関数はガウス分布に近いことが分かっている。1) したがって ϵ_r が一様なら Δu_r もガウス分布に近い筈であるが、 Δu_r の分布はexponentialに近いのである。ここにIntermittencyの明白な証拠があるといえる。

強い渦場のWormの分布が自己相似であるなら、散逸の分布も自己相似であろう。したがって散逸measureの空間構造にマルチフラクタルを予想することは自然である。最近の1部の乱流物理学者はIntermittencyと平行してMultifractalityを使っている。

Multifractalityの記述の出発点として、 q -th order Hausdorff Dimension $\tau(q)$ を次のように定義する。 r の大きさのdisjoint cellで空間を覆ったとき、cellの中の確率測度を $p_i = \epsilon_i r^d / \epsilon_L L^d$ (L : 全空間のスケール、 d : 空間の次元) として

$$\lim_{r \rightarrow 0} [\sum_i' p_i^q r^{-\tau(q)}] \rightarrow \text{finite} \tag{2}$$

ここに \sum_i' は $p_i = 0$ を除くsumである。 $\tau(q) = (q - 1)D(q)$ として、 $\tau(q)$ のかわりに $D(q)$ が使われることが多い。

実際に3次元等方性乱流の散逸量を計算し、(2)によって $D(q)$ が求められる。 $D(q)$ のルジャンドル変換により $f(\alpha)$ spectrumが得られる。2) $f(\alpha)$ は、散逸の自己相似性を $\epsilon_r \sim r^{\alpha-1}$ のように表したとき、iso- α setのフラクタル次元を示す。

第1図に最近計算された $f(\alpha)$ spectrumを示す。DNSの結果はサークルで表され、上から左右に $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 30$ に対応する。 $f(\alpha) < 0$ の部分があるように見えるが、(2)の定義から、これは $f(\alpha) = 0$ に集積すべきものの誤差であると考えられる。典型的ないくつかのモデル (lognormal model, beta model, p model, 3D binomial Cantor set model) も比較のために示した。

p modelは、散逸の1次元実験データ (Taylor Hypothesisに基づく) から計算された $f(\alpha)$ spectrumに一致するように作られているので、このラインは $f(\alpha)$ の1次元実験データとみなしてよい。

2. Intermittency のモデル

モデルは、まず3次元等方性乱流の $f(\alpha)$ spectrum を説明できなければならない。この観点から言うと、第1図ではlognormal modelと3D binomial Cantor set modelしか適当ではない。外にもいろいろなモデルが考案されているが、この観点から見て、適当といえるものはない。

しかし、lognormal modelは $f(\alpha) < 0$ の無限に長い部分を持ち、問題がある。 $|q|$ の小さい範囲では、lognormal modelはいい近似になっているが、 $|q|$ の大きいところでは破綻することが、Intermittency exponents $\mu(q)$ の実験データとの比較考察からも分かっている。

Intermittency exponents $\mu(q)$ は、次のように定義される。

$$\langle (\varepsilon_r/\varepsilon_l)^q \rangle = (r/l)^{-\mu(q)}, \quad r < l \quad (\langle \rangle \text{はensemble average}). \quad (3)$$

$\mu(q)$ の一般形は、 $r/l = A^{-1}$ と固定し、そのときの $\varepsilon_r/\varepsilon_l = y$ のPDFが分かっていると、(3)より

$$\mu(q) = \log_A \left[\int_0^{A^d} y^q p(y; A^{-1}) dy \right] \quad (4)$$

と表せる。3D binomial Cantor set model では

$$p(y; A^{-1}) = v_1 \delta(y - B) + v_2 \delta(y - C) \quad (5)$$

と与える。ここに

$$v_1 = v_2 = 1/2, \quad A = 2^{1/3}, \quad B = C = 1 \pm [2^{\mu/3} - 1]^{1/2}, \quad \mu = \mu(2). \quad (6)$$

これに対応する $D(q)$, $f(\alpha)$, $p(y; r/l)$ の解析表現も得られる。3) μ の実験値は0.2 ~ 0.3とされているが、ここでは今のDNSの値0.2を使う。

3. 負のフラクタル次元の存在

(2)の方法から出発して $f(\alpha)$ を求めるかぎり、 $f(\alpha) < 0$ になることはありえない。 p_i を作る α のサポートの最小のものは、 p_i の最大又は最小値を与える”点”であり、この場合に $f(\alpha) = 0$ となるからである。

この意味では、上に求めたマルチフラクタルは正しいが、もし(2)のアンサンブルを考えると、アンサンブルのすべてのサンプルに p_i の最大又は最小値が共通であることは稀であるから、アンサンブル全体の p_i の最大又は最小値は”点”を構成することはできなくなる。こうして $f(\alpha) < 0$ を意味づける試みが最近、Mandelbrot⁴⁾などによってなされ、有限のサンプルの情報からアンサンブルについての負の部分を含む $f(\alpha)$ の計算法が開発されている。ここではこれと等価なものを q を媒介変数として次の

ように示す。

$$\alpha = -\langle (\varepsilon_r/\varepsilon_l)^q \ln(\varepsilon_r/\varepsilon_l) \rangle / [\langle (\varepsilon_r/\varepsilon_l)^q \rangle \ln(1/r)] + 1,$$

$$f(\alpha) = \alpha q + \ln \langle (\varepsilon_r/\varepsilon_l)^q \rangle / \ln(1/r) + d - q \quad (7)$$

実際この方法でやると、一つのサンプルでも負の部分を含む $f(\alpha)$ が計算できる。第1図を計算したのと同じデータを使って、第2図が得られる。点線が $1/r = (4/128)/(2/128), (8/128)/(4/128), \dots, (64/128)/(32/128)$ の5ケースについて平均したものであり、 \times は $1/r = (16/128)/(8/128)$ のケースを単独に示す。 $r = 8/128, 16/128$ は慣性領域に属するので、点線と \times がほぼ一致するのは興味深い。この $f(\alpha)$ の左側branchは途中までは3D binomial Cantor set modelと一致しているが、それ以後は独自の行動をとり、 $f(\alpha) = -8$ くらいまでさがる。右側branchはピークから徐々に3D binomial Cantor set modelから離れ、やはり $f(\alpha) = -8$ くらいまでさがる。

この $f(\alpha)$ に合うモデルは3D binomial Cantor set modelでは作れない。しかし、3D trinomial Cantor set model を考えれば可能であり、図に示すとうりである。3D trinomial Cantor set model では(5)の代わりに

$$p(y; A^{-1}) = v_1 \delta(y - B) + v_2 \delta(y - M) + v_3 \delta(y - C), \quad 0 < C < M < B < A^3 \quad (8)$$

と置き、(4)によって得られる

$$\mu(q) = \log_A(v_1 B^q + v_2 M^q + v_3 C^q) \quad (9)$$

において、次の7個の条件によってパラメータを決定する。

$$\mu(0) = 0 \text{ (space-filling)} \quad v_1 + v_2 + v_3 = 1,$$

$$\mu(1) = 0 \text{ (measure-preserving)} \quad v_1 B + v_2 M + v_3 C = 1,$$

$$\mu(2) = \mu(= 0.2),$$

$$\alpha_\infty (= -0.7) = 1 - \log_A B, \quad f_\infty (= -8) = \log_A v_1 + 3,$$

$$\alpha_{-\infty} (= 3.9) = 1 - \log_A C, \quad f_{-\infty} (= -8) = \log_A v_3 + 3,$$

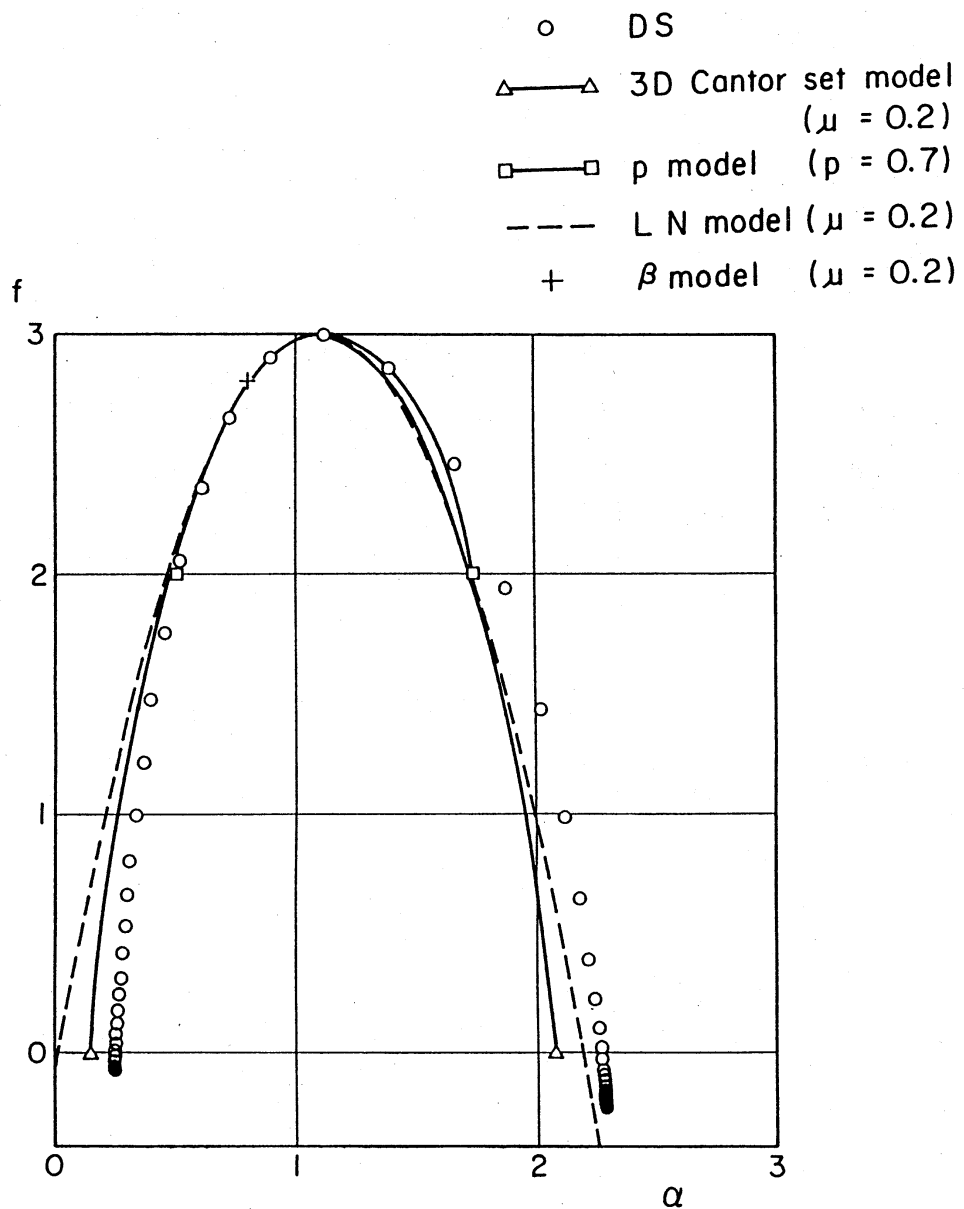
この結果、 $A = 1.2165, B = 1.39469, M = 1.00581, C = 0.56694, v_1 = v_3 = 0.116183, v_2 = 0.767635$ が得られる。

マルチフラクタルの重要な性質は、ほとんど $f(\alpha)$ spectrum の $2 < f < 3$ の間の挙動で決まってしまうので、どちらのモデルを使っても実用的に大きな差はないだろう。

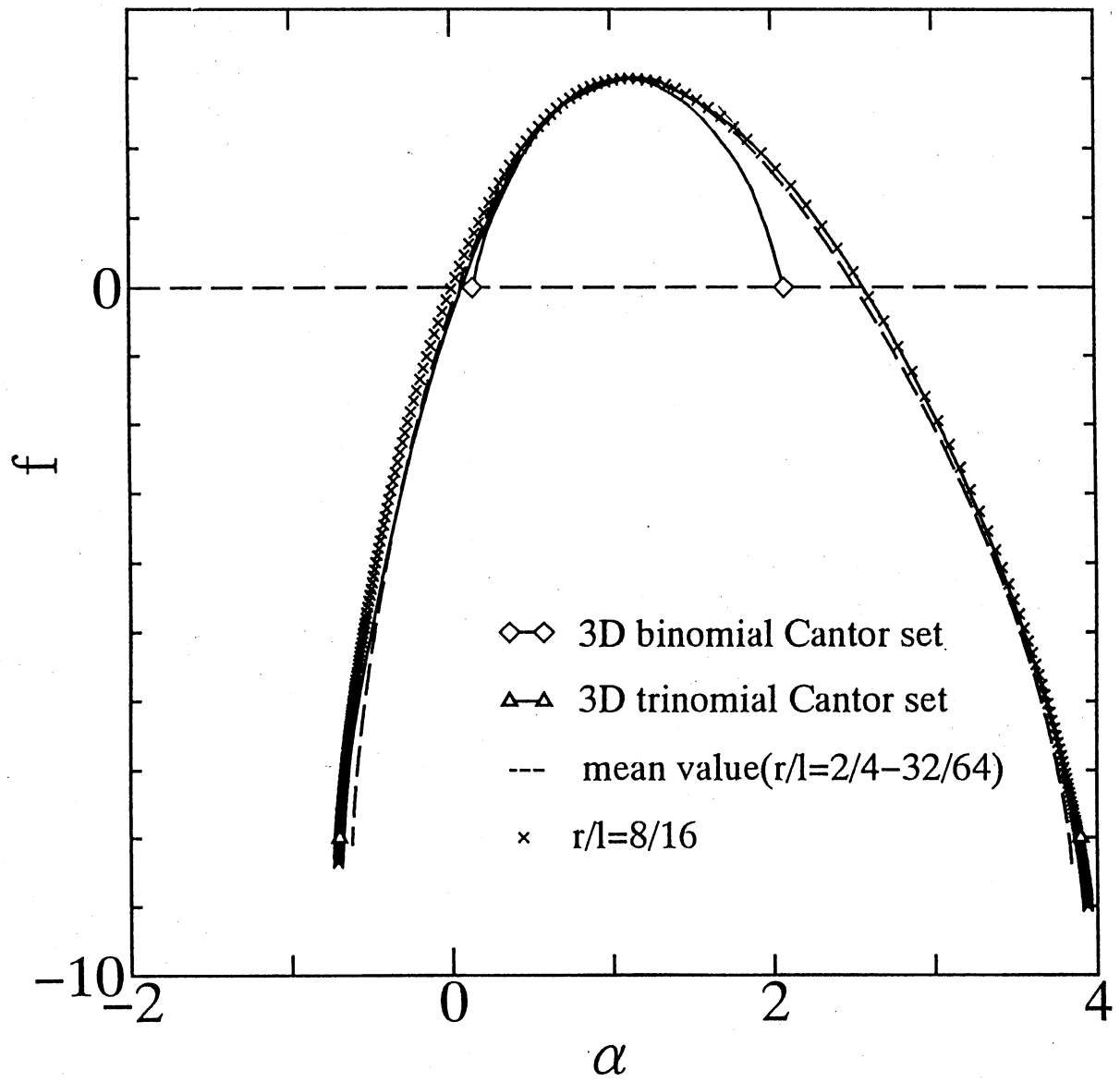
現在サンプルを変えてこの結果の普遍性を検討中である。

文献

- 1) G. Stolovitzky, P. Kailasnath, and K. R. Sreenivasan: Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1178; I. Hosokawa, C. W. Van Atta, and S. T. Thoroddsen: Fluid Dyn. Res. 13 (1994) 329.
- 2) I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Jpn. 59 (1990) 401; in Turbulence and Coherent Structures, ed. by O. Metais and M. Lesieur (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991), p. 177; T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Shraiman: Phys. Rev. A33 (1986) 1141.
- 3) I. Hosokawa: Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 1054.
- 4) B. B. Mandelbrot: Physica A 153 (1990) 306.



第1図

f- α spectrum

第2図