数理解析研究所講究録
925巻 1995年 110-116

楕円曲線のHasse不変量について

鹿児島工業高専　石橋　睦 (Makoto ISHIBASHI)
九大 数理学研究科　佐藤尚宜 (Hisayoshi SATO)
九大 数理学研究科　白谷克巳 (Katsumi SHIRATANI)

§1. 序

標数 $p \geq 5$ の素体 $\mathbf{GF}(p)$ 上に定義された楕円曲線 $E_{a,b} : y^2 = x^3 + ax + b$ を考える. 定義方程式の右辺の $\frac{p-1}{2}$ 乗 $(x^3+ax+b)^{\frac{p-1}{2}}$ における x^{p-1} の係数 $H_{a,b}$ を Hasse 不変量という. Hasse 不変量は $E_{a,b}$ の関数体の p 次不分岐拡大の存在に深く関係している. $H_{a,b}$ に対する公式は はじめ Deuring[2] によって計算された. 最近になって Kaneko[4] によってある超幾何多項式を用いて計算されている. また Koike[7] は有限体上の超幾何級数を用いて Legendre form で与えられた楕円曲線などの Frobenius 自己同型の trace を表示している. 一方 Chowla-Dwork-Evans[1] は楕円曲線 $y^2 = x^3 + x$ の Hasse 不変量に関係した 2 項係数に対する p を法とする公式を与えている.

ここではまず楕円曲線 $y^2 = x^3 + 1$ の Hasse 不変量に関係した 2 項係数の p の高いべきを法としたときの公式を与え, 次に一般の $E_{a,b}$ に対する Hasse 不変量の有限体上での超幾何級数を用いる簡明な表示を得る.

§2. $y^2 = x^3 + 1$ に関係した 2 項係数に対する合同式

素数 p を $p \equiv 1 \pmod 3$ とし 楕円曲線 $y^2 = x^3 + 1/\mathbf{GF}(p)$ をとる. $\mathbf{GF}(p)$ と $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ を同一視する. このとき この楕円曲線の Hasse 不変量は mod p で $\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{3}}$ に等しい. ω を $\mathbf{GF}(p)$ の Teichmüller 指標 とし Koike[6] によって定義された有限体上の 2 項係数

$$\binom{\omega^i}{\omega^k}^* = \frac{\omega^k(-1)}{p-1} J(\omega^i, \omega^{-k}) = \frac{1}{1-p} \frac{\Gamma_p\left(\frac{i-k}{p-1}\right)\Gamma_p\left(\frac{k}{p-1}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{i}{p-1}\right)}, \qquad 0 \leq k \leq i$$

を考える. ただし $J(\omega^i, \omega^{-k})$ は Jacobi 和, Γ_p は p 進 gamma 関数, また二番目の等式は Gross-Koblitz の公式による.

$i=\frac{p-1}{2}$, $k=\frac{p-1}{3}$ とし Γ_p の関数等式, Taylor 展開, 及び Diamond の公式を用いると任意の自然数 f に対して

$$\binom{\omega^{\frac{p-1}{2}}}{\omega^{\frac{p-1}{3}}}^{*} \equiv \frac{-1}{p-1}\binom{\frac{p^f-1}{2}}{\frac{p^f-1}{3}}\binom{\frac{p^{f-1}-1}{2}}{\frac{p^{f-1}-1}{3}}^{-1}\left(1+\frac{2}{3}(2^{p^{f-1}(p-1)}-1)-\frac{3}{4}(3^{p^{f-1}(p-1)}-1)\right) \mod p^{2f} \quad (1)$$

を得る. 更に $\binom{\omega^{\frac{p-1}{2}}}{\omega^{\frac{p-1}{3}}}^{*}$ を $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ において

$$\binom{\omega^{\frac{p-1}{2}}}{\omega^{\frac{p-1}{3}}}^{*}=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{6}}}{p-1}B, \qquad B=p^{-1}g(\omega^{\frac{p-1}{2}})g(\omega^{\frac{2(p-1)}{3}})g(\omega^{\frac{5(p-1)}{6}}),$$
$$g(\omega^a): \text{Gauss 和}$$

と表すことができて B は $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ の整数となる. そこで

$$B=\alpha+\beta w, \quad w=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \ \alpha,\beta\in\mathbf{Z}$$

とおく. このとき

$$N_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})/\mathbf{Q}}(B)=p=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$$

であるが, この p の分解における α,β の満たす条件を有理的に表す. 実際 ζ を 1 の原始 3 乗根として, $k\in\{1,-1,\zeta,-\zeta,\zeta^2,-\zeta^2\}$ に対して

$$\eta_k=\sum_{\substack{1\le x\le p-1\\ \omega^{\frac{p-1}{6}(x)}=k}}\zeta_p^x, \qquad (\zeta_p: 1\text{ の原始 } p \text{ 乗根})$$

と置くと, Gauss 和の定義により

$$\begin{aligned} g(\omega^{\frac{2(p-1)}{3}}) &\equiv \eta_1+\eta_{-1}+\eta_\zeta+\eta_{-\zeta}+\eta_{\zeta^2}+\eta_{-\zeta^2}\equiv -1 \bmod \mathfrak{l}_3,\\ g(\omega^{\frac{p-1}{2}}) &\equiv g(\omega^{\frac{5(p-1)}{6}})\equiv \eta_1-\eta_{-1}+\eta_\zeta-\eta_{-\zeta}+\eta_{\zeta^2}-\eta_{-\zeta^2} \bmod \mathfrak{l}_3 \end{aligned}$$

となる. ここで イデアル $\mathfrak{l}_3=(\sqrt{-3})$ である. 故に

$$\begin{aligned} pB &= p\alpha+p\beta w\\ &\equiv -g(\omega^{\frac{p-1}{2}})^2\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}+1} \bmod \mathfrak{l}_3. \end{aligned}$$

従って

$$\alpha-\beta\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod 3 \quad (2)$$

である.

一方, pB を $\mathbf{Q}(\zeta,\zeta_p)$ の元として表すと

$$\begin{aligned} pB &= g(\omega^{\frac{p-1}{2}})\{(\eta_A\eta_C-\eta_B\eta_D)+(\eta_A\eta_D+\eta_B\eta_C-\eta_B\eta_D)\zeta\} \\ &= p(\alpha+\beta)+p\beta\zeta. \end{aligned}$$

ただし

$$\eta_A=\eta_1+\eta_{-1}-\eta_{\zeta^2}-\eta_{-\zeta^2},\quad \eta_B=\eta_\zeta+\eta_{-\zeta}-\eta_{\zeta^2}-\eta_{-\zeta^2},$$
$$\eta_C=\eta_1-\eta_{-1}-\eta_\zeta+\eta_{-\zeta},\quad \eta_D=\eta_{\zeta^2}-\eta_{-\zeta^2}-\eta_\zeta+\eta_{-\zeta}$$

となる. 故に $1,\zeta$ が $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ 上の $\mathbf{Q}(\zeta,\zeta_p)$ の 底であることより

$$\beta\equiv 0 \pmod 2 \tag{3}$$

(従って $\alpha\equiv 1 \pmod 2$) である. $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ の 単数 の個数は 6 で, $p=N(\epsilon(\alpha+\beta w))$ (ϵ : 単数) なる分解も 6 通り考えられるが (2),(3) を満たすものはひとつしかなく 従って p の分解が確定する.

さて B の $\mathbf{C}_p$ への埋め込みは $B\bar{B}=p$ であることから Gross-Koblitz 公式を用いれば $B_0=\Gamma_p(\frac{1}{2})\Gamma_p(\frac{1}{3})\Gamma_p(\frac{1}{6})$, p/B_0 の二つであることがわかる. $B_0+p/B_0=2\alpha+\beta$ だから

$$B_0\equiv(2\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2f-1}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^k\frac{4^k}{(2\alpha+\beta)^{2k-1}}p^k \pmod{p^{2f}}$$

となる. よって B の埋め込みを B_0 にすれば $u=2\alpha+\beta$ とおいて (1) とともに次を得る.

定理 1. p を $p\equiv 1 \pmod 3$ なる素数とし, $4p=u^2+3v^2$, $u,v\in\mathbf{Z}$ を $u\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod 3$, $v\equiv 0 \pmod 2$ と p を分解するとき

$$\begin{aligned} \binom{\frac{p^f-1}{2}}{\frac{p^f-1}{3}}\binom{\frac{p^{f-1}-1}{2}}{\frac{p^{f-1}-1}{3}}^{-1} &\equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}}\left\{u+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2f-1}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^k\frac{4^k}{u^{2k-1}}p^k\right\} \\ &\quad\cdot\left\{1-\frac{2}{3}(2^{p^{f-1}(p-1)}-1)+\frac{3}{4}(3^{p^{f-1}(p-1)}-1)\right\} \pmod{p^{2f}}. \end{aligned}$$

特に $f=1$ のとき

$$\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{3}}\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\left(u-\frac{p}{u}\right)\left(1-\frac{2}{3}(2^{p-1}-1)+\frac{3}{4}(3^{p-1}-1)\right) \pmod{p^2}.$$

§3. 有限体上の超幾何級数と Hasse 不変量

$\mathbf{GF}(p)$ $(p \geq 5)$ 上の楕円曲線 $E_{a,b} : y^2 = x^3 + ax + b$ の Hasse 不変量を計算する. 以下 $\mathbf{GF}(p)$ と $\mathbf{Z} \bmod p$ を同一視する. $H_{a,b}$ の定義により

$$\begin{aligned} H_{a,b} &= (1 + ax^{-2} + bx^{-3})^{\frac{p-1}{2}} \text{における} \ x^{-\frac{p-1}{2}} \text{の係数} \\ &= \sum_{3i+2k=\frac{p-1}{2}} \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}{i!k!\left(\frac{p-1}{2}-i-k\right)!} a^k b^i \end{aligned}$$

となる. この和を Γ_p を用いて変形するが, p を 12 を法にして場合に分ける.

例えば $p \equiv 5 \pmod{12}$ で $a \neq 0$ のとき, $i = 2i_0$, $k = 3k_0 + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} &i! = 2^{2i_0} i_0! \left(\tfrac{1}{2}\right)_{i_0}, \\ &k! = \{(-3)^{3i_0} \left(\tfrac{1-p}{12}\right)_{i_0} \left(\tfrac{5-p}{12}\right)_{i_0} \left(\tfrac{9-p}{12}\right)_{i_0} \Gamma_p\left(\tfrac{1-p}{4}\right)\}^{-1}, \\ &\left(\tfrac{p-1}{2} - i - k\right)! = \left(\tfrac{p+3}{4}\right)_{i_0} \Gamma_p\left(\tfrac{1-p}{4}\right)^{-1}, \\ &\left(\tfrac{p-1}{2}\right)! = \Gamma_p\left(\tfrac{1-p}{2}\right)^{-1}, \qquad (\text{ただし } (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)) \end{aligned}$$

となり, 従って

$$H_{a,b} = a^{\frac{p-1}{4}} \frac{\Gamma_p\left(\frac{1-p}{4}\right)^2}{\Gamma_p\left(\frac{1-p}{2}\right)} \sum_{i_0=0}^{\frac{p-5}{12}} \frac{\left(\frac{1-p}{12}\right)_{i_0} \left(\frac{5-p}{12}\right)_{i_0} \left(\frac{9-p}{12}\right)_{i_0}}{\left(\frac{3+p}{4}\right)_{i_0} \left(\frac{1}{2}\right)_{i_0} i_0!} \left(-\frac{27b^2}{4a^3}\right)^{i_0}$$

となる. $b \neq 0$ のときは k_0 を用いてまとめる. 他の場合も同様である. ここで $p \equiv a' \pmod{12}$ $(a' = 1, 5, 7, 11)$ のとき超幾何多項式 ${}_3\tilde{F}_2$ を

$${}_3\tilde{F}_2\left(\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ & b_1 & b_2 \end{matrix} \,\middle|\, x\right) = \sum_{m=0}^{\frac{p-a'}{12}} \frac{(a_0)_m (a_1)_m (a_2)_m}{m!(b_1)_m (b_2)_m} x^m$$

で定義すれば $H_{a,b}$ は次で与えられる.

定理 2.

(i) $a \neq 0$ のとき

$$H_{a,b} = \begin{cases} a^{\frac{p-1}{4}} \frac{\Gamma_p\left(\frac{1-p}{4}\right)^2}{\Gamma_p\left(\frac{1-p}{2}\right)} {}_3\tilde{F}_2\left(\begin{matrix} \frac{1-p}{12} & \frac{5-p}{12} & \frac{9-p}{12} \\ & \frac{3+p}{4} & \frac{1}{2} \end{matrix} \,\middle|\, -\frac{27b^2}{4a^3}\right) & p \equiv 1, 5 \pmod{12}, \\ a^{\frac{p-7}{4}} b \frac{\Gamma_p\left(\frac{-1-p}{4}\right)\Gamma_p\left(\frac{7-p}{4}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{1-p}{2}\right)} {}_3\tilde{F}_2\left(\begin{matrix} \frac{7-p}{12} & \frac{11-p}{12} & \frac{15-p}{12} \\ & \frac{p+5}{4} & \frac{3}{2} \end{matrix} \,\middle|\, -\frac{27b^2}{4a^3}\right) & p \equiv 7, 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

(ii) $b \neq 0$ のとき

$$H_{a,b} = \begin{cases} b^{\frac{p-1}{6}} \frac{\Gamma_p\left(\frac{1-p}{3}\right)\Gamma_p\left(\frac{1-p}{6}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{1-p}{2}\right)} {}_3\tilde{F}_2\left(\begin{matrix} \frac{1-p}{3} & \frac{1-p}{12} & \frac{7-p}{12} \\ & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix} \,\middle|\, -\frac{4a^3}{27b^2}\right) & p \equiv 1, 7 \pmod{12}, \\ ab^{\frac{p-5}{6}} \frac{\Gamma_p\left(\frac{2-p}{3}\right)\Gamma_p\left(\frac{5-p}{6}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{1-p}{2}\right)} {}_3\tilde{F}_2\left(\begin{matrix} \frac{5-p}{12} & \frac{11-p}{12} & \frac{2-p}{3} \\ & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{matrix} \,\middle|\, -\frac{4a^3}{27b^2}\right) & p \equiv 5, 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

更に $H_{a,b}$ を有限体上の超幾何級数を用いて表す.

$p\equiv 5 \pmod{12}$, $a\not\equiv 0 \pmod{p}$ のとき

$$ {}_3\tilde{F}_2\left(\begin{matrix}\frac{1-p}{12} & \frac{5-p}{12} & \frac{9-p}{12}\\ & \frac{3+p}{4} & \frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27b^2}{4a^3}\right)\equiv {}_2\tilde{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{12} & \frac{5}{12}\\ & \frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27b^2}{4a^3}\right)\pmod{p}. $$

ただし ${}_2\tilde{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{12} & \frac{5}{12}\\ & \frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27b^2}{4a^3}\right)=\sum_{i_0=0}^{\frac{p-5}{12}}\frac{\left(\frac{1}{12}\right)_{i_0}\left(\frac{5}{12}\right)_{i_0}}{\left(\frac{1}{2}\right)_{i_0}i_0!}\left(-\frac{27b^2}{4a^3}\right)^{i_0}$.

更に $\frac{(m)_n}{n!}=(-1)^n\binom{-m}{n}$ 及び $\binom{l}{n}\binom{m}{n}^{-1}=\binom{m}{l}^{-1}\binom{m-n}{l-n}$ $(l,m:$ 有理整数$)$ を使って

$$ {}_2\tilde{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{12} & \frac{5}{12}\\ & \frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27b^2}{4a^3}\right)\equiv\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-5}{12}}^{-1}\sum_{i_0=1}^{\frac{p-5}{12}}(-1)^{i_0}\binom{\frac{5p-1}{12}}{i_0}\binom{\frac{p-1}{2}-i_0}{\frac{p-5}{12}-i_0}\left(-\frac{27b^2}{4b^3}\right)^{i_0}\pmod{p}. $$

一般に $p\equiv a' \pmod{12}$ のとき $P(A;B,C|X):=\sum_{i_0=0}^{\frac{p-a'}{12}}(-1)^{i_0}\binom{A}{i_0}\binom{B-i_0}{C-i_0}X^{i_0}$ とおくと

$$ H_{a,b}\equiv a^{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-5}{12}}^{-1}P\left(\frac{5p-1}{12};\frac{p-1}{2},\frac{p-5}{12}\middle|-\frac{27b^2}{4a^3}\right)\pmod{p} $$

となる. 更に

$$ \binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-5}{12}}^{-1}\equiv\frac{\Gamma_p\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\Gamma_p\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma_p\left(\frac{5}{12}\right)}\pmod{p} $$

であるが, Γ_p の distribution relation により

$$ \frac{\Gamma_p\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma_p\left(\frac{5}{12}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{1}{4}\right)^2}\equiv-(-3)^{\frac{p-1}{4}}\pmod{p}, $$

を得る. 一方

$$ P(A;B,C|x)\equiv(-1)^{B+C}\sum_{i_0=0}^{p-2}\binom{\omega^{-A}\omega^{i_0}}{\omega^{i_0}}^*\binom{\omega^{-C}\omega^{i_0}}{\omega^{-B}\omega^{i_0}}^*\omega^{i_0}(x)\pmod{p}. $$

であることから 有限体上の超幾何級数

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\omega^{-A} & \omega^{-B}\\ & \omega^{-C}\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\frac{p-1}{p}\sum_{i_0=0}^{p-2}\binom{\omega^{-A+i_0}}{\omega^{i_0}}^*\binom{\omega^{-C+i_0}}{\omega^{-B+i_0}}^*\omega^{i_0}(x), $$

を用いれば 他の場合も同様にして次を得る.

定理 3. $j = 3^3 4^3 \frac{4a^3}{4a^3+27b^2}$ は絶対不変量である.

(i) $j \neq 0$ のとき

$$H_{a,b} \equiv \begin{cases} -\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{p-1}{4}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \omega^{-\frac{p-1}{12}} & \omega^{-\frac{5(p-1)}{12}} \\ & \omega^{-\frac{p-1}{2}} \end{matrix} \middle| 1-\frac{3^3 4^3}{j}\right) \pmod p & p \equiv 1 \pmod{12}, \\ -\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{p-1}{4}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \omega^{-\frac{5p-1}{12}} & \omega^{-\frac{p-5}{12}} \\ & \omega^{-\frac{p-1}{2}} \end{matrix} \middle| 1-\frac{3^3 4^3}{j}\right) \pmod p & p \equiv 5 \pmod{12}, \\ \frac{b}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{p-7}{4}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \omega^{-\frac{p-7}{12}} & \omega^{-\frac{5p-11}{12}} \\ & \omega^{-\frac{p-3}{2}} \end{matrix} \middle| 1-\frac{3^3 4^3}{j}\right) \pmod p & p \equiv 7 \pmod{12}, \\ \frac{b}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{p-7}{4}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \omega^{-\frac{5p-7}{12}} & \omega^{-\frac{p-11}{12}} \\ & \omega^{-\frac{p-3}{2}} \end{matrix} \middle| 1-\frac{3^3 4^3}{j}\right) \pmod p & p \equiv 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

(ii) $j \neq 3^3 4^3$ のとき

$$H_{a,b} \equiv \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{12}+1}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{p-1}{6}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \omega^{-\frac{p-1}{12}} & \omega^{-\frac{7(p-1)}{12}} \\ & \omega^{-\frac{2(p-1)}{3}} \end{matrix} \middle| \frac{j}{j-3^3 4^3}\right) \pmod p & p \equiv 1 \pmod{12}, \\ (-1)^{\frac{p-5}{12}+1}\frac{a}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{p-5}{6}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \omega^{-\frac{p-5}{12}} & \omega^{-\frac{7p-11}{12}} \\ & \omega^{-\frac{2(p-2)}{3}} \end{matrix} \middle| \frac{j}{j-3^3 4^3}\right) \pmod p & p \equiv 5 \pmod{12}, \\ (-1)^{\frac{p-7}{12}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{p-1}{6}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \omega^{-\frac{7p-1}{12}} & \omega^{-\frac{p-7}{12}} \\ & \omega^{-\frac{2(p-1)}{3}} \end{matrix} \middle| \frac{j}{j-3^3 4^3}\right) \pmod p & p \equiv 7 \pmod{12}, \\ (-1)^{\frac{p-11}{12}}\frac{a}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{p-5}{6}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \omega^{-\frac{7p-5}{12}} & \omega^{-\frac{p-11}{12}} \\ & \omega^{-\frac{2(p-2)}{3}} \end{matrix} \middle| \frac{j}{j-3^3 4^3}\right) \pmod p & p \equiv 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

参考文献

[1] S.Chowla, B.Dwork and R.Evans, *On the mod p^2 determination of* $\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}}$, J. Number Theory, **24**(1986), 188-196.

[2] M.Deuring, *Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **14**(1941), 197-272.

[3] M.Ishibashi, H.Sato, K.Shiratani, *On the Hasse invariants of elliptic curves*, Kyushu J. of Math., **48**(1994), 307-321.

[4] M.Kaneko, *Supersingular elliptic curves and hypergeometric series (in Japanese)*, R.I.M.S., **844**(1993), 17-25.

[5] M.KANEKO and D.ZAGIER, *Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials*, to appear.

[6] M.KOIKE, *Hypergeometric series over finite fields and Apéry numbers*, Hiroshima Math. J., **22**(1992), 461-467.

[7] M.KOIKE, *Shift orthogonal matrices obtained from hypergeometric series over finite fields and elliptic curves over finite fields*, to appear in Hiroshima Math. J..