数理解析研究所講究録
925 巻 1995 年 77-88

正標数のスワン導手について

学術振興会特別研究員　松田 茂樹　(Shigeki Matsuda)

1 Introduction

k を標数 $p>0$ の閉体、ℓ を p と互いに素な素数とする。また、X を k 上 proper smooth な代数曲線とする。X の開部分多様体 U 上で smooth な ℓ 進層 $\mathcal{F}$ の Euler 標数を局所的に計算する次の Grothendieck Ogg Shafarevich の公式がある。

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) - rk(\mathcal{F})\chi_c(U) = -\sum_x Sw_x$$

この公式の高次元化が, Deligne, 加藤和也, 斉藤秀司, 斉藤毅氏らによってなされている。このうち Deligne の公式は次の様なものである Cf. [2]。上の状況で X を代数曲面, U を $D=X-U$ が, 正規交叉因子となるような開部分多様体として,

(1)
$$\begin{aligned} & \chi_c(U,\mathcal{F}) - rk(\mathcal{F})\chi_c(U) \\ = \; & -\sum_{i\in I} S_i\chi_c(\overset{o}{D}_i) + \sum_{i\in I, j\in J_i} S_{i,j}\Big(t_{i,j} - v_{i,j}((D_i.D_i) - \chi(D_i))\Big) \\ & + \sum_{x\in D-\bigcup \overset{o}{D}_i} S_x \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで χ_c は compact support cohomology の Euler 標数を表す。他の定数についての正確な定義は省略するが, S_i は D の既約因子 D_i の Swan conductor にあたるもので, $D_i - \bigcup_{i\neq j} D_i\cap D_j$ と横断的に交わる弧の上に制限した時の $\mathcal{F}$ のスワン導手の最大値であり, $\mathcal{F}$ の D_i でのスワン導手と考えられる。この時, 実際には殆ど全ての $D_i - \bigcup_{i\neq j} D_i\cap D_j$ の点で, この点の上で D_i と横断的に交わる殆ど全ての弧に対し, スワン導手はこの最大値を取る。しかし, ある方向に沿ってはスワン導手が退化する場合がある。これには微分方程式論の特性多様体との類似が見られる。また, ある点においてはどの方向の弧に対してもスワン導手が退化してしまうことがあり, これは高次元の分岐で初めて起きる現象である。

この様な点や $\bigcup_{i\neq j} D_i \cap D_j$ の点でのスワン導手にあたるものが S_x である。その他の定数については説明を省略するが, $S_{i,j}$ も一種のスワン導手であり, また $t_{i,j}$ や $v_{i,j}$ は上の" 特性多様体" によって決まるものである。

一方, 加藤氏によって得られた公式は高次元類体論を利用したものである。そのために $\mathcal{F}$ は階数 1 と仮定する。更に $(X, U, \mathcal{F})$ の組が clean であるとすると, (これは大体上の様な悪い点が無いということである) その公式は次の様に書ける [5]。

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) - \chi_c(U) = -\sum_i \mathrm{sw}_{D_i}(\mathcal{F})\chi_c(D_i') + (D_{\mathcal{F}}.D_{\mathcal{F}}). \tag{2}$$

ここで, sw_{D_i} は類体論的に定まるスワン導手であり, D_χ は, D の各既約因子に $\mathrm{sw}_{D_i}(\mathcal{F})$ の重複度を持たせた因子である。また, (.) は交点数を表す。

この二つの公式は似た様な形をしているにもかかわらず, その証明方法は全く異なる。そこで両方の公式の局所項を比較したいのだが, そのためには類体論的に定まるスワン導手をもう少し精密にする必要がある。それが次の節で述べるものである。

2 局所的な refined Swan conductor の定義

以下 $\mathcal{O}_K$ は標数が奇素数のヘンゼル離散付値体 K の整数環とする。また, その剰余体を E で表す。K の素元 π を一つ固定し, また E は $[E : E^p] = p^c < \infty$ を仮定する。また, $H_s^1(K)$ で $H_{et}^1(\mathrm{Spec}(K), \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$ を, $H^1(K)$ で $H_{et}^1(\mathrm{Spec}(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ を表すとする。この群は K のガロア群 $G(K^{sep}/K)$ の一次指標の群と見倣すことが出来, Brylinski, 加藤によって定義された分岐 filtration を持つ。これは次の様なものである。まず長さ s の Witt vectors の群に対し次の増大 filtration, $\{\mathrm{fil}_n W_s(K)\}_{n\geq 0}$ を定める。

$$\mathrm{fil}_n W_s(K) = \{(a_{s-1}, \ldots, a_0) \in W_s(K) \mid p^i \mathrm{ord}_K(a_i) \geq -n \text{ for } \forall i\}.$$

この時, 連結準同形を $\delta_s : W_s(K) \to H^1(K)$ として $H^1(K)$ の 分岐 filtration $\{\mathrm{fil}_n H^1(K)\}_{n\geq 0}$ は

$$\mathrm{fil}_n H^1(K) = H^1(K)(\mathrm{non\!-\!p}) + \bigcup_{s\geq 1} \delta_s(\mathrm{fil}_n W_s(K))$$

として定義される。ただし (non-p) は p と互いに素な部分を表す。

このfiltrationは言うなればlog付きのfiltrationになるので, Deligneの公式には馴染まない。そこでこれを次の様にちょっと修正する。まず, $W_s(K)$ に対して $s' = \min\{\mathrm{ord}_p(n+1), s\}$ とし, $\{\mathrm{fil}'_n W_s(K)\}_{n\geq 0}$ を

$$\mathrm{fil}'_n W_s(K) = V^{s-s'}\mathrm{fil}_{n+1} W_{s'}(K) + \mathrm{fil}_n W_s(K) \in W_s(K).$$

と定める。後は上の場合と同様にして

$$\mathrm{fil}'_n H^1(K) = H^1(K)(\mathrm{non-p}) + \bigcup_{s\geq 1} \delta_s(\mathrm{fil}'_n W_s(K))$$

と定義する。これがlogの付かない分岐filtrationにあたる。

次に refined Swan conductor について説明する。Cf. [6]。F や V は de Rham Witt complexの通常のoperatorを表すとする (cf. [4])。以下では p は奇素数を表すとする。また, $n \geq 1$ とする。

$$-F^{s-1}d : W_s(K) \longrightarrow \Omega_K;$$
$$(a_{s-1}, \ldots, a_0) \longmapsto -\sum_{i=0}^{s-1} a_i^{p^i-1} da_i$$

は上のfiltration達を保つ。従って

$$\Phi_{s,n} : \mathrm{fil}_n W_s(K)/\mathrm{fil}_{[\frac{n}{p}]} W_s(K) \longrightarrow \mathrm{fil}_n \Omega_K/\mathrm{fil}_{[\frac{n}{p}]}\Omega_K.$$

という準同形が出来るが, これは次の様に$\mathrm{fil}_n H^1_s(K)/\mathrm{fil}_{[\frac{n}{p}]} H^1_s(K)$ を経由する。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{fil}_n W_s(K)/\mathrm{fil}_{[\frac{n}{p}]} W_s(K) \arrow[r, "\Phi_{s,n}"] \arrow[d] & \mathrm{fil}_n \Omega_K/\mathrm{fil}_{[\frac{n}{p}]}\Omega_K \\
\mathrm{fil}_n H^1_s(K)/\mathrm{fil}_{[\frac{n}{p}]} H^1_s(K) \arrow[ur, "\Psi_{s,n}"'] &
\end{tikzcd}$$

この $\Psi_{s,n}$ は s についてコンパチブルであり, 順極限を取ることで

$$\Psi_n : \mathrm{fil}_n H^1_s(K)/\mathrm{fil}_{[\frac{n}{p}]} H^1_s(K) \to \mathrm{fil}_n \Omega_K/\mathrm{fil}_{[\frac{n}{p}]}\Omega_K$$

が出来る。

命題 1 Ψ_n は単射になる。

つまり, Ψ_n によって, χ のより詳しい性質が分るということである。

$G(K^{sep}/K)$ の一次指標 $\chi \in H^1(K)$ に対し χ が$\mathrm{fil}_n H^1(K)$ に入るような最少の n を Swan conductor と呼び $\mathrm{sw}(\chi)$ と書く。$n = \mathrm{sw}(\chi) \geq 1$ の時, χ の refined Swan conductor を Ψ_n の像として定義することが出来る。

上の Ψ_n からは, 単射

$$\psi_n : \mathrm{gr}_n H^1(K) \to \mathrm{gr}_n \Omega_K$$

$$\psi'_n : \mathrm{gr}'_n H^1(K) \to \mathrm{gr}'_n \Omega_K$$

が誘導されるが, 前者を使って上と同様に refined Swan conductor を定義したものが, [6] で定義されたものと一致する。(これを $\mathrm{rsw}(\chi)$ と書く。) 即ち, ここで定義したものは, [6] で定義されたものの精密化になっている。また, 後者を使って同様に定義されたものを $\mathrm{rsw}'(\chi)$ と書くことにする。

3 大局的な場合への応用

話を global な状況に戻す。k を標数 $p > 2$ の閉体とし, X を k 上 smooth irreducible な scheme とする。D を X の simple normal crossing divisor とし, $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ の様に smooth な既約成分の和で書けているとする。X の商体を K, D_i の generic point を $\mathfrak{p}_i$ とする。$\chi \in H^1(K)$ を $U = X - D$ で不分岐な一次指標とする。K を $\mathfrak{p}_i$ で完備化した体を $K_{\mathfrak{p}_i}$ とし, χ をこの体のガロア群の指標と見做した時の $\mathrm{sw}(\chi)$, $\mathrm{sw}'(\chi)$ を $\mathrm{sw}_{D_i}(\chi)$, $\mathrm{sw}'_{D_i}(\chi)$ と書く。また, $\mathrm{sw}_{D_i}(\chi) > 0$ や $\mathrm{sw}'_{D_i}(\chi) > 0$ の時は, $\mathrm{rsw}_{D_i}(\chi)$, $\mathrm{rsw}'_{D_i}(\chi)$ も同様にして定義する。すると, これらはそれぞれが global に延びて, 互いにつながりあい,

$$\mathrm{rsw}_D(\chi) \in \Omega_X(\log D) \otimes \mathcal{O}_X(-D_\chi) \mid_D,$$

$$\mathrm{rsw}'_D(\chi) \in \Omega_X \otimes \mathcal{O}_X(-D'_\chi) \mid_D$$

が出来る事が分る。ただし, D_χ, D'_χ はそれぞれ

$$D_\chi = \sum_{i\in I} \mathrm{sw}_{D_i}(\chi)\cdot D_i, \quad D'_\chi = \sum_{i\in I}(\mathrm{sw}'_{D_i}(\chi)+1)\cdot D_i$$

という因子である。

さて, 知りたいのは D と横断的に交わり, 共通部分が既約になるような smooth な超局面 C で切った時に, $\mathrm{sw}'_{C\cap D}(\chi\mid_C)$ の値がどのような振る舞いをするかであるが, これは $\mathrm{rsw}'_D(\chi)$ を使って調べられる。その前に jet について説明する。まず 1-jets の集合 $J_X^{(1)}$ を $Grass_1((\Omega_X)^\vee)$, 即ち locally free で階数 1 である Ω_Xの dual の商 $\mathcal{O}_X$-modules のグラスマン多様体として定義する。すると x を X の閉点として,

$$J_X^{(1)}(\kappa(x)) = \mathrm{Hom}_x(\mathrm{Spec}(\kappa(x)), J_X^{(1)}) \simeq ((\mathfrak{m}_x - \mathfrak{m}_x^2)/\mathfrak{m}_x^2)/\mathcal{O}_{X,x}^\times$$

が成立する。ただし, $\mathfrak{m}_x$ は $\mathcal{O}_{X,\S}$ の極大イデアルである。C を x を通る X の smooth な因子とするとき, その local equation π を $((\mathfrak{m}_x-\mathfrak{m}_x^2)/\mathfrak{m}_x^2)/\mathcal{O}_{X,x}^\times$ の元と見做すことにより, $J_X^{(1)}$ の元が定まる。これを $\mathrm{jet}_x(C)$ で表す。また, Ω_X の階数 1 の locally free な商 $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$ から定まる $J_X^{(1)}$ の元も $\mathrm{jet}_x(\mathcal{E})$ で表す。

さて, 元の問題に戻る。$\mathrm{sw}'(\chi) = n \geq 1$ の時, $\chi \in \mathrm{fil}_n H^1(K) \subset \mathrm{fil}'_n H^1(K)$ なら χ は type I, そうでなければ, type II と呼ぶことにする。また, $\mathcal{C}_x$ で, ある D_i 上の点 x を通り D_i と横断的に交わり, 共通部分が既約になる X の smooth な超局面全体の集合を表す。便宜上, 次の条件を考える。

条件 * : χ が D_i で type I の時は $\mathrm{rsw}'(\chi)\mid_x \neq 0$, χ が D_i で type II の時は $\mathrm{rsw}(\chi)\mid_x \neq 0$.

この時, 次の定理が成立する。

定理 2 $D_i - \bigcup_{i\neq j} D_i \cap D_j$ の開部分スキーム $\overset{o}{D}_i$ があって, D_i の閉点 x に対し次が成立する。

$$x \in \overset{o}{D}_i \iff \text{条件} * \text{が成立する。}$$

更にこの時, $x \in \overset{o}{D}$ について次が成立する。

(i) χ が *type I* なら,

$$\mathrm{sw}'_{C\cap D_i}(\chi\mid_C) = \mathrm{sw}'_{D_i}(\chi).$$

(ii) χ が *type II* なら,

$$\mathrm{sw}'_{C\cap D_i}(\chi\ |_C) \le \mathrm{sw}'_{D_i}(\chi)$$

であり,

$$\begin{aligned} & \pi^n \mathrm{rsw}'_{C\cap D_i}(\chi\ |_C)_x \subset \mathfrak{m}_x(\Omega_C\ |_{C\cap D_i})_x \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{jet}_x(\mathcal{O}_X(-D'_\chi)\ |_D) = \mathrm{jet}_x(C) \end{aligned}$$

となる。

ただし, ここで π は D_i の *local equation* である。また, $\mathcal{O}_X(-D'_\chi)$ を $\mathrm{rsw}'_{(}\chi)$ によって $\Omega_X\ |_D$ の直和因子と見做すことにより, $\mathrm{jet}_x(\mathcal{O}_X(-D'_\chi))$ を定義している。

この (ii) の場合だが, 特に X が曲面の場合は次の様に書ける。

系 3 定理 *2* の *(ii)* の場合, もし $\dim X = 2$ であれば,

$$\mathrm{sw}'_{C\cap D_i}(\chi\ |_C) < \mathrm{sw}'_{D_i}(\chi) \iff \mathrm{jet}_x(\mathcal{O}_X(-D'_\chi)\ |_D) = \mathrm{jet}_x(C)$$

即ち, $\mathrm{sw}'_{C\cap D_i}(\chi)$ が退化するのは $\mathrm{jet}_x(C)$ が $\mathrm{rsw}'_D(\chi)$ で定まる方向の時, その時に限るということが分る。

この様に, χ が type II の時には $\mathrm{sw}'(\chi)$ の退化の様子は $\mathrm{rsw}'(\chi)$ を使うと調べられるのであるが, type I の時には, $\mathrm{rsw}(\chi)$ の方がより多くの情報を持っている。従って次の mixed Swan conductor を考えると都合が良いことがある。まず, 因子 $D^{(1)}$ を χ が type I であるような D_i 達の合併とする。そうすると χ が D_i で type I の所には $\mathrm{rsw}(\chi)$, type II の所には $\mathrm{rsw}'(\chi)$ を置いてやると, これらはうまくつながりあって

(3) $$\mathrm{rsw}''(\chi) \in \Omega_X(\log D^{(1)}) \otimes \mathcal{O}_X(-D_\chi)\ |_D$$

を定める。これは後で消滅サイクルの予想を延べる際に出てくる。

話を定理 2 に戻す。この結果は $\mathrm{rsw}'_D(\chi)$ が characteristic variety の役割を果たすことを意味する。実際に [2] において Deligne は $J_X^{(1)}\ |_D$ の中に次の様にして exceptional hypersurface を定義している。状況は上と同じとして, この場合に $\overset{\circ}{D}_i$ を $D_i - \bigcup_{i\neq j} D_i \cap D_j$

の中の開部分スキームのうちで任意の $\overset{\circ}{D}_i$ 内の閉点 x について x において D と横断的に交わる殆ど全ての曲線 C に対して $\mathrm{sw}'_x(\chi\mid_C)$ が最大値を取るものであるようなもののうち極大なものとする。この時に Deligne の公式 (1) の中の S_i は，この $\mathrm{sw}'_x(\chi\mid_C)$ の最大値として定義される。で，この時に $\mathrm{sw}'_x(\chi\mid_C) < S_i$ となるような C の jet 達は $J^{(1)}_X$ の中で閉集合をつくる。この閉集合の既約成分の閉包および $\Omega_X\mid_D$ の部分層 $N_{D/X}$ (conormal sheaf) から定まる $J^{(1)}_X$ の部分スキーム (これを H_{D_i} で表す) を exceptional hypersurfaces と呼ぶのである。(実際には Deligne は階数の高い表現も考えており，そのためにより高次の jet も考えている。)

これらの言葉を使うと，上の結果は，表現の階数が 1 の時は $J^{(1)}_X$ 内の exceptional hypersurface は H_{D_i} だけであるか，もしくは H_{D_i} ともう一つあるか，そのいずれかである，という風に言い直せる。また，S_i は $\mathrm{sw}'_x(\chi)$ と一致することも分る。この事を利用して，(1) の中にある，$t_{i,j}$, $v_{i,j}$ なども計算する事ができる。(公式中の J_i は，exceptional hypersurfaces の index である。) この他に公式 (1) の中で説明していないのは $S_{i,j}$, S_x であるが，これらは消滅サイクルを使って説明される。(これらの定数の簡単な場合における説明は 5 で述べることにする。)

4 消滅サイクル

公式 (1) を証明するには，Lefshetz pencil を使って曲線の場合に帰着させるのであるが，その際に消滅サイクルが用いられる。$S_{i,j}$ や S_x なんかも，消滅サイクルを使って定義される。これと，refined Swan conductor との関係を調べたい。k は前節と同じように標数が奇素数 p の閉体であるとし，S を k 上 smooth な曲線の閉点の上でのヘンゼル化とする。S の閉点と生成点をそれぞれ s, η とする。次に X を S 上の relative curve, 即ち X 上有限型平坦な分離正則スキームで相対次元が純 1 次元であるものとする。また，generic fiber は smooth とする。special fiber を X_s で表すことにする。

D を S 上 finite flat で正則な既約因子とし，X は S 上 smooth だと仮定する。$D\cap X_s$ は一点になるが，この点を x で表す。$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}\subset\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ を一つ固定して有限位数の一次指標

$\chi:\pi_1(U,*)\to\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ に対応する U 上の階数1の smooth sheaf を $\mathcal{F}_0$ で表す。$j:U\to X$ に対し $\mathcal{F}=j_!\mathcal{F}_0$ とする。以下, 誤解の生じない時は χ のかわりに, $\mathcal{F}$ と書いたりする。例えば D の生成点を $\mathfrak{p}$ とし, $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ のヘンゼル化の商体を K とすると χ は $H^1(K)$ の元と見做せるので, $\mathrm{sw}_D(\chi)$, $\mathrm{rsw}_D(\chi)$ などが定まる。これを $\mathrm{sw}_D(\mathcal{F})$, $\mathrm{rsw}_D(\mathcal{F})$ などと表したりする。

古典的な Artin conductor の高次元での類似として次のものを考える。

$$\mathrm{Art}(\mathcal{F}/S)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{dt}R\Gamma(X_{s\bar{\eta}},R\phi\mathcal{F}).$$

ただし, ここで dt は total dimension 即ち, 次元とスワン導手の和を表す。Cf. [3], [7]. これを refined Swan conductor を使って表したいのであるが, そのためにまず, 第 3 節の式 (3) の $\mathrm{rsw}''_D(\mathcal{F})$ を使って,

$$\varphi_{\mathcal{F}}:\mathcal{O}_X(-D_{\mathcal{F}})\mid_D\to\Omega_X(\log D^{(1)}))\mid_D\to\Omega_{X/S}(\log D^{(1)})\mid_D$$

という写像を考える。χ は x において定理 2 の直前に述べた 条件 * を満たすと仮定する。この時

$$c_{\mathcal{F}}=\{c^D_{1,D_s}(Cok\varphi_{\mathcal{F}})\cdot D_\chi\}_0\in CH_0(D_s).$$

として $c_{\mathcal{F}}$ を定義する。ただし, ここで $c^D_{1,D_s}(Cok\varphi_{\mathcal{F}})\in CH^1(D_s\to D)$ は Bloch の定義した bivariant Chern calss である [1]。すると次の予想が考えられる。

予想 4

$$\mathrm{Art}(\mathcal{F}/S)=-\deg(c_{\mathcal{F}}).$$

実際にこの予想は次の場合には確かめられる。

命題 5 予想 4 は, もし χ が 位数 p であり, かつ D で *type II* であれば成立する。

証明には [7] の結果を利用する。Cf. [5], [9].

5　局所項の比較

最初の問題に戻る。k や, X などの記号は第 3 節と同じとする。また前節の様に, χ と $\mathcal{F}$ を区別しないで使う。

前節の予想を使うと, シンプルな場合には, Deligne の公式 1 の局所項が計算出来る。簡単のために D は smooth な既約因子だとしておく。また, D 上の全ての閉点 x において, 条件 * が成り立っていると仮定する。χ が type I の場合と type II の場合に分けて説明する。

(i) χ が type I の時。

この場合は, 第 3 節の最後で説明したように exceptional hypersurface は標準的に必ずある H_D のみになり, Deligne の公式 (1) は次の様に書ける。

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) - \chi_c(U) = -S_D\chi_c(D) \tag{4}$$

ここで, S_D は D と横断的に交わる曲線の上での χ でスワン導手の値であるが, これは今の場合は $\mathrm{sw}_D(\chi) = \mathrm{sw}'_D(\chi)$ と一致する。一方で加藤の公式 (2) は

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) - \chi_c(U) = -\mathrm{sw}_D(\chi)\chi_c(D) + (D_\chi.D_\chi). \tag{5}$$

と書けている。従って, 両者が一致するためには, $(D_\chi.D_\chi) = 0$ となればよい。しかるに, 条件 * から

$$\mathcal{O}_X(-D_\chi)\mid_D \to \Omega_X(\log D)\mid \overset{res}{\to} \mathcal{O}_D$$

は同型になることが分るので, $(D_{\mathcal{F}}.D_{\mathcal{F}}) = -\deg(\mathcal{O}_D) = 0$ が得られる。

(ii) χ が type II の時

やはり第 3 節の最後で説明したように, この場合は H_D の他にもう一つ $\mathrm{rsw}'_D(\mathcal{F})$ に対応する exceptional hypersurface H_1 が存在する。公式 (1) の中の t, v はそれぞれ $J_X^{(1)}\mid_D$ 内での H_1 と H_D, および, H_1 と F (F は $J_X^{(1)}\mid_D\to D$ の勝手なファイバー) の交点数として定義される。また, $S_{i,j}$ であるが, これは今の場合一つしかないので $S_{D,1}$

と書くことにすると, 次の様に定まる。まず, X を適当な x の近傍で取り換えることで, k 上の smooth な曲線 T に $f: X \to T$ という smooth separated な射があるとしてよい。ここで, T の $s = f(x)$ での完備化 T' を取り, $X' = X \times_T T'$, $f': X' \to T'$ を induce される射とする。適当に f を取り換えることで, H_1 は $J_X^{(1)} \mid_D$ の中で, $f'^*\Omega_X$ から定まる hypersurface (といっても, 今は 1-jets の中で考えているから曲線だが) と横断的に交わる, と仮定しても構わない。この時, Deligne の定義した $S_{D,1}$ は第 4 節で定義した Art$(\mathcal{F}/S)$ を使って

$$S_{D,1} = -Art(F'/T')$$

と書かれる。これは, f などの取り方にはよらないことが示される。予想 4 を使うと右辺は$\varphi : \Omega_{X'}(-D'_{\mathcal{F}}) \mid_D \to \Omega_{X'/T'} \mid_D$ として $\deg(\{d^D_{1,D_s}(Cok\varphi_{calF}) \cdot D_{\mathcal{F}}\}_0)$ と等しいが, ここで, H_1 と $f'^*\Omega_X$ から定まる hypersurface が横断的に交わることから, この右辺は $\mathrm{sw}_D(\mathcal{F})$ に等しいことが分る。Deligne の公式は今の場合,

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) - \chi_c(U) = -S_D\chi_c(D) + S_{D,1}(t - v((D.D) - \chi_c(D))) \tag{6}$$

と書けているが, $S_D = \mathrm{sw}'_D(\mathcal{F}) = \mathrm{sw}_D(\mathcal{F}) - 1$ であり, 上の事から $S_{D,1} = \mathrm{sw}_D(\mathcal{F})$ である。また条件 * から $t = 0$ も分る。更に $v = 1$ も簡単に計算できるので, 結局式 (6) は

$$\begin{aligned} \chi_c(U,\mathcal{F}) - \chi_c(U) &= -(\mathrm{sw}_D(\mathcal{F}) - 1)\chi_c(D) + \mathrm{sw}_D(\mathcal{F})(\chi_c(D) - (D.D)) \\ &= \chi_c(D) - (D_{\mathcal{F}}.D) \end{aligned}$$

となる。一方, 加藤の公式の方は

$$\begin{aligned} \chi_c(U,\mathcal{F}) - \chi_c(U) &= -\mathrm{sw}_D(\mathcal{F})\chi_c(D) + (D_{\mathcal{F}}.D_{\mathcal{F}}) \\ &= -sw_D(\mathcal{F})(\chi_c(D) - (D_{\mathcal{F}}.D)) \end{aligned} \tag{7}$$

と書けている。両者の右辺が一致するには $\chi_c(D) = (D_{\mathcal{F}}.D)$ を示せばいいのであるが, 条件 * より,

$$\mathcal{O}_X(-D_{\mathcal{F}}) \mid_D \to \Omega_X \mid_D \to \Omega_D$$

という合成射像は同型になる。従って, $(D_{\mathcal{F}}.D) = -\deg(\mathcal{O}_X(-D_{\mathcal{F}})\mid_D) = -\deg(\Omega_D) = \chi_c(D)$ となるのである。以上から, 式 (6) と式 (7) の局所項は一致することが分る。

D が irreducible で無い時も, 適当に予想を拡張することにより, 二つの式の局所項の一致を説明することが可能になるが, 複雑になるので省略する。

なお, Deligne の公式 1 の中の S_x も消滅サイクルを使って説明されるのだが, ここでは省略する。ただし, $(X, U, \mathcal{F})$ の組が clean でない時は, 直接 $\mathrm{rsw}_D(\mathcal{F})$ と結びつけるのは難しそうである。

参考文献

[1] S. Bloch. *Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristic of curves, Bowdoin Conference in Algebraic Geometry.* Algebraic Geometry - Bowdoin, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46, pp. 421–450, 1987.

[2] P. Deligne. *Lettre to Illusie*, 1976.

[3] P. Deligne and N. Katz. *Groupes de monodromie en Géomeétry Algébrique.* SGA 7, Lecture Notes in Math., Vol. 340, , 1973.

[4] L. Illusie. *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline.* Ann. Sci. École. Norm. Sup., Vol. 12, pp. 501–661, 1979.

[5] K. Kato. *Class field theory, $\mathcal{D}$-modules and ramification on higher dimensional schemes I.* to appear in Amer. J. Math.

[6] K. Kato. *Swan conductor for characters of degree one in the imperfect residue field case.* Contemp. Math., Vol. 83, pp. 101–131, 1989.

[7] K. Kato, S. Saito, and T. Saito. *Artin characters for algebraic surfaces.* Amer. J. Math., Vol. 108, pp. 49–76, 1987.

[8] S. Matsuda. *On the Swan conductor in positive characteristic.* (preprint).

[9] T. Saito. *The Euler numbers of ℓ-adic sheaves of rank 1 in positive characteristic.* (preprint).