数理解析研究所講究録
924巻 1995年 134-152

2元3次形式のゼータ関数、歴史と新予想

大阪大学 理学部　大野 泰生 (Yasuo Ohno)

1 序

本稿では、2元3次形式のゼータ関数の係数を、具体的に書き出し、比較することによって得られた、ある予想を紹介する。このゼータ関数は、T. Shintani[25] によって二十年余り前に定義されたもので、四つ組の Dirichlet 級数である。多分これまで、この級数の係数が具体的に書き出されたことはなく、四つともが、互いに異なる関数だと思われていた。今回紹介する予想は、この関数が、二組ずつ本質的に同じ関数であると主張するものである。

大阪大学理学部の伊吹山先生が、2元3次形式のゼータ関数は、すでに良く知られている関数の有限和や積で書けるのではないか、もし2元3次形式のゼータ関数の係数が具体的に書き出せれば、その表記の予想が立つかもしれない、という考えを話して下さった。これはつまり、2元3次形式のゼータ関数の伊吹山・斉藤理論にあたるものが、存在するにちがいない、という意味だと思われる。このことが今回、2元3次形式のゼータ関数の係数を具体的に書き出そうと思った動機である。

2元3次形式のゼータ関数は、Dirichlet 級数の形で定義されており、その係数は2元3次形式のある種の類数で与えられている。H. Davenport の論文を調べてみると、2元3次形式の類数が求められることが分かり、従ってゼータ関数の係数が具体的に書き出せることが判明した。本稿の4章において、類数計算に用いたこの Davenport の理論を、2元3次形式の類数の簡単な歴史とともに紹介する。

2元3次形式のゼータ関数の定義と、T. Shintani によって与えられた、収束、解析接続、極とその留数、および関数等式についての定理は、2章で紹介する。その後3章では、Davenport の理論に基づいて、3次形式の類数を算出し、2元3次形式のゼータ関数の係数を具体的に求めた結果得られた予想を述べると共に、B. Datskovsky と D. J. Wright によって得られた関数等式の対角

化を用いて、予想を認めた時の、(3 次形式の) ゼータ関数の新しい形の定義と関数等式を与える。

ここであらかじめ注意しておくが、もともと目標とした、既知の関数の有限和や積によるゼータ関数の表記についての予想は、まだ得られていない。今回紹介する予想は、先にも述べたように、ゼータ関数が二組ずつ、本質的に同じものであるというものである。

2 2 元 3 次形式のゼータ関数

まず基本的な定義と記号を定める。2 元 3 次形式の空間 V を

$$V = \left\{ F(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\}$$

とし、Vの部分集合 L と $\widehat{L}$ を

$$L = \left\{ F(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$\widehat{L} = \left\{ F(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3 \in L \mid x_2, x_3 \in 3\mathbf{Z} \right\}$$

で定める。L と $\widehat{L}$ は、ある内積に関する双対格子になっている。

2 元 3 次形式

$$F(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3$$

の判別式 $D_3(F)$ を

$$D_3 = D_3(F) = 18x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 - 4x_2^3x_4 - 27x_1^2x_4^2$$

で定義する。$\widehat{L}$ の元の判別式は 27 の倍数になることが、簡単にわかる。

Vの元 $F(u,v)$ と $GL(2,\mathbf{R})$ の元 gに対して、

$$gF(u,v) = F((u,v)g)$$

で作用を定義する。Vの元 $F_1(u,v)$ と $F_2(u,v)$ が同値であるとは、$SL(2,\mathbf{Z})$ の元 gで、

$$gF_1(u,v) = F_2(u,v)$$

となるものが存在することと定義する。同値な Vの元の判別式は一致する。

$L(n), \widehat{L}(n)$ でそれぞれ、L と $\widehat{L}$ の元で、判別式 $D_3 = n$ のものの全体を記す。類数 $h(n), \widehat{h}(n)$ などを次で定義する。

$h(n) = \sharp\left\{L(n)\text{ に含まれる同値類}\right\}$

$\widehat{h}(n) = \sharp\left\{\widehat{L}(n)\text{ に含まれる同値類}\right\}$

$h_1(n) = \sharp\left\{L(n)\text{ の元で }SL(2,\mathbf{Z})\text{ 固定群の order が }1\text{ のものによる同値類}\right\}$

$\widehat{h}_1(n) = \sharp\left\{\widehat{L}(n)\text{ の元で }SL(2,\mathbf{Z})\text{ 固定群の order が }1\text{ のものによる同値類}\right\}$

$h_2(n) = \sharp\left\{L(n)\text{ の元で }SL(2,\mathbf{Z})\text{ 固定群の order が }3\text{ のものによる同値類}\right\}$

$\widehat{h}_2(n) = \sharp\left\{\widehat{L}(n)\text{ の元で }SL(2,\mathbf{Z})\text{ 固定群の order が }3\text{ のものによる同値類}\right\}$

$n \neq 0$ ならば、$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$ が成り立つ。

T. Shintani[25] は、3 次形式の類数に対して次の四つの Dirichlet 級数を定義した。

$$
\begin{aligned}
\xi_1(L,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_1(n) + \frac{1}{3}h_2(n)}{n^s} \\
\xi_2(L,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(-n)}{n^s} \\
\xi_1(\widehat{L},s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{h}_1(n) + \frac{1}{3}\widehat{h}_2(n)}{n^s} \\
\xi_2(\widehat{L},s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{h}(-n)}{n^s}
\end{aligned}
$$

これらの関数に対して、次の定理が与えられている。

定理 2.1 (T. Shintani[25]) (i) 先の四つの Dirichlet 級数は、$Re(s) > 1$ で絶対収束する。そして、$s = 1$ と $s = \frac{5}{6}$ の 1 位の極を除いた全平面で正則関数に解析接続され、以下の関数等式を満たす。

$$
\begin{pmatrix} \xi_1(L,1-s) \\ \xi_2(L,1-s) \end{pmatrix} = \Gamma(s-\frac{1}{6})\Gamma(s)^2\Gamma(s+\frac{1}{6})2^{-1}3^{6s-2}\pi^{-4s}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & \sin \pi s \\ 3\sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(\widehat{L},s) \\ \xi_2(\widehat{L},s) \end{pmatrix}
$$

(ii)$s = 1$ および、$s = \frac{5}{6}$ における留数は次の通りである。

	$\xi_1(L,s)$	$\xi_2(L,s)$	$\xi_1(\hat{L},s)$	$\xi_2(\hat{L},s)$
$s=1$	$\dfrac{\pi^2}{9}$	$\dfrac{\pi^2}{6}$	$\dfrac{\pi^2}{162}$	$\dfrac{\pi^2}{81}$
$s=\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{18}r$	$\dfrac{1}{6}r$	$\dfrac{\sqrt{3}}{162}r$	$\dfrac{1}{54}r$

ただし、$r=\zeta(\frac{2}{3})\dfrac{\Gamma(\frac{1}{3})(2\pi)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})}$

B. Datskovsky と D. J. Wright[4] は、$\mathbf{C}$ 上および $\mathbf{Q}_p$上で2元3次形式の空間を扱い、この空間の adelic zeta functions の解析接続、関数等式、極の位置とその留数を求めた。また彼等はこの論文の中で、2元3次形式のゼータ関数の以下のような、無限和による表記を与えている。

$$\xi_i(L,s)=2\zeta(4s)\zeta(6s-1)\sum_k o(k)^{-1}|\Delta_k|^{-s}\frac{R_k(2s)}{R_k(4s)}$$

ここで $i=1$ の時の和は、$[k:\mathbf{Q}]\le 3$ なるすべての totally real な体を走り、$i=2$ の時の和は、$[k:\mathbf{Q}]\le 3$ なる体で、complex place を持つものの全体を走る。ζは Riemann ゼータ関数、ζ_kは kの Dedekind ゼータ関数、Δ_kは k の判別式で、$o(k), R_k(s)$ は以下のとおりである。

$$o(k)=\begin{cases}6, & \text{if } [k:\mathbf{Q}]=1,\\ 2, & \text{if } [k:\mathbf{Q}]=2,\\ 3, & \text{if } [k:\mathbf{Q}]=3,\end{cases}$$

$$R_k(s)=\begin{cases}\zeta(s)^3, & \text{if } [k:\mathbf{Q}]=1,\\ \zeta(s)\zeta_k(s), & \text{if } [k:\mathbf{Q}]=2,\\ \zeta_k(s), & \text{if } [k:\mathbf{Q}]=3.\end{cases}$$

3 予想

これまで、2元3次形式の四つのゼータ関数の係数が、具体的に書き出されたことはないようである。これらの関数を詳しく調べるために今回、3次形式の類数を具体的に求めることによって、これらの関数の係数を200項目まで書き出すことを行った。その結果次の予想が得られた。

予想 3.1

$$(i) \qquad \xi_1(\widehat{L},s) = 3^{-3s}\xi_2(L,s)$$
$$(ii) \qquad \xi_2(\widehat{L},s) = 3^{1-3s}\xi_1(L,s)$$

200項目までの各係数に対して、この予想は常に正しいことがわかっている。

またこの予想が、関数等式や、$s=1$ と $s=\frac{5}{6}$での留数に対して、矛盾しないことが確認できる。

考察1

予想3.1の (i) と (ii) は同値である。

Proof

(i) を仮定して (ii) を導く。定理2.1の下側の関数等式に (i) を代入すると、

$$\xi_2(L,1-s) = \Gamma(s-\frac{1}{6})\Gamma(s)^2\Gamma(s+\frac{1}{6})2^{-1}3^{3s-2}\pi^{-4s}$$
$$\times\{3\sin\pi s\xi_2(L,s) + 3^{3s}\sin 2\pi s\xi_2(\widehat{L},s)\}$$

s に $1-s$ を代入すると、

$$\xi_2(L,s) = \Gamma(\frac{5}{6}-s)\Gamma(1-s)^2\Gamma(\frac{7}{6}-s)2^{-1}3^{1-3s}\pi^{4s-4}$$
$$\times\{3\sin\pi s\xi_2(L,1-s) - 3^{3(1-s)}\sin 2\pi s\xi_2(\widehat{L},1-s)\}$$

$\dfrac{1}{\Gamma(1-z)} = \dfrac{\sin\pi z}{\pi}\Gamma(z)$ を用いると、

$$\xi_2(L,s)\sin\pi(s-\frac{1}{6})\sin^2\pi s\sin\pi(s+\frac{1}{6})\Gamma(s+\frac{1}{6})\Gamma(s)^2\Gamma(s-\frac{1}{6})2\cdot 3^{3s-1}\pi^{-4s}$$
$$= 3\sin\pi s\xi_2(L,1-s) - 3^{3(1-s)}\sin 2\pi s\xi_2(\widehat{L},1-s)$$

この式の $\xi_2(L,1-s)$ に上の最初の式を代入すると、

$$3^{3(1-s)}\xi_2(\widehat{L},1-s) = \Gamma(s-\frac{1}{6})\Gamma(s)^2\Gamma(s+\frac{1}{6})2^{-1}3^{3s-2}\pi^{-4s}$$
$$\times\{3\sin 2\pi s\xi_2(L,s) + 3^{3s+1}\sin\pi s\xi_2(\widehat{L},s)\}$$

この右辺は、(i) および、もう一方の関数等式により、$3\xi_1(L,1-s)$ に等しい。s に $1-s$ を代入すると、

$$3^{3s}\xi_2(\hat{L},s)=3\xi_1(L,s)$$

よって、(ii) が導かれた。逆も同様にできる。

Q.E.D.

考察1により、予想が正しい時、T. Shintani によって与えられた関数等式ふたつが、同値になることもわかる。また、関数等式に $s=\frac{1}{2}$を代入した式は、予想3.1の式に $s=\frac{1}{2}$を代入したものと一致する。

考察2

定理2.1の留数の表より、以下がわかる。

$$\begin{aligned}
(i)\quad Res_{s=1}(\xi_1(\hat{L},s)) &= \frac{\pi^2}{162}=3^{-3}\frac{\pi^2}{6}=3^{-3}Res_{s=1}(\xi_2(L,s))\\
Res_{s=\frac{5}{6}}(\xi_1(\hat{L},s)) &= \frac{\sqrt{3}}{162}r=3^{-\frac{5}{2}}\frac{1}{6}r=3^{-3\cdot\frac{5}{6}}Res_{s=\frac{5}{6}}(\xi_2(L,s))\\
(ii)\quad Res_{s=1}(\xi_2(\hat{L},s)) &= \frac{\pi^2}{81}=3^{-2}\frac{\pi^2}{9}=3^{1-3}Res_{s=1}(\xi_1(L,s))\\
Res_{s=\frac{5}{6}}(\xi_2(\hat{L},s)) &= \frac{1}{54}r=3^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{18}r=3^{1-3\cdot\frac{5}{6}}Res_{s=\frac{5}{6}}(\xi_1(L,s))
\end{aligned}$$

従って $s=1$ と $s=\frac{5}{6}$での留数に対しては、予想が肯定される。

さて、ここで先の予想を、係数による表現に書き換えてみよう。

予想 3.2 $n>0$ に対し、

$$\begin{aligned}
(i)\quad \hat{h}_1(27n)+3^{-1}\hat{h}_2(27n) &= h(-n)\\
(ii)\quad \hat{h}(-27n) &= 3h_1(n)+h_2(n)
\end{aligned}$$

従ってこの予想は、類数相互の関係を与えていることが分かる。

さらに、T. Shintani が与えている以下の命題を用いて、h と $\widehat{h}$ だけで予想を書くことも可能であるが、ここでは省略する。

命題 3.1 (T. Shintani[25]) $n>0$ に対し、

$$2h_2(n) = \sharp\Big\{(x,y)\in \mathbf{Z}^2 \mid (9x^2+3xy+y^2)^2 = n\Big\}$$

$$2\widehat{h}_2(n) = \sharp\Big\{(x,y)\in \mathbf{Z}^2 \mid 81(x^2+xy+y^2)^2 = n\Big\}$$

次に、この予想を認めることにして、B. Datskovsky と D. J. Wright[4] によって得られた関数等式の対角化を用いると、

$$Z_{\pm}(s) = 2^s 3^{\frac{3}{2}s}\pi^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\mp\frac{1}{6})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\mp\frac{1}{3})(3^{\frac{1}{2}}\xi_1(L,s)\pm\xi_2(L,s))$$

と定義する時、関数等式

$$Z_{\pm}(1-s) = Z_{\pm}(s)$$

が満たされる。

4　2 元 3 次形式の類数

この章では、2 元 3 次形式の類数を求めるのに今回用いた、H. Davenport の理論を紹介する。2 元 3 次形式の類数の歴史は古く、約百五十年ほどさかのぼることができる。G. Eisenstein [11][12] と F. Arndt[2][3] は、互いに独立に、$\widehat{L}$ 型の 3 次形式

$$F(u,v) = x_1u^3 + 3x_2u^2v + 3x_3uv^2 + x_4v^3 \in \widehat{L}$$

について研究し、Hessian を用いて 3 次形式に 2 次形式を対応させ、3 次形式の判別式 (今回用いた判別式 D_3の定数倍) や同値関係を定義し、対応する 2 次形式がその作用について、covariant であることを示した。さらに Arndt は、この型の 3 次形式について、任意の判別式に対する同値類の個数 (類数) が有限であることを示し、判別式 D_Aが負 ($D_3=-27D_A, D_A$は Arndt の判別式) のふたつの 3 次形式の同値・非同値の判定法を与え、-2000 以上の負の判別式 D_A について、この型の 3 次形式の類数を求めた [3]。

今世紀の初頭になって、G. B. Mathews と W. E. H. Berwick[15][16] が L 型の (既約な)3 次形式に対して、-1000 以上の負の判別式 D_3について、類数を求めた。この研究では、前述の Hessian と同時に、2 元 3 次形式を 3 次方程式と見たときの虚数解をうまく用いている。

H. Davenport[6][7] は簡約 2 次形式を応用した形で定義された簡約 3 次形式の係数の範囲を、各判別式ごとに決定する定理を与え、有限回の試行ですべての簡約 3 次形式を求めることを可能にした。また一方では、ひとつの類に含まれる簡約 3 次形式の個数が、対応する 2 次形式の形によって具体的にわかることも述べている。そして、$\mathbf{Q}$ 上既約な 3 次形式の類数の評価を与えている。

この章で述べる方法は、この Davenport の理論を用いている。判別式が正の場合と負の場合で、簡約 3 次形式の定義を含めて多少異なる点があるが、いずれの場合も、各判別式に対して、簡約 3 次形式の個数を求め、各類に含まれる簡約 3 次形式の個数 (重複度) を求める、という手順は同じである。4.1 節では判別式が正の場合、4.2 節では判別式が負の場合を述べる。2 次形式の判別式は D_2で表し、2 次形式への $GL(2,\mathbf{R})$ の作用は、3 次形式の場合と類似に定義する。

4.1 判別式が正の場合

$V(resp.\ L)$ の元で、判別式 D_3が正のものの全体を $V_+(resp.\ L_+)$ で表す。つまり、

$$\begin{aligned} V_+ &= \left\{F(u,v) \in V \mid D_3(F) > 0\right\} \\ L_+ &= L \cap V_+ \end{aligned}$$

L_+の元 $F(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3$に対して、Hessian $H(F)$ を次で定義する。

$$H(F)(u,v) = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{vmatrix} = Au^2 + Buv + Cv^2$$

ここで、

$$A = x_2^2 - 3x_1x_3\ ,\ B = x_2x_3 - 9x_1x_4\ ,\ C = x_3^2 - 3x_2x_4$$

である。

命題 4.1 (cf. Davenport[7]) V_+の元$F(u,v)$に対するHessian $H(F)(u,v)$について、次が成り立つ。

(i) 判別式$D_3(F)$と$D_2(H(F))$が

$$D_2(H(F)) = -3D_3(F)$$

の関係を満たす。

(ii) $H(F)(u,v)$は、正定値2元2次形式である。

(iii) $GL(2,\mathbf{Z})$の任意の元gに対して、

$$H(gF)(u,v) = (det\ g)^2 g\,(H(F))\,(u,v)$$

が成り立つ。

さてここで簡約3次形式を定義する前に、(正定値) 簡約2次形式について簡単に復習しておく。実数係数2次形式$Au^2+Buv+Cv^2$が、$|B| \le A \le C$かつ、$B=A$または$A=C$ならば、$B \ge 0$を満たすとき、これを簡約2次形式と呼ぶ。簡約2次形式は、実数係数正定値2元2次形式の$SL(2,\mathbf{Z})$の作用による類別の完全代表系になっている。

一般に、L_+の元$F(u,v)$は、$SL(2,\mathbf{Z})$の元$-E$の作用によって、$-F(u,v)$と同値である。$F(u,v) = x_1u^3+x_2u^2v+x_3uv^2+x_4v^3$とすると、判別式$D_3(F) \neq 0$だから、$x_1 = x_2 = 0$は、ありえない。従って$L_+$の元は、必要ならば$-E$を作用させることによって、$x_1 = 0$かつ$x_2 > 0$、または$x_1 > 0$を満たすようにできる。

L_+の元$F(u,v) = x_1u^3+x_2u^2v+x_3uv^2+x_4v^3$が、$x_1 = 0$かつ$x_2 > 0$または、$x_1 > 0$を満たし、さらに$F(u,v)$に対するHessian$H(F)(u,v)$が簡約2次形式である時、$F(u,v)$を簡約3次形式と呼ぶことにする。

次の補題は、与えられた判別式$D_3 > 0$を持つ簡約3次形式の、係数の満たす条件を与えている。この補題によって、与えられた判別式を持つすべての簡約3次形式を、書き出すことが可能になる。

補題 4.1 (H. Davenport[7]) x_1, x_2, x_3, x_4を実数とし、A, B, CおよびD_3を、

$$A = x_2^2 - 3x_1x_3,\quad B = x_2x_3 - 9x_1x_4,\quad C = x_3^2 - 3x_2x_4,$$

$$D_3 = 18x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 - 4x_2^3x_4 - 27x_1^2x_4^2$$

で定義された関数とする。
$|B| \le A \le C$ かつ、 $0 < D_3 \le X$であれば、

$$|x_1| < X^{\frac{1}{4}},\ |x_2| < 2X^{\frac{1}{4}},$$

$$|x_1x_4| < X^{\frac{1}{2}},\ |x_2x_3| < 4X^{\frac{1}{2}},$$

$$|x_1x_3^3| < 8X,\ |x_2^3x_4| < 8X,$$

$$x_3^2|x_2x_3 - 9x_1x_4| < 4X$$

となる。

Proof.
A, B, C の仮定から、

$$\begin{aligned}
9Cx_1^2 - 3Bx_1x_2 + Ax_2^2 &= 9x_1^2x_3^2 - 27x_1^2x_2x_4 - 3x_1x_2^2x_3 + 27x_1^2x_2x_4 + Ax_2^2 \\
&= -3x_1x_3(x_2^2 - 3x_1x_3) + Ax_2^2 \\
&= A^2. \\
Cx_3^2 - 3Bx_3x_4 + 9Ax_4^2 &= Cx_3^2 - 3x_2x_3^2x_4 + 27x_1x_3x_4^2 + 9x_2^2x_4^2 - 27x_1x_3x_4^2 \\
&= Cx_3^2 - 3x_2x_4(x_3^2 - 3x_2x_4) \\
&= C^2.
\end{aligned}$$

一般に、 $P + Q + R = T$ かつ、 $P > 0,\ R > 0,\ T > 0,\ Q^2 \le PR$ ならば、

$$|Q| \le \sqrt{PR} \le \frac{P+R}{2}$$

$$P+R=T-Q\leq T+|Q|\leq T+\frac{P+R}{2}$$

であるから、

$$P+R\leq 2T$$

となる。$|B|\leq A\leq C$ の仮定から、$B^2\leq AC$ だから、先のふたつの式において、これを用いると、

$$9Cx_1^2+Ax_2^2\leq 2A^2$$

$$Cx_3^2+9Ax_4^2\leq 2C^2$$

となる。従って、

$$|x_1|\leq\frac{\sqrt{2}}{3}AC^{-\frac{1}{2}}\quad |x_2|\leq\sqrt{2}A^{\frac{1}{2}}$$

$$|x_3|\leq\sqrt{2}C^{\frac{1}{2}}\quad |x_4|\leq\frac{\sqrt{2}}{3}CA^{-\frac{1}{2}}$$

を得る。$B^2\leq AC$ つまり、$AC-B^2\geq 0$ であったから、

$$AC\leq AC+\frac{1}{3}(AC-B^2)=-\frac{1}{3}(B^2-4AC)=D_3$$

である。これと、$A\leq C$ を用いると、

$$\begin{aligned}
|x_1| &\leq \frac{\sqrt{2}}{3}AC^{-\frac{1}{2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{3}A^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{3}(AC)^{\frac{1}{4}}\leq\frac{\sqrt{2}}{3}D_3^{\frac{1}{4}}\\
|x_2| &\leq \sqrt{2}A^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{2}(AC)^{\frac{1}{4}}\leq\sqrt{2}D_3^{\frac{1}{4}}\\
|x_1x_4| &\leq \frac{2}{9}(AC)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{2}{9}D_3^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|x_2x_3| &\leq 2(AC)^{\frac{1}{2}} \leq 2D_3^{\frac{1}{2}} \\
|x_1x_3^3| &\leq \frac{4}{3}AC \leq \frac{4}{3}D_3 \\
|x_2^3x_4| &\leq \frac{4}{3}AC \leq \frac{4}{3}D_3 \\
x_3^2|x_2x_3 - 9x_1x_4| &= x_3^2|B| \leq x_3^2A \leq 2AC \leq 2D_3
\end{aligned}
$$

となって、補題は示された。

Q.E.D.

先にも述べたように、この補題によって、任意の判別式 $D_3 > 0$ を持つ簡約3次形式が、すべて求まるようになった。従って、類数と、簡約3次形式の関係が明らかになれば、任意の判別式に対して、類数が求まることになる。次の命題によって、それは実現する。

簡約3次形式 $F(u,v)$ に $SL(2,\mathbf{Z})$ の元 gを作用させたものが、再び簡約3次形式ならば、gは $H(F)(u,v)$ を固定する。従ってこの $F(u,v)$ と同値な簡約3次形式は、$H(F)(u,v)$ の $SL(2,\mathbf{Z})$ 固定群の元の $F(u,v)$ への作用を調べれば、すべて求まる。このことを用いて、以下が得られる。

命題 4.2 (cf. Davenport[7]) L_+の任意の $SL(2,\mathbf{Z})$ 同値類は、少なくとも1つの簡約3次形式 $F(u,v)$ を含む。$F(u,v)$ と同値な簡約3次形式の個数は、$F(u,v)$ 自身を含めて、以下の通りである。

(i)	$H(F)(u,v) = Au^2 + Auv + Av^2$のとき	1個
(ii)	$H(F)(u,v) = Au^2 + Av^2$のとき	2個
(iii)	$H(F)(u,v)$ が (i),(ii) 以外のとき	1個

固定群の order については、以下の命題が得られる。

命題 4.3 (cf. Davenport[7]) L_+の簡約3次形式 $F(u,v)$ の $SL(2,\mathbf{Z})$ 固定群の *order* は以下の通りである。

(i)	$H(F)(u,v) = Au^2 + Auv + Av^2$のとき	3
(ii)	$H(F)(u,v) = Au^2 + Av^2$のとき	1
(iii)	$H(F)(u,v)$ が (i),(ii) 以外のとき	1

4.2 判別式が負の場合

$V(resp.\ L)$ の元で、判別式 D_3が負のものの全体を $V_-(resp.\ L_-)$ で表す。つまり、

$$\begin{aligned} V_- &= \left\{F(u,v) \in V \mid D_3(F) < 0\right\} \\ L_- &= L \cap V_- \end{aligned}$$

L_-の任意の元 $F(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3$は、以下の分解を唯一つ持つ。

(i) $x_1 \neq 0$ の場合。実数 θ, P, Q, Rにより、

$$F(u,v) = (u - \theta v)(Pu^2 + Quv + Rv^2)$$

と、書けて、

$$x_1 = P, \quad x_2 = Q - P\theta, \quad x_3 = R - Q\theta, \quad x_4 = -R\theta$$

となる。

(ii) $x_1 = 0$ の場合。

$$F(u,v) = v(Pu^2 + Quv + Rv^2)$$

と書けて、

$$x_2 = P, \quad x_3 = Q, \quad x_4 = R$$

となり、すべて整数である。

いずれの場合も、必要ならば、$-E$を作用させて $F(u,v)$ を$-F(u,v)$ で取り替えることによって、Pを正にすれば、$Pu^2 + Quv + Rv^2$は、正定値２元２次形式となる。

上の分解で得られる $Pu^2 + Quv + Rv^2$を、$K(F)(u,v)$ と書くことにし、残りの１次形式を、$M(F)(u,v)$ で表すことにする。つまり、

$$F(u,v) = M(F)(u,v)K(F)(u,v)$$

とする。また、$x_1 = 0$ かつ $x_2 > 0$ または、$x_1 > 0$ であることと、Pが正であることは、同値である。

$K(F)(u,v)$ が、正定値簡約 2 次形式となる L_{-}の元 $F(u,v)$ を、簡約 3 次形式と呼ぶことにする。

$x_1 = 0$ なる簡約 3 次形式の係数は、$|x_3| \leq x_2 \leq x_4$であるから、判別式 $D_3 = x_2^2(x_3^2 - 4x_2x_4) \leq -3x_2^4$と書けるので、

$$x_2 \leq (\frac{-D_3}{3})^{\frac{1}{4}}$$

となり、この x_2に対して、x_3, x_4は、

$$|x_3| \leq x_2 \leq x_4 = \frac{x_3^2 - \frac{D_3}{x_2^2}}{4x_2}$$

なる有限個の整数の組に限られる。従って $x_1 = 0$ なる簡約 3 次形式をすべて書き出すことが可能になる。

次の補題は、与えられた判別式 $D_3 < 0$ を持つ $x_1 \neq 0$ なる簡約 3 次形式の、係数の満たす条件を与えている。この補題によって、与えられた判別式を持ち $x_1 \neq 0$ なるすべての簡約 3 次形式を、書き出すことが可能になる。

補題 4.2 (H. Davenport [7]) $\theta, P, Q, R \in \mathbf{R}$ を実数とし、

$$|Q| \leq P \leq R$$

を、満たしているとする。

$$\Delta = -D_3 = (4PR - Q^2)(P\theta^2 + Q\theta + R)^2,$$

$$x_1 = P, \quad x_2 = Q - P\theta, \quad x_3 = R - Q\theta, \quad x_4 = -R\theta.$$

とする時、$0 < \Delta \leq X$ ならば、次が成り立つ。

$$0 < x_1 < 2X^{\frac{1}{4}}, \quad |x_2| < 3X^{\frac{1}{4}},$$

$$|x_1x_4| < 2X^{\frac{1}{2}}, \quad |x_2x_3| < 8X^{\frac{1}{2}},$$

$$|x_1x_3^3| < 12X, \quad |x_2^3x_4| < 12X.$$

Proof.
仮定から、

$$|Q\theta| \leq \sqrt{PR\theta^2} \leq \frac{1}{2}(P\theta^2 + R)$$

であるから、

$$P\theta^2 + Q\theta + R \geq \frac{1}{2}(P\theta^2 + R)$$

また、

$$4PR - Q^2 \geq 3PR$$

であるから、

$$\begin{aligned} PR(P\theta^2 + R)^2 &\leq \frac{1}{3}(4PR - Q^2)\times 4(P\theta^2 + Q\theta + R)^2 \\ &= \frac{4}{3}\Delta \end{aligned}$$

ゆえに、

$$P^3R\theta^4 + 2P^2R^2\theta^2 + PR^3 \leq \frac{4}{3}\Delta$$

ここで、左辺の３項ともが、非負であることに注意。これを用いて、

$$\begin{aligned} x_1 &= P \leq (PR^3)^{\frac{1}{4}} \leq (\frac{4}{3}\Delta)^{\frac{1}{4}} \\ |x_2| &\leq P + P|\theta| \leq (PR^3)^{\frac{1}{4}} + (P^3R\theta^4)^{\frac{1}{4}} \leq 2(\frac{4}{3}\Delta)^{\frac{1}{4}} \\ |x_1x_4| &= PR|\theta| \leq (PR^3)^{\frac{1}{4}}(P^3R\theta^4)^{\frac{1}{4}} \leq (\frac{4}{3}\Delta)^{\frac{1}{2}} \\ |x_2x_3| &\leq (P + P|\theta|)(R + P|\theta|) \leq PR + 2PR|\theta| + P^2\theta^2 \\ &\leq (PR^3)^{\frac{1}{2}} + 2(2P^2R^2\theta^2)^{\frac{1}{2}} + (P^3R\theta^4)^{\frac{1}{2}} \leq 4(\frac{4}{3}\Delta)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

また、一般に実数A, Bに対して、$(A+B)^3 \leq 4(|A|^3+|B|^3)$ であるから、

$$\begin{aligned} |x_1 x_3^3| &\leq 4P(R^3+P^3|\theta|^3) \\ &\leq 4PR^3+4(PR^3)^{\frac{1}{4}}(P^3R\theta^4)^{\frac{3}{4}} \leq \frac{32}{3}\Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_2^3 x_4| &\leq 4R|\theta|(P^3+P^3|\theta|^3) \\ &\leq 4(PR^3)^{\frac{3}{4}}(P^3R\theta^4)^{\frac{1}{4}}+4P^3R\theta^4 \leq \frac{32}{3}\Delta \end{aligned}$$

以上で、補題は示された。

Q.E.D.

次の命題によって、3次形式の類と、簡約3次形式の個数の関係が、完全に明らかになる。この命題と、先の補題を合わせると、任意の判別式 $D_3 < 0$ に対して、3次形式の類数が求まることになる。

簡約3次形式 $F(u,v)$ に $SL(2,\mathbf{Z})$ の元 gを作用させたものが、再び簡約3次形式ならば、gは $K(F)(u,v)$ を固定する。従ってこの $F(u,v)$ と同値な簡約3次形式は、$K(F)(u,v)$ の $SL(2,\mathbf{Z})$ 固定群の元の $F(u,v)$ への作用を調べれば、すべて求まる。このことを用いて、以下が得られる。

命題 4.4 (cf. Davenport[7]) *L_-の任意の $SL(2,\mathbf{Z})$ 同値類は、少なくとも1つの簡約3次形式 $F(u,v)$ を含む。$F(u,v)$ と同値な簡約3次形式の個数は、$F(u,v)$ 自身を含めて、以下の通りである。*

(i)	$K(F)(u,v) = Pu^2+Puv+Pv^2$のとき	3個
(ii)	$K(F)(u,v) = Pu^2+Pv^2$のとき	2個
(iii)	$K(F)(u,v)$ が (i),(ii) 以外のとき	1個

固定群の order については、以下の命題が得られる。

命題 4.5 (cf. Davenport[7]) *L_-の簡約3次形式 $F(u,v)$ の $SL(2,\mathbf{Z})$ 固定群の order は常に 1 である。*

参考文献

[1] 荒川 恒男、2 次形式入門 I、第 1 回整数論サマースクール報告集、1993.

[2] F. Arndt, *Zur Theorie der binären kubischen Formen,* J. Reine Angew. Math. **53** (1857), 309-321.

[3] F. Arndt, *Tabellarische Berechnung der reducirten binären kubischen Formen und Klassification derselben für alle successiven negativen Determinanten* $(-D)$ *von* $D = 3$ *bis* $D = 2000$, Arch. Math. Phys., **31** (1858), 335-448.

[4] B. Datskovsky and D. J. Wright, *The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms* II: *Local theory,* J. Reine Angew. Math., **367** (1986), 27-75.

[5] B. Datskovsky and D. J. Wright, *The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms* III: *Density of discriminants of cubic extensions,* J. Reine Angew. Math., **386** (1988), 116-138.

[6] H. Davenport, *The reduction of a binary cubic form* I & II, J. London Math. Soc., **20** (1945), 14-22 & 139-147.

[7] H. Davenport, *On the class-number of binary cubic forms* I & II, J. London Math. Soc., **26** (1951), 183-198 (Corrigendum, ibid. **27** (1952), 512).

[8] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers,* vol. 3, Stechert, 1934.

[9] J. A. Dieudonné and J. B. Carrell, *Invariant Theory, Old and New,* Advances in Math., **4** (1970), 1-80.

[10] 土井 公二・三宅 敏恒、保型形式と整数論、紀伊國屋数学叢書 7、1976.

[11] G. Eisenstein, *Théorèmes sur les formes cubiques et solution d'une équation du quatrième degré á quatre indéterminées,* J. Reine Angew. Math. **27** (1844), 75-79.

[12] G. Eisenstein, *Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln,* J. Reine Angew. Math. **27** (1844), 89-104.

[13] 伊吹山 知義、2次形式入門II、第1回整数論サマースクール報告集、1993.

[14] 伊吹山 知義・斎藤 裕、 *On zeta functions of symmetric matrices and dimensions of Siegel modular forms,* 京大数理研講究録 843、1993.

[15] G. B. Mathews, *On the reduction and classification of binary cubics which have a negative discriminant,* Proc. London Math. Soc., **10** (1912), 128-138.

[16] G. B. Mathews and W. E. H. Berwick, *On the reduction of arithmetical binary cubics which have a negative determinant,* Proc. London Math. Soc., **10** (1912), 48-53.

[17] L. J. Mordell, *Diophantine Equations,* Academic Press, 1969.

[18] 森川 寿、 不変式論、紀伊國屋数学叢書 11、1977.

[19] 佐武 一郎、 2 次形式の理論、(前編、後編)、東大セミナリーノート 5、1964.

[20] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces* I: *Functional Equations,* Tôhoku Math. J., **34** (1982), 437-483.

[21] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces* II: *A convergence criterion,* Tôhoku Math. J., **35** (1983), 77-99.

[22] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces* III: *Eisenstein series for indefinite quadratic forms,* Ann. of Math., **116** (1982), 177-212.

[23] M. Sato, *Theory of prehomogeneous vector spaces* (*note by T. Shintani in Japanese*), Sugaku no ayumi, **15** (1970), 85-157.

[24] M. Sato and T. Shintani, *On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces,* Ann. of Math., **100** (1974), 131-170.

[25] T. Shintani, *On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms,* J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), 132-188.

[26] T. Shintani, *On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **22** (1975), 25-65.

[27] 新谷 卓郎、 概均質ベクトル空間のゼータ関数について（神保道夫記）、京大数理研講究録 497、1983.

[28] A. Weil, *Basic Number Theory,* Springer, 1974.

[29] H. Weyl, *Classical Groups,* Princeton Univ. Press, 1954.

[30] D. J. Wright, *The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms* I: *Global theory,* Math. Ann., **270** (1985), 503-534.