数理解析研究所講究録
926巻 1995年 125-143

Tarski-Seidenberg の定理について

山田　浩　(名工大)

このノートは

[C] Paul L. Cohen; Decision Procedure of Real and p-adic Fields, Communications on pure and applied Mathematics, *vol*. XXII, *pp*. 131-151 (1969)

の中で与えられている「Tarski の定理」の簡潔な証明（*pp*.132-134）.と，それを再編成した

[B] G. W. Brumfiel; Partially ordered Rings and semi-algebraic Geometriy, London Mathematical Society Lecture Note Series 37 (1979)

の Appendix（*pp*.268-277）を，バラバラに分解し，そしてもう一度つなぎ合わせたものである．いささか冗長になってしまってはいるが，上記の文献に比べてやや「モノ」が見えている部分も含まれているとの自負心もある（手前味噌）．

§ 1. 「定理」の解説　R を「実閉体」(real closed field) とし，$X = (X_1, \cdots, X_n)$ を R 上の変数とする．このとき，多項式 $f(X) \in R[X]$ についての relation

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_n) > 0$$

に有限回の「$\vee$, $\wedge$, $\sim$(*not*)」を施して得られる「条件」を「多項式の符号条件」(of degree n over R) と言い $A(X)$ などで表すことにする．符号条件 $A(X)$ の<u>解集合</u>

$$S \equiv \{x \in R^n \mid A(x) \text{ (is true)}\}$$

は R^n の *semi-algebraic subset* (= *s.a.s.*) と呼ばれている．R^n の

s.a.s. 全部の集合

$$\mathrm{SA}(R^n)$$

は $V(f) \equiv \{x \in R^n \mid f(x) > 0\}$ $(f(X) \in R[X_1,\cdots,X_n])$ で生成される $\mathcal{B}(R^n) = 2^{(R^n)}$ の「Bool 代数」(*i.e.* closed under *finite* "$\cup$", "$\cap$" and "C (= complement)") である.

また，有限個の多項式 $f_i(X_1,\cdots,X_n) \in R[X_1,\cdots,X_n]$ とそれに対応する「符号」$\lambda_i \in \{-1,0,+1\}$ によって定義される条件式

(1.1) $$\mathrm{sign}[f_i(X_1,\cdots,X_n)] = \lambda_i$$

を考える. これの解集合 $S \equiv \{x \in R^n \mid \forall i(\mathrm{sign}[f_i(x)] = \lambda_i)\}$ は明らかに1つの s.a.s. である. このような s.a.s. S を「基本型」s.a.s. と言う. そしてこの S を定義する (1.1) を基本型 s.a.s. S の「定義符号式」と呼ぶ. 一般の s.a.s. $S \in \mathrm{SA}(R^n)$ はこの基本型 s.a.s. の有限和で表わされる.

以上の準備のもとで,「Tarski の定理」は次のように述べられる:

THEOREM 1.A. 射影

$$\pi : R^{n+1} \longrightarrow R^n;\ \pi(x,y) = y, \quad (x \in R^n,\ y \in R)$$

について,

$$S \in \mathrm{SA}(R^{n+1}) \implies \pi(S) \in \mathrm{SA}(R^n).$$

§ 2. 証明の筋書き(アイディア) 部分集合 S_1, $S_2 \subset R^n$ について，一般に $\pi(S_1 \cup S_2) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2)$ であるから, THEOREM 1.A に現われる $S \in \mathrm{SA}(R^{n+1})$ を基本型と仮定してよい. そこで S の定義符号式を

$$f_i(X;Y) = \lambda_i$$

$$f_i(X;Y) \in R[X, \cdots, X_n; Y], \quad \lambda_i \in \{-1, 0, +1\}$$

$$i = 1, 2, \cdots, m$$

とする．このとき $x \in R^n$ について

(2.1) $$x \in \pi(S)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, y \in R \text{ s.t. } \forall\, i\ (\mathrm{sign}[f_i(x;y)] = \lambda_i)$$

である．この条件を分析する：

$x \in R^n$ を fix する．そして方程式 $f_i(x;Y) = 0$ $(i = 1, \cdots, m)$ の R の中にある根のすべてを一列に並べたもの

$$\xi_1(x) < \xi_2(x) < \cdots < \xi_N(x), \quad N = N(x)$$

を考える．このとき「real closed field 上の多項式についての中間値の定理」より，どの $f_i(x;Y)$ も，その値は各開区間

$$U_k(x) = (\xi_k(x), \xi_{k+1}(x)), \ (0 \leqq k \leqq N+1)$$

$$(\xi_0(x) = -\infty, \ \xi_{N+1}(x) = -\infty)$$

の上では「定符号」であることがわかる．そこで R^n 上で定義された関数

$$\varepsilon_{ij}(x) \equiv \mathrm{sign} f_i(x; \xi_j(x))$$

$$\delta_{ik}(x) \equiv \mathrm{sign} f_i(x; \eta_k(x))$$

$$1 \leqq i \leqq m, \quad 1 \leqq j \leqq N, \quad 0 \leqq k \leqq N$$

ただし

$$\eta_k(x) = \begin{cases} \xi_0(x) - 1 & k = 0 \\ \frac{1}{2}\{\xi_k(x) + \xi_{k+1}(x)\} & 1 \leqq k \leqq N \\ \xi_N(x) + 1 & k = N+1 \end{cases}$$

を考えると，我々の条件 (2.1) は

(2.2) $$(\exists\, j \text{ s.t. } \forall\, i\ (\varepsilon_{ij}(x) = \lambda_i))$$

$$or\ (\exists\ k\ s.t.\ \forall\ i\ (\delta_{ik}(x) = \lambda_i))$$

$$i.e.\ \pi(S) = \bigcup_{j=1}^{N} (\bigcap_{i=1}^{m} \varepsilon_{ij}^{-1}(\lambda_i)) \cup \bigcup_{k=0}^{N} (\bigcap_{i=1}^{m} \delta_{ik}^{-1}(\lambda_i))$$

と書き換えられる．このことから THEOREM 1.A を証明するためには次の「事実」がわかればよい：

THEOREM 2.A.　上記の記号のもとで

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\lambda_i) = \{x \in R^n \mid \mathrm{sign}[f_i(x;\xi_j(x))] = \lambda_i\},$$

$$\delta_{ik}^{-1}(\lambda_i) = \{x \in R^n \mid \mathrm{sign}[f_i(x;\eta_j(x))] = \lambda_i\}$$

はすべて R^n の semi-algebraic subsets である．

§ 3. Semi-effective Functions　THEOREM 2.A を示すために次の概念を導入する：

DEFINITION 3.1.　関数 $\theta : R^n \longrightarrow R$ が $\forall\ S \in \mathrm{SA}(R)$ について

$$\theta^{-1}(S) \in \mathrm{SA}(R^n)$$

を満たしているとき，θ は *semi-effective* であると言うことにする．

このとき

EXAMPLE 3.1.　座標の「射影関数」

$$\pi_l : R^n \longrightarrow R,\quad \pi_l(x_1,\cdots,x_n) = x_l,\ (1 \leq l \leq n)$$

は明らかに semi-effective である．

LEMMA 3.1.　semi-effective function $\theta : R^n \longrightarrow R$ について，そ

の「符号関数」

$$\mathrm{sign}\circ\theta \; : \; R^n \longrightarrow R$$

も semi-effective である.

したがって，THEOREM 2.A を示すためには次の「事実」がわかればよい：

THEOREM 3.A. 関数 $f_i(x;\xi_j(x))$, $f_i(x;\eta_j(x))$ $(x \in R^n)$ はそれぞれ semi-effective functions である.

ところで THEOREM 3.A に現われる関数 $f_i(x;\xi_j(x))$, $f_i(x;\eta_k(x))$ は射影関数 π_l と方程式 $f_i(x;Y) = 0$ の「根関数」 $\xi_j(x)$ $(x \in R^n)$ の「多項式結合」である. したがって，もし次の２つの「主張」が正しければ，THEOREM 3.A の「正当性」は保証される：

CONJECTURE 3.B. 任意の semi-effective functions

$$\theta_i \; : \; R^n \longrightarrow R \quad (i = 1, \cdots, m)$$

と任意の多項式 $g(Z_1, \cdots, Z_m) \in R[Z_1, \cdots, Z_m]$ について，関数

$$g(\theta_1, \cdots, \theta_m) \; : \; R^n \longrightarrow R$$

もまた semi-effective である.

CONJECTURE 3.C. 任意に与えられた多項式 $f(X;Y) \in R[X_1, \cdots, X_n; Y]$ について，$\xi(x)$ を方程式 $f(x;Y) = 0$, $(x \in R^n)$ の１つの「根関数」とする. このとき $\xi \; : \; R^n \longrightarrow R$ は semi-effective である.

[注意] この「根関数」 $\xi(x)$ については，もう少し精密な分析と定義（定式化）が必要になる. これについては THEOREM 4.8 の statement を見てほしい.

§ 4. Effective Functions　前節の CONJECTURE 3.B および 3.C を示すためには，そこに現われる "semi-effective" の考え方（概念）（DEF. 3.1）を少々修理・修正しておく必要がある：

DEFINITION 4.1.　写像 $\Theta : D \longrightarrow R^m$ $(D \subset R^n)$ を考える．Θ が *semi-effective* とは

$$S \in \mathrm{SA}(R^m) \quad \Longrightarrow \quad \Theta^{-1}(S) \in \mathrm{SA}(R^n).$$

特に $D = \Theta^{-1}(R^m)$ $(R^m \in \mathrm{SA}(R^m))$ であるから，semi-effective map Θ の定義域 D は s.a.s.であることがわかる：$D \in \mathrm{SA}(R^n)$.

DEFINITION 4.2.　写像 $\Theta : D \longrightarrow R^m$ $(D \subset R^n)$ を考える．任意の自然数 $l \in \mathrm{N}_0 = \{0,1,2,\cdots\}$ に対して，写像

$$\theta \times 1_l \ : \ R^l \times D \longrightarrow R^l \times R^m$$

が semi-effective（DEF.4.1）であるとき（ここで 1_l は R^l の恒等写像）写像 Θ は *effective* (or *universally semi-effective*) と呼ばれる．

［注意］　この DEF.4.2 は［C］（*p*. 132）を写像の場合に拡張したものである（「用語」"effective" もそのまま）．最終的には（つまり，問題の「Tarski の定理」（THEOREM 1.A）が証明されてしまえば）写像 Θ が "effective" であることは，Θ のグラフ $\Gamma(\Theta) \subset D \times R^m$ が s.a.s. であること（*i.e.* Θ is a *semi-algebraic map*）と同値であることがわかる（COROLLARY 7.1）.

明らかに写像 Θ が effective ならば Θ は semi-effective でもある（$l = 0$）．したがって CONJECTURE 3.B，3.C は，そこの主張に現われる "semi-effective" をすべて "effective" で置き換えたものが成立してくれれば，ここの目的としては十分である．

このように変更した CONJECTURE 3.B の証明を以下の THEOREM 4.7 で与える．CONJECTURE 3.C のキチンとした statement は THEOREM 4.8

で与える．その証明が完成するのはずっと後になる（§ 8）．

LEMMA 4.1. R^n の s.a.s. D, $D_i \in \mathrm{SA}(R^n)$ (= 1,･･･,s) について

$$D = \bigcup_{i=1}^{s} D_i \quad (D_i \cap D_j = \Phi,\ i \neq j)$$

(*i.e.* s.a.s. partition of D) とする．このとき 写像 $\Theta : D \longrightarrow R^m$ について次の条件は同値でる：

(A) Θ は (semi-)effective.

(B) $\Theta_i = \Theta | D_i$ は (semi-)effective ($\forall\ i$).

［注意］ この LEMMA 4.1 の効用は次の通りである．与えられた射像 Θ が (semi-)effective であることを「証明」する際に，その定義域 D の適当な s.a.s. partition $D = \bigcup_i D_i$ を与え各 D_i の上で議論すればよい．この考え方は「方法論」として以下の「Tarski の定理」(**THEOREM 1.A**) の証明の中で効果的に働く．

LEMMA 4.2. (semi-)effective maps の合成写像はまた (semi-) effective である．

LEMMA 4.3. 「有理写像」 $\Theta : D \longrightarrow R^m$ ($D \subset R^n$)，すなわち多項式

$$f_0(X),\ f_1(X),\ \cdots,\ f_m(X) \in R[X_1, \cdots, X_n]$$

$$f_0(x) \neq 0,\ \forall\ x \in D,$$

によって

$$\Theta(x) = \left(\frac{f_1(x)}{f_0(x)}, \cdots, \frac{f_m(x)}{f_0(x)}\right) \in R^m, \quad \forall\ x \in D,$$

で定義される写像 Θ は effective である．

LEMMA 4.4. したがって特に「対角線写像」(diagonal map)

$$\Delta : R^n \longrightarrow R^n\times\cdots\times R^n,\quad \Delta(x) = (x,\cdots,x),\ x \in R^n,$$

は「多項式写像」であるから effective.

PROPOSITION 4.5. effective maps $\theta_i : D_i \longrightarrow R^{m_i}$ ($D_i \subset R^{n_i}$; $i = 1,2$) の「積写像」

$$\Theta \equiv \theta_1\times\theta_2 : D_1\times D_2 \longrightarrow R^{m_1+m_2},$$

$\Theta(x_1,x_2) = (\theta_1(x_1),\theta_2(x_2))$, はまた effective である.

Proof 写像 $1_l\times\theta_1\times\theta_2 : R^l\times D_1\times D_2 \longrightarrow R^l\times R^{m_1+m_2}$ は

$$R^l\times D_1\times D_2 \xrightarrow{1_{l+n_1}\times\theta_2} R^l\times R^{n_1}\times R^{m_2} \xrightarrow{1_l\times\theta_1\times 1_{n_2}} R^l\times R^{m_1}\times R^{m_2}$$

と分解される. ここで θ_i が effective であるから, これらの factors はそれぞれ semi-effective である (**DEF.4.2**). したがって **LEMMA 4.2** より積写像 $\theta_1\times\theta_2$ は effective である. □

LEMMA 4.6. m 個の effective functions $\theta_i : D \longrightarrow R$ ($D \subset R^n$; $i = 1,\cdots,m$) によって得られる「組み合せ写像(和写像)」

$$\theta \equiv (\theta_1,\cdots,\theta_m) : D \longrightarrow R^m,$$

$$\theta(x) = (\theta_1(x),\cdots,\theta_m(x)) \in R^m,\ (x \in D)$$

はまた effective である.

Proof 写像 θ は

$$\Delta : D \longrightarrow D\times\cdots\times D = D^m$$

$$\Theta = \prod_{i=1}^{m} \theta_i : D^m \longrightarrow R^m$$

の合成写像である．したがって LEMMA 4.2, 4.4, PROP. 4.5 より，この θ も effective である． □

次は CONJECTURE 3.B の解答である：

THEOREM 4.7. $\theta \equiv (\theta_1, \cdots, \theta_m) : D \longrightarrow R^m$ を 上の LEMMA 4.6 で与えた effective map とする．このとき任意の effective function $\varphi : E \longrightarrow R$, $\theta(D) \subset E \subset R^m$, に対して，合成関数

$$\xi = \varphi(\theta_1, \cdots, \theta_m) : D \longrightarrow R$$

もまた effective である．したがって，特に任意の多項式 $g(Z_1, \cdots, Z_m) \in R[Z_1, \cdots, Z_m]$ について，関数 $g(\theta_1, \cdots, \theta_m)$ もまた effective である．

Proof LEMMA 4.2, 4.6 から直ちにわかる． □

［注意］ この THEOREM 4.7 は [B] Lemma A.4 (p. 269) の主張を少しばかり拡張している．

次に CONJECTURE 3.C のキチンとした statement だけを与えておく．証明は以下の §§ に続く：

THEOREM 4.8. 任意に与えられた多項式 $f(X;T) \in R[X_1, \cdots, X_m; T]$, $n = \deg_T[f(X;T)]$, に対して，$(n+1)$ 個の effective functions で次の条件を満たすものが存在する：

$$\xi_i : R^m \longrightarrow R \ (1 \le i \le n),$$

$$N : R^m \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots, n\} \subset R$$

ただし，ここで，任意の $x \in R^n$ に対して

$$\xi_1(x) < \xi_2(x) < \cdots < \xi_{N(x)}(x)$$

は $f(x;T) = 0$ の R の中にあるすべての根である.

DEFINITION 4.3. この $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n$ を $f(X;T) = 0$ の「根関数」(the *root functions*), N を根の「個数関数」(the *number function of roots*) と言う.

[注意] THEOREM 4.7 を考慮に入れると, この THEOREM 4.8 を示すためには多項式 $f(X;T)$ が

$$p_n(X;T) \equiv X_0T^n+XT^{n-1}+\cdots+X_n$$

の場合に証明出来ればよいことがわかる (*cf.* DEF.7.1).

EXAMPLES 4.1 $n = 0$ の場合: $p_0(X;T) \equiv X_0$. このときは root function は存在しない (0 個). そしてダミー関数 $N(x) = 0$ ($\forall\ x \in R$) を考えればよい.

$n = 1$ の場合; $p_1(X;T) = X_0T+X_1$.

$$\xi_1(x_0,x_1) = \begin{cases} -\dfrac{x_1}{x_0}, & \text{if } x_0 \neq 0 \\ 1, & \text{if } x_0 = 0 \end{cases},$$

$$N(x_0,x_1) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \neq 0 \\ 0, & \text{if } x_0 = 0 \end{cases}.$$

§ 5. 有限個の値をとる Effective Functions 次の事実は以下の議論の中で「本質的」である:

LEMMA 5.1. $\theta : D \longrightarrow R$ $(D \subset R^n)$ を有限個の値 $\{t_1, \cdots, t_s\}$ をとる関数とする．このとき次の条件は同値である：

(A) θ は effective.

(B) θ は semi-effective.

(C) $D_i = \theta^{-1}(t_i) \in \mathrm{SA}(R^n)$, $i = 1, \cdots, s$.

Proof 任意の $t \in R$ と任意の $S \subset R^l \times R$ について $S(t) \subset R^l$ を

$$S \cap (R^l \times \{t\}) = S(t) \times \{t\}$$

で定義する．このとき $(1_l \times \theta)^{-1}(S) = \bigcup_{i=1}^{s} S(t_i) \times \theta^{-1}(t_i)$ である．したがって

$$\begin{aligned} & (1_l \times \theta)^{-1}(S) \in \mathrm{SA}(R^l \times R^n) \\ \Longleftrightarrow\quad & S(t_i) \times \theta^{-1}(t_i) \in \mathrm{SA}(R^l \times R^n) \quad (\forall\ i) \\ \Longleftrightarrow\quad & \theta^{-1}(t_i) \in \mathrm{SA}(R^n) \quad (\forall\ i) \end{aligned}$$

□

したがって，LEMMA 5.1 の「系」（単純な裏返し）として

LEMMA 5.2. $D = \bigcup_{i=1}^{s} D_i$ $(D_i \in \mathrm{SA}(R^n))$ を s.a.s $D \in \mathrm{SA}(R^n)$ の finite s.a.s. partition とする（*cf*. LEMMA 4.1)．このとき，各 D_i 上で定数値をとる関数 $\theta : D \longrightarrow R$ は effective である．

§ 6. 多項式のグラフと根の分布

DEFINITION 6.1. ([C], Def., *p*.133) real closed field R の

要素の列

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_M$$

で与えられる区間列は

$$I_i \equiv (t_i, t_{i+1}) \quad (0 \leqq i \leqq M;\ t_0 = -\infty,\ t_{M+1} = +\infty)$$

と多項式 $p(T) \in R[T]$ を考える．ここで，多項式 $p(T)$ が各開区間 I_i の上で単調（増加／減少）であるとき，この $\{t_1<t_2<\cdots<t_M\}$ を $p(T)$ の１つの「グラフ」(a *graph* of $P(T)$) と呼ぶ．

$p(T)$ の１つのグラフの「細分」はまた $p(T)$ の１つのグラフであることに注意せよ．

LEMMA 6.1. 多項式 $p(T) \in R[T]$ に対して，$\{t_1<t_2<\cdots<t_M\}$ が方程式 $\frac{d}{dT}p(T) \equiv p'(T) = 0$ の R の中のすべての根を含んでいるとき，これは $p(T)$ の１つのグラフである．

DEFINITION 6.2. $\{t_1<t_2<\cdots<t_M\}$ を多項式 $p(T) \in R[T]$ の１つのグラフ（**DEF.6.1**）とする．このとき，「符号列」

$$[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}] \in \{-1, 0, +1\}^{k+2}$$

$$\varepsilon_i = \mathrm{sign}[p(t_i)], \quad i = 0, 1, \cdots, M, M+1$$

をグラフ $\{t_1<t_2<\cdots<t_M\}$ の「データ」(the *data* of graph) と言う．

LEMMA 6.2. 方程式 $p(T) = 0$ の R の中にある根の存在（分布）の状態はグラフのデータの「符号変化の位置」から判定できる．すなわち，上の記号のもとで

(A) $\varepsilon_i = 0$ ならば，t_i は $p(T) = 0$ の１つの根である．

(B) $(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = (-1, +1)$ or $(+1, -1)$ ならば，$p(T) = 0$ は区間 I_i にただ１個の根を持つ．

(C) それ以外の「場所」には $p(T) = 0$ の根は存在しない．

LEMMA 6.3.　多項式 $f(X;T) \in R[X_1,\cdots,X_m;T]$ が与えられているものとする．effective functions $\tau_i : R^m \longrightarrow R$, $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_M$, で，すべての $x \in R^m$ に対して

$$\tau_1(x) < \tau_2(x) < \cdots < \tau_M(x)$$

が $f(x;T)$ のグラフであるであるようなものが存在すれば，$f(x;T) = 0$ の R の中の根の総数 $N(x)$ を与える関数 $N : R^m \longrightarrow R$ は effective である．

Proof　関数 $\varepsilon_i(x) = \mathrm{sign}[f(x;\tau_i(x)]$ を考える．THEOREM 4.7 よりこれは effective である．一方 $f(x;T) = 0$ の 根の総数 $N(x)$ は LEMMA 6.2 より

$$N(x) = \#\{i \mid \varepsilon_i(x) = 0\} + \#\{i \mid \varepsilon_i(x)-\varepsilon_{i+1}(x) = \pm 2\}$$

で与えられる．したがって任意の $N_0 \in \mathrm{N}_0$ に対して

$$D(N_0) \equiv \{x \in R^m \mid N(x) = N_0\} \in \mathrm{SA}(R^m)$$

である．ゆえに LEMMA 5.2 より関数 N は effective である．　□

LEMMA 6.4.　$\{t_1<t_2<\cdots<t_M\}$ を多項式 $p(T) \in R[T]$ の1つのグラフ (DEF.6.1)，そして $\{\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_m\}$ を方程式 $p(T) = 0$ のすべて根の列とする．このとき，i $(0 \leq i \leq M)$ に対して k 番目の根 ξ_k についての条件

(1)　$t_i < \xi_k < t_{i+1}$

(2)　$\xi_k = t_i$

はそれぞれ "effective" である．

§ 7. THEOREM 4.8 = CONJECTURE 3.C の証明の準備　次の定義から始め

る：

DEFINITION 7.1.　任意の $n \in \mathrm{N}_0$ について多項式

$$p_n(C;T) \equiv C_0T^n+C_1T^{n-1}+\cdots+C_n$$

を *genric polynomial* (of degree n) と言う．またこれの T に関する形式的偏導関数を $p_n'(C;T) \equiv \frac{\partial}{\partial T}p_n(C;T) = nC_0T^{n-1}+(n-1)C_1T^{n-1}+\cdots+C_n$ で表わす．

NOTATION 7.1.　関数 $\theta : D \longrightarrow R$ $(D \subset R^n)$ が与えられているとき，任意の $d \in \mathrm{N}$, $\lambda \in \{-1,0,+1\}$ に対して

$$S(d;\theta;\lambda) \equiv \{(c,x) \in R^{d+1}\times D|\ \mathrm{sign}[p_d(c;\theta(x))] = \lambda\}$$

とおく．

次の PROP.7.1 は § 8 で与える「THEOREM 4.8 (CONJECTURE 3.C) の証明」の中で効果的に働く：

PROPOSITION 7.1.　関数 $\theta : D \longrightarrow R$ $(D \subset R^n)$ に対して，次の条件は同値である：

(A) θ は effective.

(B) $S(d;\theta;\lambda) \in \mathrm{SA}(R^{d+1}\times D)$, ($\forall\ d \in \mathrm{N}$ and $\forall\ \lambda \in \{-1,0,+1\}$).

Proof　(A)⟹(B):　$S = \{(c,t) \in R^{d+1}\times R|\ \mathrm{sign}[p_d(c;t)] = \lambda\}$ とおくと，

$$S \in \mathrm{SA}(R^{d+1}\times R),$$

そして

$$S(d;\theta;\lambda) = (1_{d+1}\times\theta)^{-1}(S)$$

であるから，θ が effective ならば $S(d;\theta;\lambda) \in \mathrm{SA}(R^n)$ である．　□

(B)⟹(A):　逆に θ が条件 (B) を満足していると仮定し，写像 $(1_l\times\theta)$: $R^l\times D \longrightarrow R^l\times R$ $(l \in \mathrm{N}_0)$ を考える．任意に与えられた多項式 $f(Z;Y) \in R[Z_1,\cdots,Z_l;Y]$ と符号 $\lambda \in \{-1,0,+1\}$ に対して

$$F = \{(z,y) \in R^l\times R \mid \mathrm{sign}[f(z;y)] = \lambda\}$$

とする．このとき任意の s.a.s. $S \in \mathrm{SA}(R^l\times R)$ は，<u>このような</u> F の「Bool 結合」で表わされる．また $(1_l\times\theta)^{-1}$ は「ブール代数の準同型写像」であるから，$(1_l\times\theta)^{-1}(S)$ は $(1_l\times\theta)^{-1}(F)$ の「Bool 結合」である．したがって θ が effective であることを示すには $(1_l\times\theta)^{-1}(F) \in \mathrm{SA}(R^l\times D)$ を証明すればよいことになる．ここで

$$f(Z;Y) = \sum_{i=0}^{d} c_i(Z)Y^{d-i}, \quad c_i(Z) \in R[Z]$$

と表わす．このとき，多項式写像

$$\gamma : R^l \longrightarrow R^{d+1}, \ \gamma(z) = (c_0(z),\cdots,c_d(z))$$

によって $F = (\gamma\times 1_1)^{-1}[\{(c,t) \mid \mathrm{sign}[p_d(c;t)] = \lambda\}]$ である．したがって可換な図形

$$\begin{tikzcd}
R^l\times D \arrow[r, "\gamma\times 1_D"] \arrow[d, "1_l\times\theta"'] & R^{d+1}\times R \arrow[d, "1_{d+1}\times\theta"] \\
R^l\times R \arrow[r, "\gamma\times 1_1"] & R^{d+1}\times R
\end{tikzcd}$$

より $(1_l\times\theta)^{-1}(F) = (\gamma\times 1_D)^{-1}[S(d;\theta;\lambda)]$ が得られる．ここで $\gamma\times 1_D$ は多項式写像であるから effective である (**LEMMA 4.3**)．したがって仮定 (B) より

$$(\gamma\times 1_D)^{-1}[S(d;\theta;\lambda)] \in \mathrm{SA}(R^l\times D)$$

$$\therefore\ (1_l\times\theta)^{-1}(F) \in \mathrm{SA}(R^l\times D)$$

となる. □

[注意] PROP. 7.1 (B) を満足する関数 $\theta : D \longrightarrow R$ ($D \subset R^n$) を [B] では *psemi-algebraic* と呼んでいる ([B], Def. A.3, *p*. 269). なおこの PROP. 7.1 の主張は [C] Lemma 1.1 (*p*. 133) そのものである. ただしそこの証明（説明？）は, 私には理解できない.

§ 8. THEOREM 4.8 (= CONJECTURE 3.C) の証明 THEOREM 4.8 の [注意] より, $f(X;T) = p_n(X;T)$ の場合に証明すればよい. n についての数学的帰納法で実行する. $n = 0$, 1 については EXAMPLES 4.1 より THEOREM 4.8 は成立している. そこで THEOREM 4.8 の主張は $n-1$ までについてはすでに成立しているものと仮定する.

[注意] $D = \{x \in R^{n+1} \mid x_0 = 0\}$ $(\equiv R^n) \in \mathrm{SA}(R^{n+1})$ の上では $\deg[p_n(x;T)] \leq n-1$ であるから, 帰納法の仮定より D の上では effective root functions の存在は保障されている. したがって

$$R_0^{n+1} = \{x \in R^{n+1} \mid x_0 \neq 0\}$$

とすると, LEMMA 4.1 より以下 R_0^{n+1} 上で定義されている "effective root functions" $\xi_i : R_0^{n+1} \longrightarrow R$ および "effective root number function" $N : R_0^{n+1} \longrightarrow R$ の存在を問題にすればよい.

(I) [$N : R_0^{n+1} \longrightarrow R$ の存在] これは LEMMA 6.3 の簡単な帰結であ

る．帰納法の仮定より $p_n'(x;T) = 0$ の root functions

$$\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n-1}$$

は $(nx_0,(n-1)x_1,\cdots,x_{n-1}) \in R_0^n$ についての effective functions である．このことから，方程式 $p_n(x;T) = 0$ の「根の個数関数」$N(x)$，$(x \in R_0^{n+1})$ は LEMMA 6.3 より effective であることがわかる．

(II) [root functionS $\xi = \xi_k$ が effective でること] 関数 ξ が PROP. 7.1 の条件

(B): $$S(d;\xi;\lambda) \in \mathrm{SA}(R^{d+1}\times R_0^{n+1}),$$

$$(\forall\ d \in \mathrm{N}_0,\quad \forall\ \lambda \in \{-1,0+1\})$$

を満たすことを示せばよい．もし $d \geqq n$ ならば，$p_d(C;T)$ を $p_n(X;T)$ で割って

$$p_d(C;T) = q(C,X;T)p_n(X;T)+r(C,X;T)$$

$$q(C,X;T),\ r(C,X;T) \in R[C,X,\frac{1}{X_0};T],$$

$$\deg_T[r(C,X;T)] < n,$$

とする．このとき

(*) $$S(d;\xi;\lambda)$$

$$\equiv \{(c,x) \in R^{d+1}\times R_0^{n+1};\ \mathrm{sign}[r(c,x;\xi(x))] = \lambda\}$$

である．また帰納法の仮定より，$r(c,x;T) = 0$ の root functions

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_m$$

は $R^{d+1}\times R_0^{n+1}$ の上の effective functions である．そこで

$$\pi\ :\ \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_M,\quad M = m+n-1$$

を effective functions τ_i, σ_j の1つの「順列型」(permitation type) とすると，この π を実現する $R^{d+1}\times R_0^{n+1}$ の部分集合

$$E(\pi) \equiv \{(c,x) \in R^{d+1}\times R_0^{n+1} \mid \pi(c,x)\}$$

はひとつの s.a.s. である．そして「順列型」π を動かすことで $R^{d+1}\times R_0^{n+1}$ の finite s.a.s. partition

$$R^{d+1}\times R_0^{n+1} = \cup_\pi E(\pi)$$

が得られる．したがって **LEMMA 4.1** よりξ が $E(\pi)$ 上で effective であることを示せばよい．

ここで $(c,x) \in E(\pi)$ を固定すると，$\pi(c,x)$ は $p_n(x;T)$ の1つのグラフである (**LEMMA 6.1**)．したがって各 i $(0 \leqq i \leqq M)$ ただし $u_0 = -\infty$, $u_{M+1} = +\infty$, について $p_n(x;T) = 0$ の k 番目の根 $\xi(x) = \xi_k(x)$ が

$$u_i(c,x) < \xi(x) < u_{i+1}(c,x),$$

$$or \qquad \xi(x) = u_i(c,x)$$

となる条件は "effective" である (**LEMMA 6.4**)．したがって $R^{d+1}\times R_0^{n+1}$ の s.a.s.

$$A_i(\pi) \equiv \{(c,x) \in E(\pi) \mid u_i(c,x) < \xi(x) < u_{i+1}(c,x)\}$$

$$B_i(\pi) \equiv \{(c,x) \in E(\pi) \mid \xi(x) = u_i(c,x)\}$$

による s.a.s. $E(\pi)$ の partition

$$E(\pi) = \bigcup_{i=0}^{M} \{A_i(\pi) \cup B_i(\pi)\}$$

が得られる．一方関数

$$\mathrm{sign}[r(c,x;\xi(x))], \quad (c,x) \in R^{d+1}\times R_0^{n+1}$$

はそれぞれの parts $A_i(\pi)$, $B_i(\pi)$ の上で "constant" であるから，集合

(*) $S(d;\xi;\lambda)$ は $A_i(\pi)$, $B_i(\pi)$ の有限和で表わせる．すなわち $S(d;\xi;\lambda) \in \mathrm{SA}(R^{d+1}\times R_0^{n+1})$ となる（！）． □

COROLLARY 8.1. ([B], Prop. A.6, p. 272)　写像 $\Theta : D \longrightarrow R^m$ について次は同値である：

(A)　Θ は effective.

(B)　Θ のグラフ $\Gamma(\Theta) \subset D\times R^m$ は semi-algebraic.

Proof　(A)$\Longrightarrow$(B):　$R^m\times R^m$ の対角線集合 $\Delta \equiv \{(y,y) \mid y \in R^m\}$ に対して

$$(\Theta\times 1_m)^{-1}(\Delta) = \{(x,y) \in D\times R^m \mid y = \Theta(x)\} = \Gamma(\Theta)$$

である．したがって Θ が effective であれば，$\Delta \in \mathrm{SA}(R^m\times R^m)$ であるから $\Gamma(\Theta) \in \mathrm{SA}(D\times R^m)$． □

(B)$\Longrightarrow$(A):　$\Gamma(\Theta) \in \mathrm{SA}(R^m\times R^l)$ と仮定する．このとき $S \in \mathrm{SA}(R^n\times R^l)$ に対して

$$(\Gamma(\Theta)\times R^l)\cap(R^n\times S) \in \mathrm{SA}(R^n\times R^m\times R^l)$$

である．そして射影 $\pi : R^n\times R^m\times R^l \longrightarrow R^n\times R^l$, $\pi(x,y,z) = (x,z)$ を考えると

$$(\Theta\times 1_m)^{-1}(S) = \pi[(\Gamma(\Theta)\times R^l)\cap(R^n\times S)]$$

となる．したがって「Tarski の定理」(THEOREM 1.A) より

$$(\Theta\times 1_m)^{-1}(S) \in \mathrm{SA}(R^n\times R^l)$$

となり Θ は effective. □