数理解析研究所講究録
927巻 1995年 104-115

中間述語論理と様相述語論理の Kripke semantics に関する完全性と不完全性について。

志村 立矢 (日本大学理工学部) (Tatsuya SHIMURA)
shimura@math.cst.nihon-u.ac.jp

1 はじめに

中間述語論理または様相述語論理の族のさまざまな性質を調べる手段として Kripke frame semantics を用いる方法がある。しかし、この方法が有効であるためには、考えている中間述語論理または様相述語論理の族の Kripke frame semantics に関する完全性を示す必要があることが多いであろう。

以下ではこの基本的な問題についての現状を中間述語論理について述べ、それに関連して様相論理 **S4** の最小述語拡大 **Q-S4** の拡張となる様相述語論理についても触れようと思う。

まず基本的な用語と定義をいくつか述べておく。

H で直観主義命題論理を表わす。また **J** が中間命題論理のとき、$\mathbf{J}_*$ で **J** の最小述語拡大を表わすことにする。

中間命題論理用の Kripke frame とは最小元を持つ順序集合 $\mathbf{M} = (M, \leq)$ のこととする。中間命題論理用の Kripke frame $\mathbf{M}$ 上の付値 $\models$ とは

$$a \models p,\ a \leq b \text{ ならば } b \models p$$

を満たすような $a \in M$ に命題変数の集合を対応させる写像のことである。中間命題論理用の Kripke frame $\mathbf{M} = (M, \leq)$ とその上の付値 $\models$ の組のことを中間命題論理用の Kripke model という。

中間述語論理の場合は Kripke frame を最小元を持つ順序集合 $\mathbf{M}$ と

$$a \leq b \text{ ならば } U(a) \subseteq U(b)$$

をみたす M を定義域とし集合を値とする関数 U の組 $(\mathbf{M}, U)$ と定義し，付値を

$$a \models p(c_1, c_2, \ldots, c_n),\ a \leq b \text{ ならば } b \models p(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

をみたす $a \in M$ と n 項述語記号 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に $U(a)^n$ の部分集合を対応させる写像のことと定義する。

命題論理用の Kripke model $(\mathbf{M}, \models)$ が与えられたとき，$a \in M$ で論理式 A が正しいということを A の構成に関する帰納法で定義し，$a \models A$ と記す。任意の $a \in M$ で A が正しいとき(これは M の最小元 0_M で A が正しいことと同じである) A は $(\mathbf{M}, \models)$ で正しいといい，任意の付値 $\models$ に対し，A が $(\mathbf{M}, \models)$ で正しいとき A は Kripke frame $\mathbf{M}$ で真であるという。

中間命題論理 $\mathbf{J}$ に属するすべての論理式が Kripke frame $\mathbf{M}$ で真のとき $\mathbf{J}$ は $\mathbf{M}$ で真であるという。

Kripke model $(\mathbf{M}, \models)$ が論理式の集合の組 (Γ, Δ) (これを theory と呼ぶ) のモデルであるということを「 $\mathbf{M}$ の最小元 0_M において Γ に属する全ての論理式が正しく Δ に属する全ての論理式が正しくない」により定義する。

また中間命題論理 $\mathbf{J}$ が与えられたとき theory (Γ, Δ) が $\mathbf{J}$ で無矛盾であるということを「任意の $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m \in \Gamma$ と $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in \Delta$ に対し，

$$\mathbf{J} \nvdash (\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_m) \supset (\delta_1 \vee \delta_2 \vee \cdots \vee \delta_n)$$

となる」により定義する。

中間命題論理 $\mathbf{J}$ が強完全であるとは任意の $\mathbf{J}$ で無矛盾な theory (Γ, Δ) に対し，$\mathbf{J}$ が真であるような Kripke frame $\mathbf{M}$ に適当な付値 $\models$ を定義して $(\mathbf{M}, \models)$ が (Γ, Δ) のモデルであるようにできることと定義する。

条件を弱めて theory を $(\emptyset, \{A\})$ という形のものだけに制限したとき $\mathbf{J}$ は完全であるという。

中間述語論理の場合も同様に完全性、強完全性などの概念を定義する。

2 命題論理の完全性

中間命題論理および様相命題論理の完全性については述語論理の場合に比べてはるかに多くのことがわかっている。これは、命題論理の場合は Lindenbaum algebra があるので代数的 semantics に関して完全であることがわかっていること、しかもある論理式が真ではないことを示すためにはその論理式に含まれる命題変数のみを含む論理式を考えればよいので、有限生成の代数 (擬ブール代数、位相ブール代数) に関して完全なことを用いることができるからである。(命題論理の強完全性を示すには無限生成の代数を対象にしなければならない)

それに対し述語論理の場合には、代数的 semantics に関して完全になるとは限らないし、ある論理式を否定するためには無限個の原子論理式を含む論理式の組を考えることが必要となり、対象として無限生成の代数が現れるので事情ははるかに複雑になる。

命題論理の完全性の証明方法は何通りか知られている。

- canonical model の方法
- subordinate frame の方法およびその変形
- filtration の方法およびその変形
- 代数的方法により、finite model property を持つことや locally tabular であること等を示す

はじめの 2 つは完全性だけでなく強完全性も証明しているが、あとの 2 つの方法では完全性しか導かない。これをたとえば canonical model の方法と filtration の方法について説明しておく。

J 上の極大無矛盾な theory (Γ_1, Δ_1), (Γ_2, Δ_2) には順序 $\leq$ を

$$(\Gamma_1, \Delta_1) \leq (\Gamma_2, \Delta_2) \Leftrightarrow \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$$

により定義できる。

J で無矛盾な theory (Γ, Δ) が与えられたとき、この順序で (Γ, Δ) より大きな theory 全体を Kripke frame と考え、canonical frame と呼ぶ。canonical frame に付値 $\models$ を $(\Gamma, \Delta) \models p \Leftrightarrow p \in \Gamma$ により定めるとこの Kripke model は (Γ, Δ) のモデルになることが証明できる。これを **J** の canonical model という。

そこで canonical frame において **J** が真であることが証明できれば **J** の完全性を示すことができる。この方法を canonical model の方法といい、canonical frame で真であるような命題論理のことを canonical と呼ぶ。

例 2.1 $\mathbf{J} = \mathbf{H} + \neg p \vee \neg\neg p$ とする。$\neg p \vee \neg\neg p$ が最小元をもつ Kripke frame $\mathbf{M}$ で真となるための必要十分条件は $\mathbf{M}$ が directed であること、すなわち任意の $u, v \in M$ に対し、$u, v \leq w$ となる $w \in M$ が存在することである。

さて $(\mathbf{M}, \models)$ が **J** の canonical model でありしかも canonical frame $\mathbf{M}$ で $\neg p \vee \neg\neg p$ が真ではないと仮定すると、$(\Gamma, \Delta) \leq (\Gamma_1, \Delta_1), (\Gamma_2, \Delta_2)$ を満たす $(\Gamma_1, \Delta_1), (\Gamma_2, \Delta_2) \in \mathbf{M}$ で $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \emptyset)$ が **J** で矛盾するものが存在することになる。(ここで Glivenko の定理を用いている。)

したがって $C_1 \in \Gamma_1$, $C_2 \in \Gamma_2$ で $\neg(C_1 \wedge C_2) \in \mathbf{J}$ となるものが存在するはずであるが **J** では de Morgan の法則が成り立つことより $\neg C_1 \vee \neg C_2 \in \mathbf{J}$ となる。もし、$\neg C_1 \in \Gamma$ ならば $(\Gamma, \Delta) \leq (\Gamma_1, \Delta_1)$ より $\neg C_1 \in \Gamma_1$ となり矛盾。$\neg C_2 \in \Gamma$ も $C_2 \in \Gamma_2$ に矛盾する。

ゆえに最初の仮定「 $\mathbf{M}$ が directed ではない」から矛盾が導かれた。

この例では $\neg p \vee \neg\neg p$ が真である Kripke frame は “directed” という順序集合の一階の理論の論理式が真となる Kripke frame と一致することを用いている。このような性質を持つ論理式を elementary といい、elementary な論理式で公理化できる論理を elementary という。elemantary で Kripke complete な論理は canonical であることが証明されている。

filtration の方法は強完全性は導かないが多くの場合 finite model property を導くので、対象とする論理の決定可能性が得られるという利点がある。

この方法では **J** で証明不能な論理式 A が与えられたとき、**J** の公理の instance 全体の集合を Γ としたとき $(\Gamma, \{A\})$ のモデル $(\mathbf{M}, \models)$ (あるいはその部分集合) 上の同値関係で、その同値関係で割った Kripke model で A が正しくないという性質を持ったままその frame では **J** が真となるようなものを定義するという方法である。

多くの場合、その同値関係は A の部分論理式 (これは命題論理なので有限個である) の集合を元にして定めることになる。

例 2.2 Gabbay-de=Jongh [8] は次の事実を selected filtration method と呼ばれる方法で証明した。

論理式

$$D_n = \bigwedge_{i=0}^{n}((p_i \supset \bigvee_{j \neq i} p_j) \supset \bigvee_{j \neq i} p_j) \supset \bigvee_{i=0}^{n} p_i$$

で公理化される論理は有限 n 分木全体で特徴付けられる。

注意すべきこととしてこの論理は強完全ではない。([25])

中間命題論理の完全性について知られている事実にはたとえば次のようなものがある。

定理 2.3 (McKay [15],Chagrova [1],Rodenburg [24],Zakharyashchev [42]) $\vee$ を含まない論理式で公理化可能な論理はすべて完全かつ *elementary* である。

定理 2.4 (Kuznetsov [16], 古森 [13]) **J** が有限スライスにある論理ならば **J** は完全である。

定理 2.5 (Shehtman [25]) 完全ではない中間命題論理が存在する。

3 中間述語論理の完全性

命題論理の完全性の証明を述語論理の場合に適用しようとするといくつかの困難があることがわかる。

まず代数的に完全であることに立脚した議論は用いることができない。また filtration の方法も否定すべき論理式の部分論理式は quantifier が存在するため一般には無限個あるのでうまくいかないことがわかる。これらのことは命題論理において完全性のみを証明する方法をそのまま述語論理の場合に適用することはできないということを意味しており、強完全な述語論理の命題論理部分はもちろん強完全であるから命題論理部分がたとえば Gabbay-de Jongh の n 分木の論理であるような中間述語論理の完全性を示す一般性のある方法が現時点では我々の手元にはないということである。

それに対し、subordinate frame を使う方法およびその変形と見られる方法は少数の具体的な論理にたいして適用できることがわかっている。([14, 22, 3, 41, 31, 2])

では canonical model の方法はどうであろうか。この場合述語論理を扱うことで問題となることは canonical model を構成していく際に言語を拡張していく必要があるということである。

まえに挙げた命題論理の場合 $\neg C_1 \vee \neg C_2 \in \Gamma$ であることを用いていた。述語論理の場合 C_1, C_2 は新たに付け加えた定数記号を含んでいる可能性があり、$\neg C_1 \vee \neg C_2$ という論理式は Γ を考えるときの言語の範囲外であることが起き得るのである。

言語の拡張は Kripke frame の各点 a での個体領域 $U(a)$ の拡張を意味している。そこでこの拡張が不要であるような論理に対しては canonical model の方法が適用できる可能性がある。これをはっきりと意識して述べたのが小野 [20] である。この中で constant domain の公理と呼ばれる論理式 $D = \forall x(p(x) \vee q) \supset \forall x p(x) \vee q$ を含む中間述語論理では canonical model の構成の際に定数記号の拡張が不要であることを意味する次の補題を証明した。

補題 3.1 (小野 [20]) 言語 $\mathcal{L}$ 上の *theory* (Γ, Δ) が $\mathbf{H}_* + D$ で無矛盾な *Henkin complete theory* であるとする。

1. $A \supset B \in \Delta$ ならば $(\Gamma \cup \{A\}, \{B\})$ の拡張であるような $\mathbf{H}_* + D$ で無矛盾な $\mathcal{L}$ 上の *Henkin complete theory* (Γ', Δ') が存在する。

2. $\neg A \in \Delta$ ならば $(\Gamma \cup \{A\}, \emptyset)$ の拡張であるような $\mathbf{H}_* + D$ で無矛盾な $\mathcal{L}$ 上の *Henkin complete theory* (Γ', Δ') が存在する。

3. $\forall x A(x) \in \Delta$ ならば $\mathcal{L}$ の定数記号 c と $(\Gamma_u, \{A(c)\})$ の拡張であるような $\mathbf{H}_* + D$ で無矛盾な $\mathcal{L}$ 上の *Henkin complete theory* (Γ', Δ') が存在する。

これからただちに次が導かれる。

定理 3.2 (Görnemann [12],Gabbay [5], 小野 [20]) $\mathbf{H}_* + D$ は強完全である。

また $\mathbf{H} + (p \supset q) \vee (q \supset p)$ が canonical であることに対応して次の定理などを証明している。

定理 3.3 (小野 [20]) $\mathbf{H}_* + D + (p \supset q) \vee (q \supset p)$ は強完全である。

この小野の方法を一般化し、Jankov や Zakharyashchev の理論 [42] と結び付けることにより次が示される。

定理 3.4 (志村 [28]) 中間命題論理 $\mathbf{J}$ が次の条件のいずれかを満たすならば、$\mathbf{J}_* + D$ は強完全である。

1. **J** は *tabular,*

2. **J** は *subframe logic (cf. [4]) (*これは ⊃ のみで公理化できる論理と一致する。*)*

しかしながら **J** に canonical model の方法が適用できるからといって $\mathbf{J}_* + D$ も常に適用可能というわけではない。

定理 3.5 (Shehtman-Skvortsov[26],Ghilardi [9]) $\mathbf{H}_*+\neg p\vee\neg\neg p+D$ は完全ではない。

これは既に次の事実が知られていたので驚くべき結果であろう。

定理 3.6 (Corsi-Ghilardi [3]) *1.* $\mathbf{H}_* + \neg p \vee \neg\neg p$ は完全である。

2. $\mathbf{H}_* + \neg p \vee \neg\neg p + K$ は完全である。

3. $\mathbf{H}_* + \neg p \vee \neg\neg p + K + D$ は完全である。

さらに次のことも知られている。

定理 3.7 (Skvortsov [32]) $\vee$ を含まない論理式で公理化可能な論理 **J** で $\mathbf{J}_* + K + D$ が完全でないものが存在する。

このようなことの起こる原因はいくつかある。

まず前の節での $\mathbf{H} + \neg p \vee \neg\neg p$ の完全性の証明では Glivenko の定理を用いていた。これは中間述語論理の場合は一般には成立せず K と呼ばれる公理が必要であることがわかっている。(梅沢 [39], Gabbay [7])

次に中間述語論理の canonical model は Henkin theory から作られるという事がある。Henkin theory とは $\exists x A(x) \in \Gamma$ ならばある個体定数記号 c に対し、$A(c) \in \Gamma$ となるような theory (Γ, Δ) のことである。ある theory は無矛盾であっても Henkin theory であるとはもちろん限らない。

canonical model のふたつの理論に共通の拡張が存在しないということは命題論理においては矛盾する論理式の存在を意味していたのだが述語論理の場合には矛盾する論理式の存在を意味しないということが完全性の証明が平行してできない理由となっている。

4 述語論理の不完全性

完全でない中間述語論理の存在は前の節での結果以前にも次のようなことが知られていた。まず不完全性に関する (多分) 最初の結果は次のものであろう。

定理 4.1 (小野-Rauszer [23]) E が恒真であるような *Kripke frame* は定領域である。したがって $\mathbf{H}_* + E$ は不完全である。

これは次の結果を元にしている。

補題 4.2 (梅沢 [40]) $E = \neg\neg\exists x A(x) \supset \exists x \neg\neg A(x)$ とする。このとき、

$$\mathbf{H}_* + E \not\vdash D$$

である。

この証明では代数的 semantics により E と D を分離しているので，系として Kripke frame による semantics は代数的 semantics よりも強くはないということがわかる。

これ以外の例としては、次のようなものもある。

定理 4.3 (古森 [14], 中村 [18]) $F = \exists x(p(x) \supset \forall y\ p(y))$, $G = \exists x(\exists y\ p(y) \supset p(x))$ としたとき、$\mathbf{H}_* + F$, $\mathbf{H}_* + G$ は不完全である。

この証明では F あるいは G のあらゆる instance が正しい Kripke model で正しくない論理式で F あるいは G が真であるような Kripke frame では真になるものを与えている。

ある論理式 A が中間述語論理 $\mathbf{L}$ で証明できないことを示すには原理的にはこの方法で可能であるが、Kripke model において $\mathbf{L}$ の公理の instance がすべて正しいことを確かめるのはそれ程簡単ではない。(たとえば、D の場合を考えてみよ)

これらの結果は単に E, F, G という公理がたちの悪いものであるというだけのことだという解釈もありうる。そこで次の問題を考えてみよう。

問題 1 $\mathbf{J}$ は *Kripke semantics* で完全な論理とする。$\mathbf{J}$ の最小述語拡大を $\mathbf{J}_*$ としたとき、

1. $\mathbf{J}_*$ は *Kripke semantics* に関し完全か。
2. $\mathbf{J}_* + K$ は *Kripke semantics* に関し完全か。
3. $\mathbf{J}_* + D$ は *Kripke semantics* に関し完全か。
4. $\mathbf{J}_* + K + D$ は *Kripke semantics* に関し完全か。

3. と 4. はすでに反例が存在することを示したので 1. についての結果を示そう。2. についても同様な反例があることが知られている。

定理 4.4 (小野 [20],Ghilardi [10]) $\mathbf{J}$ が有限スライスにあり、$\mathbf{J}_*$ が完全ならば $\mathbf{J}$ は古典論理である。

また別の中間命題論理のクラスに関しては次のことが知られている。

定理 4.5 (Ghilardi [10]) 中間命題論理 $\mathbf{J}$ が $\vee$ を用いずに公理化可能な論理で $\mathbf{J}_*$ が完全ならば $\mathbf{J}$ の定理で $\vee$ のない部分は古典論理、直観主義論理、$\mathbf{H}+(p\supset q)\vee(q\supset p)$, $\mathbf{H}+\neg p\vee\neg\neg p$ のいずれかと一致する。

これと前節の命題論理に関する完全性の結果を比較すれば，これはまったく予想外のことがおきていることがわかるであろう。

以上の結果を標語的にいうと,「自然に見える公理化をもつ中間述語論理の多くは Kripke 完全でない」ということになる。

逆に，単純な形をした Kripke frame の族で特徴づけられる中間述語論理の公理化については Skvortsov [30] の結果がある。これも標語的に述べると「自然な Kripke frame の族で特徴づけられる中間述語論理の多くは帰納的公理化不可能である」ということになる。

5 様相述語論理の不完全性

Shehtman-Skvortsov [26] および Ghilardi [10] は様相命題論理 **S4** の最小述語拡大 **Q-S4** の拡張についても不完全性を示している。その中で前節に述べた様相命題論理の最小述語拡大に関する結果としては次のようなものがある。

定理 5.1 (Ghilardi [10]) S4.1 を含む様相命題論理 $\mathbf{J}$ で最小述語拡大が *Kripke* 完全となるものは $\mathbf{J}=\mathbf{S4}+p\supset\Box p$ しかない。

定理 5.2 (Ghilardi [9]) S4.3 を真に含む様相命題論理 $\mathbf{J}$ の最小述語拡大が *Kripke* 完全となるならば $\mathbf{J}$ は **S5** を含む。

ここでも命題論理の最小述語拡大が Kripke 完全となるのは非常に希なことがわかるであろう。

6 Kripke frame semantics の拡張

前節までに述べた Kripke 不完全性についての結果であるが，このような結果を得るためにはある論理式が中間述語論理 $\mathbf{L}$ では証明できないにもかかわらず $\mathbf{L}$ が真である Kripke frame では真になってしまうことを示す必要がある。

このうち $\mathbf{L}$ では証明できないということを示すためには Kripke frame による semantics よりも弱くはない semantics を用いる必要があるであろう。小野-Rauszer [23] の場合は代数的 semantics を用い，古森 [14], 中村 [18] の場合は Kripke model を用いたのであるが，Shehtman-Skvortsv [26] と Ghilardi [9, 10] はそれぞれ Kirpke bundle semantics と C-set semantics という Kripke frame semantics の拡張となるような新しい semantics を与え，それにより不完全性を示している。

さらに，Shehtman-Skvortsov [27] はこれらの semantics を完全に含む Kripke metaframe による semantics を与えている。

しかし，このような新しい semantics によって単に Kripke frame semantics に関し完全でない論理の例が得られるだけではその semantics の有効性が十分に示されたとはいえないであろう。

これらの semantics により新たにどのような論理が完全であることが示されるのかということがその semantics の有効性を示す尺度の一つとなるはずである。

定理 6.1 (Ghilardi [11]) 中間命題論理 $\mathbf{J}$ が *canonical* ならばその最小述語拡大 $\mathbf{J}_*$ は *C-set semantics* に関し完全である。

定理 6.2 (Shehtman-Skvortsov [27]) 中間命題論理 $\mathbf{J}$ が *canonical* ならばその最小述語拡大 $\mathbf{J}_*$ および $\mathbf{J}_* + D$ は *Kripke metaframe semantics* に関しても *canonical* である。

定理 6.3 (Shehtman-Skvortsov [27]) 様相論理 **S4** の拡張 $\mathbf{J}$ が *canonical* ならばその最小述語拡大 **Q-J** および **Q-J** + *Barcan formula* は *Kripke metaframe semantics* に関しても *canonical* である。

この観点から言えばこれらの semantics はその複雑さと引き換えにある程度十分な強さを得ているといえる。

では Kripke bundle semantics はどうであろうか。これに関して，礒田は驚くべき単純なアイデアに基づく方法で Ghilardi [9, 10] の Kripke frame semantics に関する命題論理の最小述語拡大の不完全性の結果が全て Kripke bundle に対し拡張できることを示した。それに関しての詳細は彼女の講演にすべてを譲ることにする。

参考文献

[1] L. A. Chagrova, *On first-order definability of intuitionistic formulas with limitations on occurrences of connectives,* **Logical method of constructing effective algorithms** (M. I. Kanovich, editor), Kalininski Gosudarstvennyi Universtitet, Kalinin, (1986), 135-136. (Russian)

[2] G. Corsi, *Completeness theorem for Dummett's LC and quantified and some of its extensions,* **Studia Logica** 51 (1992), 317-355.

[3] G. Corsi, S. Ghilardi. *Direccted frames.* **Archive for Mathematical Logic,** 29, (1989), 53-67.

[4] K. Fine, *Logics containing K4 part II,* **Journal of Symbolic Logic** 50 (1985), pp. 619-651.

[5] D.M. Gabbay, *Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic,* **Synthese Library 148** Reidel, (1981).

[6] D.M. Gabbay, *Semantic proof of the Craig interpolation theorem for intuitionistic logic and extensions I, II,* in: **Logic Colloquium '69** (eds. Gandy, R. O. and Yates, C. M. E.), North-Holland, Amsterdam (1971), 391-401, 403-410.

[7] D.M. Gabbay, *Application of trees to intermediate logics,***Journal of symbolic logic** 37 (1972), 135-138.

[8] D.M. Gabbay, D.H. de Jongh, *Sequences of decidable and finitely axiomatizable intermediate logics with the disjunction property,* **Journal of Symbolic Logic** 39 (1974), pp. 67-79.

[9] S. Ghilardi, *Presheaf semantics and independence results for some non classical first order logics,* **Archive for Mathematical Logic**, 29 (1990), pp. 125-136.

[10] S. Ghilardi, *Incompleteness results in Kripke semantics,* **Journal of Symbolic Logic** 56(1991), 517-538.

[11] S. Ghilardi. *Quantified extensions of canonical propositional intermediate logics,* **Studia Logica** 51 (1992), 195-214.

[12] S. Görnemann, *A logic stronger than intuitionism,* **Journal of Symbolic Logic** 36 (1971), 249-261.

[13] Y. Komori, *The finite model property of the intermediate propositional logics on finite slices,* **Journal of Faculty of Science, University of Tokyo, Sec.I,** 22 (1975), pp. 117-120.

[14] Y. Komori, *Some results on the super-intuitionistic predicate logics,* **Reports on Mathematical Logic,** 15 (1983), 13-31.

[15] C.G. McKay, *The decidability of certain intermediate logics,* **Journal of Symbolic Logic** 33 (1968), pp. 258-264.

[16] A.V. Kuznetsov, *On superintuitionistic logics,* in **Proceedings of the International Congress of Mathematitians. Vancouver,** (1974), pp. 243-249.

[17] P. Minari, M. Takano, and H. Ono, *Intermediate predicate logics determined by ordinals,* **Journal of Symbolic Logic** 55 (1990), pp. 1099-1124.

[18] T. Nakamura, *Disjunction property for some intermediate predicate logics,* **Reports on Mathematical Logic** 15 (1983), 33-39.

[19] H. Ono, *A study of intermediate predicate logics,* **Publications RIMS, Kyoto University** 8 (1972-73), 619-649.

[20] H. Ono, *Model extension theorem and Craig's interpolation theorem for intermediate predicate logics,* **Reports on Mathematical Logic** 15 (1983), pp. 41-58.

[21] H. Ono, *Some problems on intermediate predicate logics,* **Reports on Mathematical Logic** 21 (1987), pp. 55-67.

[22] H. Ono, *On finite linear intermediate predicate logics,* **Studia Logica** 47 (1988), 391-399.

[23] H. Ono, C. Rauszer, *On algebraic and Kripke semantics for intermediate logics,* **Universal algebra and Application (Banach center publications, vol 9)** ,PWN-Polish scientific publishers, Warsaw, (1982).

[24] P. H. Rodenburg, *Intuitionistic correspondence theory,* Dissertation, Amsterdam, (1986).

[25] V.B. Shehtman *On incomplete propositional logics,* **Doklady Akademii Nauk SSSR** 235 (1977), 542-545. (English translation) **Soviet Mathematics, Doklady** 18 (1977), 985-989.

[26] V. Shehtman, D. Skvortsov, *Semantics of non-classical first-order predicate logics,* **Mathematical Logic** (ed. by P. P. Petkov), Plenum Press, New York and London, 1990 (Proc. of the summer school and conference on mathematical logic, Bulgaria, 1988), pp.105-116.

[27] V. Shehtman, D. Skvortsov, *Maximal Kripke-type semantics for modal and superintuitionistic predicate logics,* **Annals of Pure and Applied Logics** 63(1993), 69-101.

[28] T. Shimura, *Kripke completeness of some intermediate predicate logics with the axiom of constant domain and a variant of canonical formulas.* **Studia Logica** 52 (1993), 23-40.

[29] T. Shimura, N.-Y. Suzuki, *Some super-intuitionistic logics as the logical fragment of equational theories,* **Bulltin of the Section of Logic** 22 (1993), 106-112.

[30] D. Skvortsov, *On axiomatizbility of some intermediate predicate logics (summary),* **Reports on Mathematical Logic** 22 (1988), 115-116.

[31] D. Skvortsov, *On the predicate logic of finite Kripke frames,* **Studia Logica** 54 (1995), 79-88.

[32] D. Skvortsov, *On some Kripke complete and Kripke incomplete intermediate predicate logics,* preprint.

[33] N.-Y. Suzuki, *An extension of Ono's completeness result,* **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik** 36 (1990), pp. 365-366.

[34] N.-Y. Suzuki, *Some results on the Kripke-sheaf semantics for super-intuitionistic logics,* **Studia Logica** 52(1993) 79-94.

[35] M. Takano, *Ordered sets R and Q as basis for Kripke models,* **Studia Logica** 46 (1987), 137-148.

[36] M. Takano *A negative answer to Ono's first problem: K-completeness does not imply strong K-completeness,* **Reports on Mathematical Logic** 21 (1987), pp. 69-71.

[37] M. Takano, T. Yamakami *Classification fo intermediate predicate logics under the type of deductive completeness,* **Reports on Mathematical Logic** 24 (1990), pp. 17-23.

[38] R. H. Thomason, *On the strong semantical completeness of the intuitionistic predicate culculus,* **Journal of Symbolic Logic** 33 (1968), 1-7.

[39] T. Umezawa, *On some properties of intermediate logics,* **Proceedings of Japan Academy** 35 (1959), 575-577.

[40] T. Umezawa, *On logics intermediate between intuitionistic and classical predicate logic,* **Journal of Symbolic Logic** 24 (1959), 141-153.

[41] S. Yokota, *Axiomatization of the first-order intermediate logics of bounded Kripkean heights, I,* **Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik** 35 (1989), 414-421; *Axiomatization of the first-order intermediate logics of bounded Kripkean heights, II,* **Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik** 37 (1991), 17-26.

[42] M.V. Zakharyaschev, *Syntax and semantics of superintuitionistic logics,* **Algebra i Logika** 28 (1989), pp. 402-429. (English translation) **Algebra and Logic** 28 (1989), pp. 262-282.