数理解析研究所講究録
924 巻 1995 年 102-115

概均質ベクトル空間の代数体上の分類について

京都大学人間・環境学研究科
齋藤 裕

この小論においては、前半において代数群の Galois cohomology について復習した後、後半において、regular irreducible reduced な prehomogeneous vector space の Galois cohomology を用いた代数体上の分類について述べる。

§1. Galois cohomology

1.1. Definition

$\mathcal{G}$ を profinite group とし、$\mathcal{G}$ が群 A に連続に作用しているものとする。A には離散位相を考える。以下では主として、標数 0 の体 F と F のガロア拡大 L、及び F 上の代数群 G にたいし、$\mathcal{G}=\mathrm{Gal}(L/F)$ 、$A=G(L)$ の場合を考える。$\mathrm{Gal}(L/F)$ の位相は Krull 位相を考える。

$\mathcal{G}$ から A への連続写像 $\sigma(\in\mathcal{G})\longmapsto a_\sigma(\in A)$ を (a_σ) で表し、それが条件

$$a_{\sigma\tau}=a_\sigma{}^\sigma a_\tau \qquad \forall\sigma,\ \tau\in\mathcal{G}$$

を満たすとき、$\mathcal{G}$ の A に値を持つ 1-cocycle であるといい、その 1-cocycle 全体を $Z^1(\mathcal{G},A)$ で表す。$Z^1(\mathcal{G},A)$ における同値関係 $\sim$ を

$$(a_\sigma)\sim(b_\sigma)\Longleftrightarrow \exists h\in A \text{ such that } a_\sigma=h^{-1}b_\sigma h^\sigma \quad \forall\sigma\in\mathcal{G}$$

で定める。このとき、0-次と 1-次の cohomology が次のように定義される。

Definition 1.1.1.

$$H^0(\mathcal{G},G)=A^{\mathcal{G}}=\{\,x\in A\mid {}^\sigma x=x\,\},$$
$$H^1(\mathcal{G},A)=Z_1(\mathcal{G},A)/\sim.$$

また、A がアーベル群のときには 2-次の cohomology が次のように定義される。$\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ から A への連続な写像 $(\sigma,\tau)\mapsto a_{\sigma,\tau}$ (これを $(a_{\sigma,\tau})$ と記す) が、

$${}^\rho a_{\sigma,\tau}a_{\rho\sigma,\tau}^{-1}a_{\rho,\sigma\tau}a_{\rho,\sigma}^{-1}=1 \quad \forall\rho,\ \sigma,\ \tau\in\mathcal{G}$$

を満たすとき、$(a_{\sigma,\tau})$ は、2-cocycle であるといい、この集合を $Z^2(\mathcal{G},A)$ で表す。また 2-cocycle で、$\mathcal{G}$ から A への連続写像 $\sigma\mapsto c_\sigma$ を用いて

$$a_{\sigma,\tau}=c_{\sigma\tau}c_\sigma^{-1}({}^\sigma c_\tau)^{-1}$$

と表されるものを、2-coboundary といい、その全体を、$B^2(\mathcal{G}, A)$ で表す。2-cocycle 全体 $Z^2(\mathcal{G}, A)$ は、自然に群の構造を持ち、$B^2(\mathcal{G}, A)$ はその部分群となる。このとき 2-次の cohomology が

Definition 1.1.2.

$$H^2(\mathcal{G}, A) = Z^2(\mathcal{G}, A)/B^2(\mathcal{G}, A)$$

で定義される。

これらについて容易に

$$H^i(\mathcal{G}, A) = \varinjlim_{U} H^i(\mathcal{G}/U, A^U)$$

が分かる。ここで、U は $\mathcal{G}$ の開正規部分群全体を動く。また、$\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(L/F)$ のとき、$H^i(\mathcal{G}, A)$ を Galois cohomology と呼び、

$$H^i(L/F, A) = H^i(\mathcal{G}, A)$$

と記す。また、$L = \bar{F}$(F の代数閉包)、$A = G(\bar{F})$ であるとき

$$H^i(F, G) = H^i(\bar{F}/F, G(\bar{F}))$$

と記す。

1.2. twist and exact sequences

この節では、Galois cohomology を調べる際に重要な、作用の twist と cohomology の exact sequence について述べる。

$\mathcal{G}$-group A が $\mathcal{G}$-set E に作用しており、$\mathcal{G}$ の作用に関して

$${}^{\sigma}(xy) = {}^{\sigma}x^{\sigma}y \qquad , x \in \mathcal{G},\ y \in E$$

を満たしているものとする。$a = (a_\sigma)$ を $Z^1(\mathcal{G}, A)$ の元とするとき、$\mathcal{G}$-group ${}_aA$ と $\mathcal{G}$-set ${}_aE$ が次のように定義する。集合としては ${}_aA = A,\ {}_aE = E$ で、作用を

$$\begin{aligned} {}^{<\sigma>}x &= a_\sigma {}^{\sigma}x a_\sigma^{-1}, \quad x \in {}_aA, \\ {}^{<\sigma>}y &= a_\sigma y, \quad y \in {}_aE \end{aligned}$$

で定義する。このとき再び

$${}^{<\sigma>}(xy) = {}^{<\sigma>}x^{<\sigma>}y$$

が成り立つ。${}_aA,\ {}_aE$ を、$A,\ E$ の 1-cocycle a による twist という。これについて次の命題が成り立つ。

Proposition 1.2.1. $Z^1(\mathcal{G}, {}_aA)$ から $Z^1(\mathcal{G}, A)$ への写像 $t_a((b_\sigma)) = (b_\sigma a_\sigma)$ は、bijection

$$t_a: Z^1(\mathcal{G}, {}_aA) \to Z^1(\mathcal{G}, A)、$$

$$\tau_a\colon H^1(\mathcal{G}, {}_aA) \to H^1(\mathcal{G}, A)$$

を導く。

$u\colon A \to B$ を、$\mathcal{G}$-group A から $\mathcal{G}$-group B への $\mathcal{G}$-homomorphism とする。$a \in Z^1(\mathcal{G}, A)$ から u により自然に定まる $Z^1(\mathcal{G}, B)$ の元 $u(a)$ を b で表すと、$\mathcal{G}$-homomorphism

$$u'\colon {}_aA \to {}_bB$$

が得られる。u, u' は、自然に写像

$$v\colon H^1(\mathcal{G}, A) \to H^1(\mathcal{G}, B),$$

$$v'\colon H^1(\mathcal{G}, {}_aA) \to H^1(\mathcal{G}, {}_bB)$$

を導くが、このとき次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{G}, {}_aA) & \xrightarrow{v} & H^1(\mathcal{G}, {}_bB) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tau_a} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau_b} \\ H^1(\mathcal{G}, A) & \xrightarrow{v'} & H^1(\mathcal{G}, B) \end{array}$$

これから次の bijection が得られる。

$$\tau_a\colon \ker v' \to v^{-1}(v(\tilde{a}))$$

ここで、$\tilde{a}$ は $H^1(\mathcal{G}, A)$ における 1-cocycle a の類であり、$\ker v'$ は $H^1(\mathcal{G}, B)$ における trivial な類の v' による逆像を表す。

次に、cohomology の exact sequence について述べる。1-次の cohomology は群ではないので、一般には trivial な類を指定した pointed set としての exact sequence である。状況に応じて次の三つの場合に分けて考える。

(1) $\mathcal{G}$-group B とその sub $\mathcal{G}$-group A に対し、次の exact sequence が成立する。

$$1 \to H^0(\mathcal{G}, A) \to H^0(\mathcal{G}, B) \to H^0(\mathcal{G}, B/A) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{G}, A) \to H^1(\mathcal{G}, B)$$

ここで、δ は次のように定義される。$c \in H^0(\mathcal{G}, B/A)$ とし、$c = xA(\ x \in B)$ とすると、c が $\mathcal{G}$ で不変であることから、

$$a_\sigma = x^{-1\sigma}x \in A, \quad \sigma \in \mathcal{G}$$

であり、(a_σ) は $Z^1(\mathcal{G}, A)$ の元を定めるが。その $H^1(\mathcal{G}, A)$ における類を $\tilde{a}$ とするとき

$$\delta(c) = \tilde{a}$$

と定義する。また、$H^1(\mathcal{G}, A)$ における完全性から次の bijection

$$A^{\mathcal{G}}\backslash(B/A)^{\mathcal{G}} \longleftrightarrow \ker(\lambda\colon H^1(\mathcal{G}, A) \to H^1(\mathcal{G}, B))$$

従う。

(2) (1) で、A が B の正規部分群である場合は、次の exact sequence が成り立つ。

$$1 \to H^0(\mathcal{G}, A) \to H^0(\mathcal{G}, B) \to H^0(\mathcal{G}, B/A) \to H^1(\mathcal{G}, A) \to H^1(\mathcal{G}, B) \to H^1(\mathcal{G}, B/A)$$

この場合、$(B/A)^{\mathcal{G}}$ の $H^1(\mathcal{G}, A)$ への作用を次のように定義することができる。$c \in (B/A)^{\mathcal{G}}$ に対し $x \in B$ を (1) のようにとり、$(a_\sigma) \in Z^1(\mathcal{G}, A)$ に対し、

$$a'_\sigma = x^{-1} a_\sigma {}^\sigma x \quad \sigma \in \mathcal{G}$$

とおけば、$(a'_\sigma) \in Z^1(\mathcal{G}, A)(x^{-1}a_\sigma{}^\sigma x = x^{-1}a_\sigma x x^{-1\sigma} x \in A)$ で、(a'_σ) の定める類を $\tilde{a}c$ で表すことにすれば、これは $(B/A)^{\mathcal{G}}$ の $H^1(\mathcal{G}, A)$ への作用を定める。上の $H^1(\mathcal{G}, A)$ から $H^1(\mathcal{G}, B)$ への写像を λ で表すと、次のことがわかる。

(a) $\delta(c) = 1c \quad c \in (B/A)^{\mathcal{G}}$。ここで 1 は $H^1(\mathcal{G}, A)$ の trivial な類を表す。
(b) $\tilde{a},\ \tilde{a}' \in H^1(\mathcal{G}, A)$ について

$$\lambda(\tilde{a}) = \lambda(\tilde{a}') \Longleftrightarrow \tilde{a} = \tilde{a}'c \ \text{ for } c \in (B/A)^{\mathcal{G}}.$$

(c) $\tilde{a}c = \tilde{a} \Longleftrightarrow c \in \mathrm{Im}(H^0(\mathcal{G}, {}_a B) \to H^0(\mathcal{G}, B/A))$。

上の $H^1(\mathcal{G}, B)$ から $H^1(\mathcal{G}, B/A)$ への写像を μ で表すことにすると、これから次 bijection がわかる。

$$\ker(\mu\colon H^1(\mathcal{G}, B) \to H^1(\mathcal{G}, B/A)) \longleftrightarrow H^1(\mathcal{G}, A)/(B/A)^{\mathcal{G}}$$

また $b \in Z^1(\mathcal{G}, B)$ による twist を考えることにより、次の bijection が得られる。

$$\mu^{-1}\mu(\tilde{b}) \longleftrightarrow H^1(\mathcal{G}, {}_bA)/{}_b(B/A)^{\mathcal{G}}$$

A は B の正規部分群なので、上と同様にして ${}_bA$ が定義できる。

(3) A が B の中心に含まれている場合、次が exact になる。

$$\begin{aligned} 1 \to h^0(\mathcal{G}, A) \to H^0(\mathcal{G}, B) \to H^0(\mathcal{G}, B/A) \to H^1(\mathcal{G}, A) \to H^1(\mathcal{G}, B) \\ \to H^1(\mathcal{G}, B/A) \xrightarrow{\Delta} H^2(\mathcal{G}, A) \end{aligned}$$

Δ は $(c_\sigma) \in Z^1(\mathcal{G}, B/A)$ に対し 2-cocycle

$$(a_{\sigma,\tau}), \qquad a_{\sigma,\tau} = b_\sigma {}^\sigma b_\tau b_{\sigma\tau}^{-1}$$

を対応させることにより得られる。

ここで $H^1(\mathcal{G}, A)$ の $H^1(\mathcal{G}, B)$ への作用を次のように定義できる。

$$a = (a_\sigma) \in Z^1(\mathcal{G}, A),\ b = (b_\sigma) \in Z^1(\mathcal{G}, B)$$

に対し $(a_\sigma b_\sigma) \in Z^1(\mathcal{G}, B)$ であり、この類を $\tilde{a}\tilde{b}$ と定めると、これによりアーベル群 $H^1(\mathcal{G}, A)$ が $H^1(\mathcal{G}, B)$ に作用する。この作用に関して

$$\mu(\tilde{b}) = \mu(\tilde{b}') \Longleftrightarrow \tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}' \text{ for } \tilde{a} \in H^1(\mathcal{G}, A)$$

また A が B の中心に含まれているので B/A が自然に B に作用している。これにより $c \in Z^1(\mathcal{G}, B/A)$ に対し、exact sequence

$$1 \to {}_cA \to {}_cB \to {}_c(B/A) \to 1$$

が得られる。ここで A が B の中心に含まれることから、$c = (c_\sigma)$ に対し、$c_\sigma = b_\sigma A$ となる $b_\sigma \in B$ をとり、

$${}^{<\sigma>}x = b_\sigma{}^\sigma x b_\sigma^{-1}$$

とすれば、これは b_σ の選び方によらずに定まり、${}_cB$, ${}_cA$ が上と同様に定義できる。また ${}_cA = A$ であることも分かる。これから写像

$$\Delta_c\colon H^1(\mathcal{G}, {}_c(B/A)) \to H^2(\mathcal{G}, A)$$

が得られるが、図式

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathcal{G}, {}_c(B/A)) \arrow[r, "\Delta_c"] \arrow[d, "\tau_c"] & H^2(\mathcal{G}, A) \\ H^1(\mathcal{G}, B/A) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

において、

$$\Delta\tau_c(\gamma') = \Delta_c(\gamma') + \Delta(\tilde{c}), \quad \gamma' \in H^1(\mathcal{G}, {}_c(B/A))$$

が成り立ち、これより次の bijection を得る。

$$\Delta^{-1}(\Delta(\tilde{c})) \longleftrightarrow H^1(\mathcal{G}, A)\backslash H^1(\mathcal{G}, {}_cB)$$

1.3. Galois cohomology of algebraic groups over local and global fields

局所体上の代数群の Galois cohomology については次の定理が基本的である。

Theorem 1.3.1. F は non-archimedean な局所体とする。
(1) G を F 上の semi-simple, simply connected な代数群とする。このとき

$$H^1(F, G) = \{1\}$$

(2) semi-simple, adjoint な G に対し、$\tilde{G}$ をその simply connected covering とし、Z を $\tilde{G}$ の中心とする。このとき

$$H^1(F, G) \simeq H^2(F, Z)$$

F が代数体であるとき、F の素点 v に対し、F_v で F の v における completion を表す。v の $\bar{F}$ への延長の分解群と $\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ を同一視することにより自然な写像

$$H^1(F,G) \to \prod_v H^1(F_v,G)$$

が得られるが、これについて次が成り立つ。

Theorem 1.3.2.(Hasse principle) F 上の代数群 G が semi-simple, simply connected または adjoint とする。このとき写像

$$H^1(F,G) \to \prod_v H^1(F_v,G)$$

は injective である。特に simply connected の場合には 次が bijective になる。

$$H^1(F,G) \to \prod_{v\in\Sigma_\infty} H^1(F_v,G)$$

ここで、Σ_∞ は F の無限素点全体の集合を表す。

1.4. Examples

(1) $H^1(F,GL_n) = H^1(F,D^\times) = 1$
ここで D は、F 上の central simple algebra。また次の exact sequence

$$1 \to SL_n \to GL_n \to G_m \to 1$$

より

$$GL_n(F) \to F^\times \to H^1(F,SL_n) \to H^1(F,GL_n)$$

が得られ、

$$H^1(F,SL_n) = 1$$

が得られる。

(2) $H^1(F,\mu_n) \simeq F^\times/F^{\times n}$
exact sequence

$$\begin{array}{c} 1 \to \mu_n \to \bar{F}^\times \to \bar{F}^\times \to 1 \\ x \mapsto x^n \end{array}$$

から導かれる exact sequence

$$\begin{array}{l} F^\times \to F^\times \to H^1(F,\mu_n) \to H^1(F,GL_1) \\ x \mapsto x^n \end{array}$$

より得られる。

(3) $H^1(F, Sp_n) = 1$

(4) $H^1(F, PGL_n)$

$$1 \to \mu_n \to SL_n \to PSL_n \to 1$$

より injection

$$H^1(F, PSL_n) \to H^2(F, \mu_n)$$

が得られるが、これは F が、局所体または代数体のときには同型となる。$H^2(F, \mu_n)$ は、F 上の index $m(m|n)$ の division algebra を分類するが、$c \in Z^1(\mathcal{G}, PSL_n(\bar{F}))$ とし、$\Delta(c)$ の決める division algebra を D とすると

$$_cSL_n = SL_{n/m}(D)$$

が成り立つ。

(5) $H^1(F, O(f))$, $H^1(F, SO(f))$
正則な対称行列 $S \in M_n(F)$ によって決まる二次形式

$$f(v) = {}^t vSv$$

にたいし、$O(f)$, $SO(f)$ で、それぞれその orthogonal group、special orthgonal group を表す。他の正則な対称行列 $T \in M_n(F)$ に対応する二次形式 $h(v) = {}^t vTv$ に対し、

$${}^t gSg = T$$

なる正則行列 g をとり、$a = (a_\sigma)$, $a_\sigma = g^{-1\sigma}g$ とおくと、a は $Z^1(\mathcal{G}, O(f)(\bar{F}))$ の元を定め、対応

$$h \mapsto a$$

は bijection

$$\{\text{正則な二次形式の同値類}\} \longleftrightarrow H^1(F, O(f))$$

を与える。また exact sequence

$$1 \to SO(f) \to O(f) \to \mu_2 \to 1$$

から、exact sequence

$$O(f)(F) \to \mu_2 \to H^1(F, SO(f)) \to H^1(F, O(f)) \to H^1(F, \mu_2)$$

が得られるが、写像 $\mu: H^1(F, O(f)) \to H^1(F, \mu_2)$ は、

$$\mu(\tilde{a}) = \mathrm{disc}(f)/\mathrm{disc}(h) \in F^\times/F^{\times 2}$$

で与えられる。ここで $\mathrm{disc}(f)$ は $\det T$ の $F^{\times}/F^{\times 2}$ での類を表す。従って

$$\{\text{正則な二次形式 } h \text{ で } \mathrm{disc}(h) = \mathrm{disc}(f) \text{ となるものの同値類}\}$$

$$\longleftrightarrow H^1(F, SO(f))$$

が分かる。また exact sequence

$$1 \to \mu_2 \to Spin(f) \to SO(f) \to 1$$

から、exact sequence

$$H^1(F, Spin(f)) \longrightarrow H^1(F, SO(f)) \xrightarrow{\delta} H^2(F, \mu_2)$$

が得られるが、F が局所体の場合は、δ は $a \longleftrightarrow h$ とすると

$$\delta(a) = \varepsilon_v(h)/\varepsilon_v(f)$$

で与えられる (cf. [S])。ここで $\varepsilon_v(h)$ は、h の Hasse invariant で、次の様に与えられる。正則行列 g を ${}^t gSg$ が、a_1, a_2, $\cdots, a_n$ を対角成分に持つ対角行列になるように選んだとき

$$\varepsilon_v(f) = \prod_{i<j} (a_i, a_j)_v.$$

ただし、$(a,b)_v$ $(a, b \in F^{\times})$ は、a, b の Hilbert symbol である。ある。F が non-archimedean な場合には、上の写像は bijective である。

F が代数体の場合にも、図式

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(F, Spin(f)) & \longrightarrow & H^1(F, SO(f)) & \xrightarrow{\delta} & H^2(F, \mu_2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod_v H^1(F_v, Spin(f)) & \longrightarrow & \prod_v H^1(F_v, SO(f)) & \longrightarrow & \prod_v H^2(F_v, \mu_2)
\end{array}$$

を用いて局所的な場合に帰着して理解できる。

(6) $H^1(F, \mathrm{Aut}\, G)$, $H^1(F, \mathrm{Int}\, G)$

G_0 を、connected, simply connected, split な代数群とする。G_0 の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, G_0$ は、内部自己同型群 $\mathrm{Int}\, G_0 (\simeq G_0/Z)$ (Z は G_0 の中心) と、Dynkin diagram の同型から生ずる G_0 の (F 上定義された) 自己同型からなる有限群 Θ との半直積で、次の split した exact sequence

$$1 \to G_0/Z \to \mathrm{Aut}\, G_0 \to \Theta \to 1$$

を得る。これより exact sequence

$$H^1(F, G_0/Z) \to H^1(F, \mathrm{Aut}\, G) \to H^1(F, \Sigma)$$

が得られる。

G を $\bar{F}$ 上 G_0 と同型な代数群とし、その $\bar{F}$ 上の同型を

$$f: G_0 \to G$$

とすると

$$a = (a_\sigma), \quad a_\sigma = f^{-1\sigma} f$$

は、$Z^1(\mathcal{G}, \mathrm{Aut}\, G_0)(\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$ の元を与え、対応 $G \mapsto \tilde{a}$ は bijection

$$\{\ G/F \mid G_0 \simeq G/\bar{F}\ \}/\sim \longleftrightarrow H^1(F, \mathrm{Aut}\, G_0)$$

を与える。$\sim$ は F 上の同型を表す。また $a \in Z^1(\mathcal{G}, \Theta)$ に対し、${}_aG_0$ は quasi-split で、1.2.(2) より

$$H^1(F, {}_a(G_0/Z))/{}_a\Sigma^{\mathcal{G}}$$

が ${}_aG_0$ の inner twist で得られる G の同型類 を与える。

§1 については、[S]、[K]、[P-R] を御参照下さい。

§2. Classification of prehomogeneous vector spaces

2.1. Classification and Galois cohomology

この節では、regular irreducible reduced な prehomogeneous vector space(p.v. と略す。) の局所体、代数体上の Galois cohomology を用いた分類について述べる。これらの p.v. の代数閉体上の分類は既に [S-K] において、parabolic type のものの実数体上の分類は [R] においいてそれぞれなされている。以下ではこれらの結果に持つ基づいて、主として non-archimedean な局所体、及び代数体上の分類の方針について概説する。

(G, ρ, V) を F 上の p.v. とする。即ち、G は F 上定義された代数群、V は F 上有限次元のベクトル空間、ρ は G の F 上定義された V の上の表現であり、$\bar{F}$ 上 (G, ρ, V) が p.v. であるとする。以下では、$\bar{F}$ 上 (G, ρ, V) が regular irreducible reduced と仮定する。

reductive な代数群 G の derived group を G_{der} で表すと、G の central torus T で $G = G_{der}T$ かつ $G_{der} \cap T$ が有限になるものが存在する。G_{der} の universal covering group を $\tilde{G}_{der}$ で表すと、自然に表現

$$\tilde{\rho}: \tilde{G} = \tilde{G}_{der} \times T \longrightarrow GL(V)$$

が得られ、$(\tilde{G}, \tilde{\rho}, V)$ も (G, ρ, V) と同じ条件を満たす。また $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, V)$ から (G, ρ, V) が容易に回復できる。さらに F 上の torus T' と T' の F 上定義された指標

$$\lambda': T' \longrightarrow G_m$$

から同じ性質を持つ p.v.

$$(\tilde{G}', \tilde{\rho}', V)$$

$$\tilde{G}' = \tilde{G}_{der} \times T', \rho' = \tilde{\rho}|_{G_{der}} \times \lambda'$$

が得られる。指標 λ' の分類は $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-module の分類に帰着されるので、ここでは半単純部分 $(\tilde{G}_{der}, \tilde{\rho}, V)$ の分類を与えることを考える。以下、(G, ρ, V) を G が simply connected な代数群で、ρ は G の F 上定義された V での表現で、

$$(G \times G_m, \rho \times 1, V)$$

が $\bar{F}$ 上 regular irreducubel reduced な p.v. であるものとし、このような triplet の分類を考える。(G, ρ, V), (G', ρ', V') が上の条件をみたす triplet でとし、これらが F 上同値であるとは、F 上の同型

$$f: G \longrightarrow G', \qquad l: V \longrightarrow V'$$

で

$$l(\rho(g)v) = \rho'(f(g))l(v)$$

を満たすものが存在することと定義する。

G と $\bar{F}$ 上同型で split した群を G_0 とすると §1(6) で述べたように G は quasi-split な群 ${}_aG_0(a \in Z^1(\mathcal{G}, \Theta))$ の inner form になっている。$f: {}_aG_0 \longrightarrow G$ を

$$(f^{-1\sigma} f) \in Z^1(\mathcal{G}, \mathrm{Int}({}_aG_0))$$

なる $\bar{F}$ 上の同型とする。${}_aG_0$ の F 上定義された Borel subgroup ${}_aB$ と ${}_aB$ に含まれる maximal torus ${}_aT$ に対し、$f({}_aB) = B$, $f({}_aT) = T$ とおく。この (B, T) から決まる G の表現 ρ の dominant weight を l_ρ とする。ρ が F 上定義されていることから l_ρ は $\mathcal{G}$ の作用 (cf. [B-T] §6) で不変である。f により対応する ${}_aG_0$ の weight を ${}_al_\rho$ とすると ${}_al_\rho$ を dominant weight とする ${}_aG_0$ の表現 ${}_a\rho$ は F 上定義されていて ([T])、しかもそれは F 上の同値をのぞいて一意的に決まる。(cf. [B-T] 12.3)。従って、${}_a\rho$ の表現空間を W とすると $(G, {}_a\rho \circ f^{-1}, W)$ と (G, ρ, V) は $\bar{F}$ 上同値になる。しかも $(G, {}_a\rho \circ f^{-1}, W)$ と $\bar{F}$ 上同値で、F 上定義されたものが存在すれば、それは F 上の同値をのぞいて一意的に決まる ([B-T] 12.3)。これから $(G, {}_a\rho \circ f^{-1}, W)$ と $\bar{F}$ 上同値で F 上定義される表現を持つような G を求めれば良い。

この条件は Galois cohomology を用いて次の様に簡明に記述される。${}_a\rho$ が規約表現であることから ${}_a\rho$ は

$${}_a\tilde{\rho}: \mathrm{Int}({}_aG_0)(\simeq {}_a\bar{G}_0 = {}_aG_0/Z(({}_aG_0))) \longrightarrow PGL(W)$$

を導き、${}_a\rho$ が F 上定義されていることから

$${}_a\tilde{\rho}: H^1(F, {}_a\bar{G}_0) \longrightarrow H^1(F, PGL(W))$$

を導く。これについて次が成り立つ。

Proposition 2.1.1. $c \in Z^1(\mathcal{G}, {}_a\bar{G}_0)$ に対し $c = (f^{-1\sigma} f)$ となる

$$f: {}_aG_0 \longrightarrow G$$

をとる。${}_a\rho \circ f^{-1}$ が F 上の表現と同値になるための必要十分条件は

$$\tilde{c} \in \mathrm{Ker}_a \tilde{\rho}$$

で与えられる。

これより容易に

Corollary 2.1.2. (G, ρ) の同値類は

$$\mathrm{Ker}_a \tilde{\rho} / {}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho}$$

と一対一になる。ここで

$${}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho} = \{ \ \theta \in {}_a\Theta^{\mathcal{G}} \mid \theta({}_a l_\rho) = {}_a l_\rho \ \}$$

これは次のように言い替えておくと便利である。可換図式

$$\begin{array}{ccc}
H^1(F, {}_aG_0) & \longrightarrow & H^1(F, PGL(W)) \\
\Big\downarrow \delta & & \Big\downarrow \delta' \\
H^2(F, Z({}_aG_0)) & \longrightarrow & H^2(F, G_m) \\
\Big\downarrow & & \Big\| \\
H^2(F, Z({}_aG_0)/\mathrm{Ker}\,\rho) & \xrightarrow{\eta} & H^2(F, G_m)
\end{array}$$

において δ', η が injective であることから

Corollary 2.1.3. (G, ρ) の同値類は

$$\mathrm{Ker}(\lambda\colon H^1(F, {}_aG_0) \longrightarrow H^2(F, Z({}_aG_0))/\mathrm{Ker}\,\rho)/{}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho}$$

と一対一である。更に $H^2(F, \mathrm{Ker}\,\rho) \longrightarrow H^2(F, Z({}_aG_0))$ が injective ならば

$$\delta^{-1}(H^2(F, \mathrm{Ker}\,\rho))/{}_a\Theta^{\mathcal{G}, \rho}$$

と一対一である。

2.2. Examples

2.1. で与えた Galois cohomology をそれぞれの場合に計算するのだが、ここではいくつかの典型的な場合を扱う。[S-K] における分類番号を用いる。但し、半単純な部分のみを考えていることに注意する。まず次の補題が容易にわかる。

Lemma 2.2.1.

(1) $\mathrm{Ker}\,\rho \neq \{1\}$ となるのは (1), (2), (3), (5), (9), (12), (13), (15), (17), (20), (23) の場合に限る。

(2) outer form が現れるのは (1), (5), (12), (15) の場合に限る。
(3) ${}_a\Theta^{\mathcal{G},\rho} \neq \{1\}$ となるのは (1), (5), (12), (15)(n, m even) の場合に限る。しかもこのとき

$$|{}_a\Theta^{\mathcal{G},\rho}| = 2$$

$\operatorname{Ker}\rho = \{1\}$ の場合は次のように無限素点での分類に帰着される。

Theorem 2.2.2. $\operatorname{Ker}\rho = \{1\}$ とする。このとき自然な対応

$$\operatorname{Ker}(\rho\colon H^1(F, \bar{G}_0) \to H^2(F, Z(G_0)))$$

$$\longleftrightarrow \prod_{v\in\Sigma_\infty} \operatorname{Ker}(\rho\colon H^1(F_v, \bar{G}_0) \to H^2(F_v, Z(G_0)))$$

は bijective である。特に、(4), (6), (7), (8), (10), (11), (14) の場合は split したもののみ現れる。

証明には次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, G_0) & \longrightarrow & H^1(F, \bar{G}_0) & \longrightarrow & H^2(F, Z(G_0)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod H^1(F_v, G_0) & \longrightarrow & \prod H^1(F_v, \bar{G}_0) & \longrightarrow & \prod H^2(F_v, Z(G_0)) \end{array}$$

において、縦の写像はすべて injective で

$$H^1(F, G_0) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma_\infty} H^1(F_v, G_0)$$

が bijective であることから次の bijection

$$\operatorname{Ker}\delta \longleftrightarrow \prod_{v\in\Sigma_\infty} \operatorname{Ker}\delta_v$$

がわかり、それから第一の主張が示される。二番目の主張はそれらの場合には $H^1(F_v, \bar{G}_0) = \{1\}$ であることからわかる。

Theorem 2.2.3. (2) の type の場合は次のいずれかと同値。
(a) (SL_n, ρ, S_n) 　ここで

$$S_n = \{\ x \in M_n \mid {}^t x = x\ \}, \qquad \rho(g)x = gx{}^t g.$$

(b) $(SL_{n/2}(D), \rho, AH_{n/2}(D))$ 　ここで　D は division quarternion algebra、ι は canonical involution で

$$AH_{n/2}(D) = \{\ x = (x_{ij}) \in M_{n/2}(D) \mid x^* = -x\ \}, \qquad \rho(g)x = gxg^*, \quad x^* = {}^t({}^\iota x_{ij})$$

この場合

$$\mathrm{Ker}\,\rho = \begin{cases} 1 & n \text{ odd}, \\ \mu_2 & n \text{ even}, \end{cases}$$

で

$$H^1(F, \mu_2) \longrightarrow H^2(F, Z(G_0))$$

が injective だから $\delta^{-1}(H^2(F, \mu_2))$ を調べればよいが、$H^2(F, \mu_2)$ は quarternion algebra を定め、$G \simeq SL_n$ または $SL_{n/2}(D)$ となる。(3)、(9) 、(13) も同様に扱うことができる。

Theorem 2.2.4. f_0 で、次の対称行列に対応する二次形式とする。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \\ 0 & E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

(G, ρ, V) が (17) の type に属するとすると

$$G \simeq Spin(f) \times SL_1(D)$$

但し、二次形式 f と quarternion algebra D は条件

$$\mathrm{disc}(f) = \mathrm{disc}(f_0), \quad \varepsilon_v(f)/\varepsilon_v(f_0) = inv_v(D) \quad \forall v$$

をみたす。$inv_v(D)$ は D の v における不変量 (cf.[S1], Ch.X§5, Ch.XI§2)。

この場合

$$\mathrm{Ker}\,\rho = \mu_2$$

で、

$$Z(G_0) \simeq \mu_2 \times \mu_2 \qquad (G_0 = Spin(f_0) \times SL_2)$$

に対角に含まれている。また写像

$$H^2(F, \mathrm{Ker}\,\rho) \longrightarrow H^2(F, Z(G_0))$$

は injective であるので $\delta^{-1}(H^2(F, \mathrm{Ker}\,\rho))$ を調べればよい。図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, Spin(f_0)) \times H^1(F, SL_2) & & \\ \downarrow & & \\ H^2(F, \mu_2) \times H^2(F, \mu_2) & \supset & H^2(F, \mu_2) \end{array}$$

より容易に結果を得る。(20)、(23) も同様に扱える。

References

[B-T] A. Borel and J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S. 27(1965), 55-150.

[K] M. Kneser, Lectures on Galois cohomology of classical groups, Tata Inst. of Fund. Res.

[P-R] V. Platonov and A. Rapinchuk, Algebraic groups and number theory, Academic Press.

[R] H. Rubenthaler, Formes réelles des espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique, Ann. Inst. Fourier(Grenoble), 36(1986), 1-38.

[S-K] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J., 65(1977), 1-155.

[S] J.P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Math. 5, Springer.

[S1] J.P. Serre, Corps locaux, Hermann.

[Sp] T. Springer, On the equivalence of quadratic forms, Indag. Math., 21(1959), 241-253.

[T] J. Tits, Représentation linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un coprs quelconque, J. reine angew. Math., 247(1971), 196-220.