

熱対流系における縮退を伴う分岐

原 研 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)
Birmingham 大数学 永田雅人 (Masato Nagata)

1. はじめに

$(z_1, z_2) \rightarrow (e^{ikm\theta} z_1, e^{ikn\theta} z_2), 0 \leq \theta < 2\pi$ (rotation); $(z_1, z_2) \rightarrow (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ (flip),
 $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, k \geq 1$, によって定義される $O(2)$ -対称性の下での波数比 $m:n$ の定常モード間相互作用を考える。この群の作用と可換なベクトル場は、 $O(2)$ -不変量 $u = |z_1|^2, v = |z_2|^2, w = z_1^n \bar{z}_2^m + \bar{z}_1^n z_2^m$ を変数として持つ滑らかな関数 $f_i(\lambda; u, v, w)$ を用いて

$$\dot{z}_1 = f_1 z_1 + f_2 \bar{z}_1^{n-1} z_2^m, \quad \dot{z}_2 = f_3 z_2 + f_4 z_1^n \bar{z}_2^{m-1}, \quad (1)$$

のように表わされる。

Okamoto (1989) と Okamoto and Tavener (1991) は、 $(m, n) = (1, 2)$ について、

$$f_2(0; 0, 0) = 0 \text{ and } f_4(0; 0, 0) \neq 0; \quad f_2(0; 0, 0) \neq 0 \text{ and } f_4(0; 0, 0) = 0$$

のような 2 種類の縮退の状況を考え、(1) と $O(2)$ -equivalent なノーマルフォームがどのようであればならないかを明らかにし、また、分岐ダイアグラムを求め、Taylor-Couette 流に対して数値的に求められている分岐ダイアグラムが、縮退の影響を取り入れることによって完全に再現されることを示した。

ここでは、鉛直スロットに水平磁場が作用する場合を取り上げ、 $f_4(0; 0, 0) = 0$ という縮退と $\frac{\partial f_3}{\partial v}(0; 0, 0) = 0$ という縮退が少なくとも低磁気 Prandtl 数、低 Prandtl 数の極限において実現可能であることを示す。前者の場合、Okamoto 達の結論は、通常の 3 次の非線形項を含むノーマルフォームでは、分岐特性を議論するのに不十分であり、少なくとも 4 次の非線形項がノーマルフォームに含まれなければならないということである。また、後者の縮退の場合には、5 次の非線形項を含まなければならないことが予想される。そこで、5 次の非線形項を含む 2:1 相互作用の振幅方程式を導き、振幅方程式に含まれる係数を数値的に決定し、代表的な場合について分岐ダイアグラムを求める。

2. 問題の定式化と線形安定性

2 枚の鉛直な平板が平行に配置されており、各々が異なる一様温度を有している状況を考える。ここで、さらに、水平方向に一様磁場を平板と垂直に作用させる。その際、磁気 Prandtl 数が十分小さい極限では、攪乱成分は次の方程式によって記述される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + G\bar{u}(x)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + G(\mathbf{i} \cdot \mathbf{u})\frac{d\bar{u}}{dx}\mathbf{k} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \theta \mathbf{k} + \nabla^2 \mathbf{u} + H^2(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{i}, \\ P\left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{u}(x)\frac{\partial \theta}{\partial z} + G(\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta\right] &= \nabla^2 \theta, \\ -(\mathbf{i} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \nabla^2 \mathbf{b}, \end{aligned}$$

ここで

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{H^2}\left(x - \frac{\sinh Hx}{2\sinh H/2}\right),$$

H は Hartmann 数、 G は Grashof 数、 P は Prandtl 数である。

さらに低 Prandtl 数の極限を考え、2次元攪乱のみを考えると、流れ関数の攪乱成分 $\psi(x, z; t)$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + G\bar{u}\frac{\partial}{\partial z}\Delta\psi - G\bar{u}''\frac{\partial\psi}{\partial z} + J(\psi, \Delta\psi) = \Delta^2\psi - H^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \quad (2)$$

に支配される。また、境界条件として

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } x = \pm 1/2,$$

が課せられる。ここで、まず、線形攪乱のみを考え、左辺 Jacobian を無視し、 $G^{-1}\psi \rightarrow \tilde{\psi}$ と $Gt \rightarrow \tilde{t}$ とおく。ノーマルモード解析として、

$$\tilde{\psi} = \phi(x) e^{i\alpha(z - c\tilde{t})}$$

を線形攪乱方程式に代入することによって、ノーマルモードの振幅関数 ϕ に対する方程式と境界条件が次のように得られる。

$$i\alpha(\bar{u} - c)S\phi - i\alpha\bar{u}''\phi - G^{-1}S^2\phi + G^{-1}H^2D^2\phi = 0,$$

$$\phi = D\phi = 0 \quad \text{at } x = \pm 1/2,$$

ここで、 $D = d/dx$ であり、また $S = D^2 - \alpha^2$ とおいた。ここに得られた線形固有値問題は、 $H = 0$ の場合、せん断流の線形安定性を支配する Orr-Sommerfeld 方程式に一致する。Fig.1 には、 $H = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ の場合の主流速度分布を示し、Fig.2 には、線形中立曲線を H をパラメータとして示す。この図に示された中立曲線より上の領域では主流は定常モードに対して不安定であるが、その際、線形固有関数は Hermite 対称を持つ。ある Grashof 数に対して中立曲線上の波数比を 2:1 とならしめることは一般に可能であり、その組み合わせは、 $O(2)$ -対称性の下での 2:1 相互作用に対応する。縮退が生じない場合については、例えば Fujimura (1992)。ここでは、線形安定性並びに多重尺度法に基づく 3 次の非線形項までを含む弱非線形解析を行った結果、

$$H = 8.7701, \quad \alpha = 1.060288, \quad G = 185278: \quad f_4(0; 0, 0) = 0$$

$$H = 4.0432, \quad \alpha = 1.585432, \quad G = 20317.1: \quad \frac{\partial f_3}{\partial v}(0; 0, 0) = 0$$

という 2 種類の縮退が発生可能であることが分かった。前者は Okamoto 達によってすでに取り扱われてきたものであるが、後者については、まだ明らかにはなっていない。

3. 中心多様体の方法と振幅方程式

流れ関数 $\psi(x, z, t)$ を Fourier 級数と線形固有関数に展開する。

$$\psi(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_n^{(j)}(x) A_n^{(j)}(t) e^{in\alpha x}.$$

その結果、第 n Fourier モードの第 j 固有関数に対する振幅 $A_n^{(j)}(t)$ の時間発展が

$$\frac{dA_n^{(j)}}{dt} = \sigma_n^{(j)} A_n^{(j)} + \sum_{k,l,m} \lambda_{k,n-k}^{(j,l,m)} A_k^{(l)} A_{n-k}^{(m)},$$

のように記述される。ただし、

$$\sigma_n^{(j)} = - \frac{\int_{-1}^1 \tilde{\phi}_n^{(j)} [in\alpha G\bar{u} S_n \phi_n^{(j)} - in\alpha G\bar{u}'' \phi_n^{(j)} - S_n^2 \phi_n^{(j)} + h^2 D^2 \phi_n^{(j)}] dx}{\int_{-1}^1 \tilde{\phi}_n^{(j)} S_n \phi_n^{(j)} dx},$$

$$\lambda_{k,n-k}^{(j,l,m)} = \frac{\int_{-1}^1 \tilde{\phi}_n^{(j)} [ik\alpha \phi_k^{(l)} S_{n-k} D \phi_{n-k}^{(m)} - i(n-k)\alpha D \phi_k^{(l)} S_{n-k} \phi_{n-k}^{(m)}] dx}{\int_{-1}^1 \tilde{\phi}_n^{(j)} S_n \phi_n^{(j)} dx}.$$

5 次の非線形項までを含めるためには、Fourier モードの数として $-6 \leq n \leq 6$ で十分であることは直ちに分かる。これに対して、固有モードをいくつとればよいのかは、決して自明ではない。通常行われる $j=1$ のみという仮定は非常に極端な打ち切りであるので、 $1 \leq j \leq J (\gg 1)$ としてみても $J=1$ とすることの妥当性を評価しなければならないが、これまで、数値的にすらそのようなチェックがきちんとは行われた例は見当たらない。ここでは、したがって、Fourier モードとしては 13 モード、固有モードとしては一応 $J (\gg 1)$ モードを解析に含める。

さて、2:1 相互作用を行っているモードの振幅を $\bar{A}_2^{(1)}, \bar{A}_1^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ と書くと、これらは原点で中心固有空間に接しており、また、これら以外の $13 \times J - 4$ 個の振幅 $\bar{A}_6^{(j)}, \bar{A}_5^{(j)}, \bar{A}_4^{(j)}, \bar{A}_3^{(j)}, \bar{A}_2^{(j)}, \bar{A}_1^{(j)}, A_0^{(j)}, A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, A_3^{(j)}, A_4^{(j)}, A_5^{(j)}, A_6^{(j)}$ は安定固有空間に接している。各々に対する振幅方程式は

$$\dot{\bar{A}}_1^{(1)} = \bar{\sigma}_1^{(1)} \bar{A}_1^{(1)} + \sum \lambda_{k,-1-k}^{(1,l,m)} A_k^{(l)} A_{-1-k}^{(m)}, \quad \dot{A}_1^{(1)} = \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + \sum \lambda_{k,1-k}^{(1,l,m)} A_k^{(l)} A_{1-k}^{(m)}, \quad (3)$$

$$\dot{\bar{A}}_2^{(1)} = \bar{\sigma}_2^{(1)} \bar{A}_2^{(1)} + \sum \lambda_{k,-2-k}^{(1,l,m)} A_k^{(l)} A_{-2-k}^{(m)}, \quad \dot{A}_2^{(1)} = \sigma_2^{(1)} A_2^{(1)} + \sum \lambda_{k,2-k}^{(1,l,m)} A_k^{(l)} A_{2-k}^{(m)}, \quad (4)$$

$$\dot{\bar{A}}_n^{(j)} = \bar{\sigma}_n^{(j)} \bar{A}_n^{(j)} + \sum \lambda_{k,-n-k}^{(j,l,m)} A_k^{(l)} A_{-n-k}^{(m)}, \quad \dot{A}_n^{(j)} = \sigma_n^{(j)} A_n^{(j)} + \sum \lambda_{k,n-k}^{(j,l,m)} A_k^{(l)} A_{n-k}^{(m)}, \quad (5)$$

ただし $j \geq 2$ for $n = \pm 1, \pm 2$; $j \geq 1$ otherwise, と表わされる。

$A_n^{(j)}$ (except for $(n, j) = (\pm 1, 1)$ and $(\pm 2, 1)$) を

$$A_n^{(j)} = h_n^{(j)}(\bar{A}_1^{(1)}, A_1^{(1)}, \bar{A}_2^{(1)}, A_2^{(1)}),$$

と書く。但し、 $h_n^{(j)}(0) = dh_n^{(j)}(0) = 0$ 。この表現を $A_n^{(j)}$ に対する方程式 (5) に代入し、(3,4) を用いて $h_n^{(j)}$ の具体形を決め、(3,4) に結果を代入することによって、結局 3 次の非線形項を含む振幅方程式が

$$\dot{A}_1^{(1)} = \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + \Lambda_{-12} \bar{A}_1^{(1)} A_2^{(1)} + \Lambda_{-111} |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} + \Lambda_{-221} |A_2^{(1)}|^2 A_1^{(1)},$$

$$\dot{A}_2^{(1)} = \sigma_2^{(1)} A_2^{(1)} + \Lambda_{11} A_1^{(1)2} + \Lambda_{-112} |A_1^{(1)}|^2 A_2^{(1)} + \Lambda_{-222} |A_2^{(1)}|^2 A_2^{(1)},$$

のように求められる。さらに、5次までの非線形項を含む振幅方程式も、長い計算の後

$$\begin{aligned} \dot{A}_1^{(1)} = & \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + \Lambda_{-12} \bar{A}_1^{(1)} A_2^{(1)} + \Lambda_{-111} |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} + \Lambda_{-221} |A_2^{(1)}|^2 A_1^{(1)} \\ & + \Lambda_{-2-122} |A_2^{(1)}|^2 \bar{A}_1^{(1)} A_2^{(1)} + \Lambda_{-1-112} |A_1^{(1)}|^2 \bar{A}_1^{(1)} A_2^{(1)} + \Lambda_{-2111} \bar{A}_2^{(1)} A_1^{(1)3} \\ & + \Lambda_{-2-2122} |A_2^{(1)}|^4 A_1^{(1)} + \Lambda_{-2-1112} |A_1^{(1)}|^2 |A_2^{(1)}|^2 A_1^{(1)} \\ & + \Lambda_{-1-1111} |A_1^{(1)}|^4 A_1^{(1)} + \Lambda_{-1-1-122} \bar{A}_1^{(1)3} A_2^{(1)2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_2^{(1)} = & \sigma_2^{(1)} A_2^{(1)} + \Lambda_{11} A_1^{(1)2} + \Lambda_{-112} |A_1^{(1)}|^2 A_2^{(1)} + \Lambda_{-222} |A_2^{(1)}|^2 A_2^{(1)} \\ & + \Lambda_{-1-122} \bar{A}_1^{(1)2} A_2^{(1)2} + \Lambda_{-2112} |A_2^{(1)}|^2 A_1^{(1)2} + \Lambda_{-1111} |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)2} \\ & + \Lambda_{-2-2222} |A_2^{(1)}|^4 A_2^{(1)} + \Lambda_{-2-1122} |A_1^{(1)}|^2 |A_2^{(1)}|^2 A_2^{(1)} \\ & + \Lambda_{-1-1112} |A_1^{(1)}|^4 A_2^{(1)} + \Lambda_{-21111} \bar{A}_2^{(1)} A_1^{(1)4}, \end{aligned}$$

のように求められる。ここで、各方程式の右辺第1項は線形項であり、次元の低減の際には0であるが、共鳴点近傍では unfolding parameter として (G, H, α) の値に応じた線形増幅特性を与える。

固有関数展開の上限値 J の値に対する収束性は数値的に吟味した。その結果、振幅方程式に含まれる係数値の収束性から $J \geq 25$ が結論された。

4. 簡単な平衡解

$A_n(t) = a_n(t) e^{\theta_n(t)}$ とおき、 $\Theta(t) = \theta_2 - 2\theta_1$ とすると、 a_1, a_2 , と Θ に対する簡単な平衡解として、次の3種類の解が存在可能であることがわかる。

1. pure mode (PM): $a_1 = 0, a_2 \neq 0$.
2. mixed mode (MM): $a_1 a_2 \neq 0, \Theta = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
3. traveling wave (TW): $a_1 a_2 \neq 0, \Theta \neq n\pi$.

5. 分岐ダイアグラム

Fig.3 に示したのは $f_4(0; 0, 0) = 0$ かつ $\alpha = 1.05$ と $\alpha = 1.07$ とした場合の分岐ダイアグラムである。これらは5次の非線形項を含む振幅方程式に基づいて求めたものである。振幅方程式を3次で打ち切った場合に得られるダイアグラムと比較して、相互作用点近傍で異なった振舞いをするのがわかる。同様のダイアグラムを $\alpha = 1.5854$ と $\alpha = 1.65$ について $\partial f_3(0; 0, 0)/\partial v = 0$ の場合に対してプロットしたのが Fig.4 である。

今の段階では、このように縮退の影響を無視して3次までで打ち切った系において得られる分岐特性が、相互作用点近傍において、5次までの項を考慮に入れた系において得られる特性とはかなり異なっていることだけしか結論することができない。今後、Newton法を用いた分岐の数値解析結果との比較検討を行い、局所理論の妥当性を調べる。

参考文献

1. H.Okamoto, $O(2)$ -equivariant bifurcation equations of mode (1,2), Sci.Papers College Arts Sci.Univ.Tokyo, **39** (1989) 1-43.
2. H.Okamoto and S.J.Tavener, Degenerate $O(2)$ -equivariant bifurcation equations and their applications to the Taylor Problem, Japan J.Indus.Appl.Math. **8** (1991) 245-273.
3. K.Fujimura, Higher harmonic resonances in free convection between vertical parallel plates, Phil.Trans.R.Soc.Lond. **A340** (1992) 95-130.

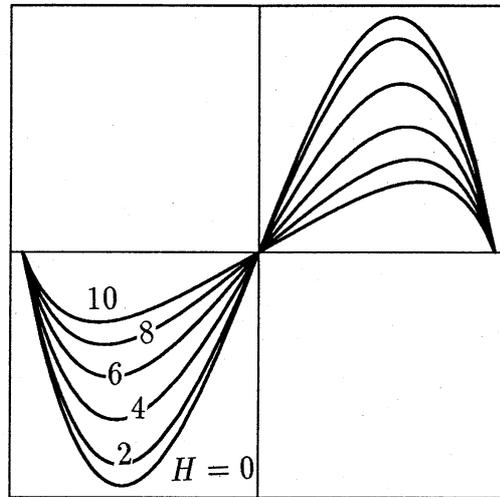


Fig.1. 異なる H の値に対する主流速度分布。 $H = 0, 2, 4, 6, 8, 10$.

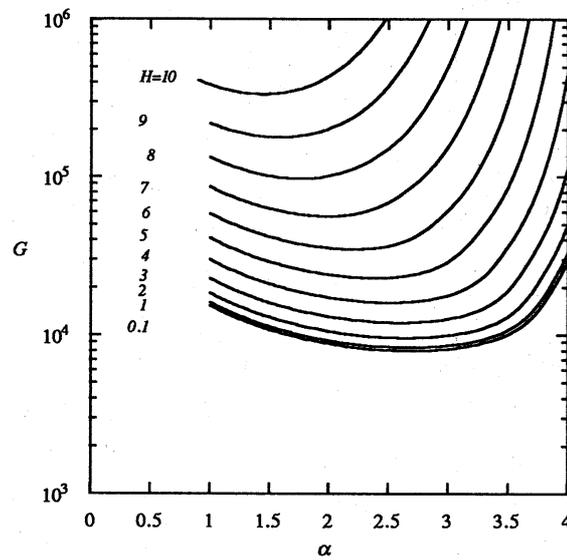


Fig.2. 異なる H の値に対する線形中立安定曲線。

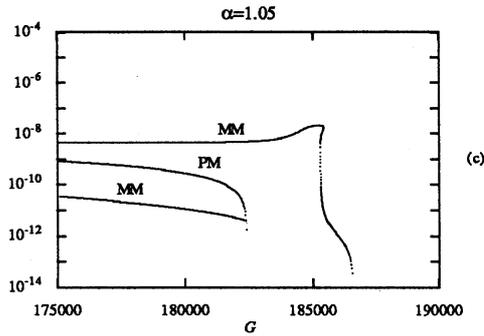
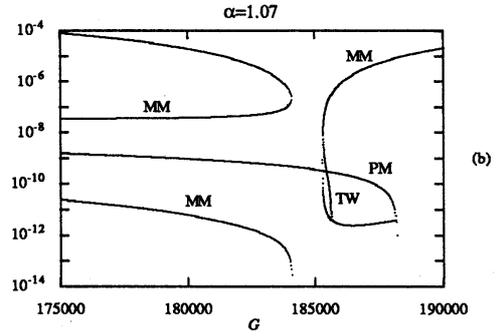
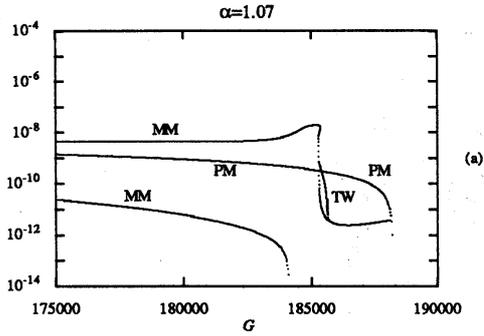


Fig.3. $H = 4.0432$ における $\partial f_3(0;0,0)/\partial v = 0$ の場合の分岐ダイアグラム。
 (a): $\alpha = 1.07$, 5 次の振幅方程式、
 (b): $\alpha = 1.07$, 3 次の振幅方程式、
 (c): $\alpha = 1.05$, 5 次の振幅方程式。

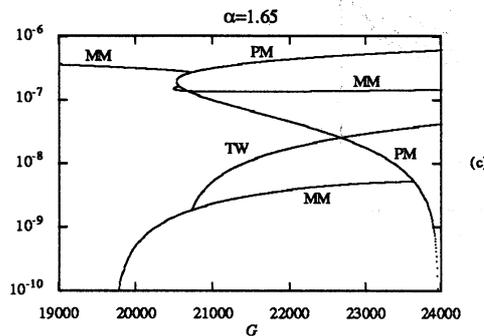
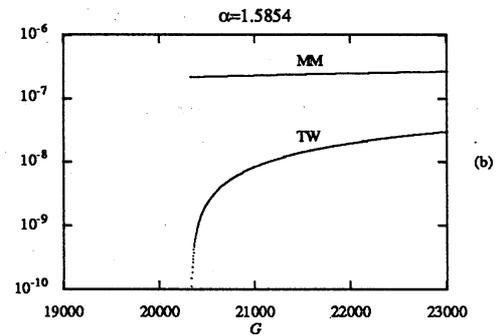
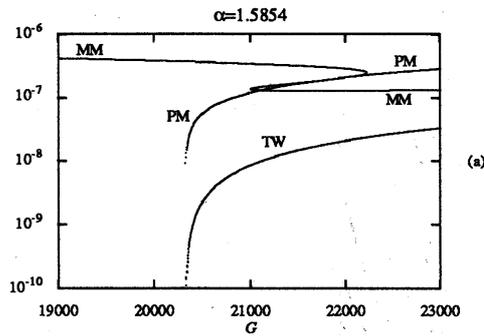


Fig.4. $H = 8.7701$ における $f_4(0;0,0) = 0$ の場合の分岐ダイアグラム。
 (a): $\alpha = 1.5854$, 5 次の振幅方程式、
 (b): $\alpha = 1.5854$, 3 次の振幅方程式、
 (c): $\alpha = 1.65$, 5 次の振幅方程式。