数理解析研究所講究録
928 巻 1995 年 8-13

楕円型方程式の解の数値的検証法への Krawczyk 法の適用

山本　野人　　中尾　充宏
九州大学大学院　数理学研究科
(Nobito Yamamoto) (Mitsuhiro T. Nakao)

1. はじめに

本稿では、R^2の有界凸領域Ω上の非線形（準線形）楕円型方程式

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の数値的検証について Krawczyk 法を適用することが出来たので、これを報告する。

従来の方法は Schauder の不動点定理を用いていたが、ここでは Banach の不動点定理を用いるので、解の存在だけでなく近似解の近傍における一意性をも示すことができるようになった。

2. 従来の検証法の概要

まず非線形楕円型方程式 (1) の解の検証法をおおまかに述べておこう。

1. 有限要素法を用いて (1) の近似解 $\widehat{u}_h \in H_0^1(\Omega)$ を計算する。用いる有限要素空間を S_h （h はメッシュの大きさを表わすパラメータ）、$S_h^\perp$ をその直交補空間、P_h を $H_0^1(\Omega)$ から S_h への H_0^1-projection としておく。

2. 次を満たす $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ を考え、この $\bar{u}$ の周りに真の解 u を探すことにする。

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} &= f(\widehat{u}_h) & \text{in } \Omega, \\ \bar{u} &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

このとき、$\bar{u} = \widehat{u}_h + v_0$ と書け、$\widehat{u}_h \in S_h$, $v_0 \in S_h^\perp$ となることに注意。この v_0 は適当な方法を用いて norm 評価できる（[1] 参照)。

3. $u = \bar{u} + w$ とおいて、問題を残差 w についての不動点方程式の形に書く：$F(w) = (-\Delta)^{-1}(f(\bar{u}+w) - f(\widehat{u}_h))$ として、

$$w = F(w).$$

これは次のようにも書ける：

$$\begin{cases} P_h w &= P_h F(w) \\ (I - P_h) w &= (I - P_h) F(w) \end{cases}$$

4. 上式のうちの $P_h w = P_h F(w)$ のみに S_h 上の擬 Newton 法を用いる：すなわち、

$$\begin{aligned} P_h N(w) &= P_h w - [P_h - P_h A'(\hat{u}_h)]^{-1}(P_h w - P_h F(w)) \\ A'(\hat{u}_h) &= (-\triangle)^{-1} f'(\hat{u}_h) \end{aligned}$$

によって（ただし $'$ は Fréchet 微分で、$[P_h - P_h A'(\hat{u}_h)]^{-1}$ は S_h 上の逆作用素)、

$$w = P_h N(w) + (I - P_h)F(w) \quad =: \quad T(w)$$

とする。もちろん $w = T(w)$ ならば $w = F(w)$ である。

5. $T(W) = \{T(w)|w \in W\} \subset W$ となる $H_0^1(\Omega)$ の有界凸閉集合 W が見つかれば、Schauder の不動点定理によって $^{\exists}w \in T(W)$ s.t. $w = T(w)$ となる。$W = W_h \oplus W_h^{\perp}$, $W_h \subset S_h$, $W_h^{\perp} \subset S_h^{\perp}$ とおけば、検証条件は

$$\begin{cases} P_h N(W) & \subset \; W_h \\ (I - P_h)F(W) & \subset \; W_h^{\perp} \end{cases}$$

と書くことが出来る。このうち、$W_h^{\perp}$ に関する条件の検証には、$g \in L^2(\Omega)$ を右辺とする Poisson 方程式の解についての S_h の近似性を仮定し、これを利用する。すなわち、

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解 v について、

$$\|(I - P_h)v\|_{H_0^1} \le C_0 h \|g\|_{L^2}$$

が成り立つものとし、これより得られる

$$\|(I - P_h)F(w)\|_{H_0^1} \le C_0 h \|f(\bar{u} + w) - f(\hat{u}_h)\|_{L^2}$$

を用いる。ここに h は S_h のメッシュの大きさに関するパラメータで、C_0 は h に依らない定数である。

3. Krawczyk 作用素の定義と検証条件

ここでは、上記のような従来の検証条件のかわりに Krawczyk 作用素を用いた条件を採用する。まず $H_0^1(\Omega)$ におけるノルムを次のように定義する。

$w \in H_0^1(\Omega)$ を $w = w_h + w_h^\perp$ （$w_h = P_h w,\ w_h^\perp \in S_h^\perp$）と書く。$\psi_j, j = 1, \cdots, n$ を S_h の基底とすると、$w_h = \sum_{j=1}^{n} w_j \psi_j$ と表わせる。そこで w の t-norm を、

$$\|w\|_t \quad = \quad \max\{\max_j \frac{|w_j|}{t_j}, \frac{\|w_h^\perp\|_{H_0^1}}{t_{n+1}}\}$$

と定義する。ただし $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n, t_{n+1})$ は各成分が正の実数であるようなある固定されたベクトル、$\|\cdot\|_{H_0^1}$ は通常の H_0^1 ノルムである。t-norm は H_0^1 ノルムと同値であることに注意されたい。

検証を行なう集合 W を、このノルムを用いて表される超立方体に取ることにしよう。すなわち、ある正のベクトル $\bar{w} \in R^{n+1}$ によって

$$W \quad = \quad \{w \in H_0^1(\Omega) \quad | \quad \|w\|_{\bar{w}} \leq 1\} \qquad . \tag{2}$$

と定める。

さて、Krawczyk 作用素の定義をする前に、$T(w)$ の Fréchet 微分 $T'(w)$ を用いて $\{v = T'(w_1)w_2 \quad | \quad w_1, w_2 \in W\}$ を包含する集合 $T'(W)W$ を定義しよう。$T'(w)$ を S_h の基底 ψ_i および $S_h^\perp$ の元 β （$\|\beta\|_{H_0^1} = 1$）に作用させ、これを

$$\begin{aligned} T'(w)\psi_i \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} t'_{ij}(w)\psi_j + t'_{i,n+1}(w)\alpha_i \\ T'(w)\beta \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} t'_{n+1,j}(w;\beta)\psi_j + t'_{n+1,n+1}(w;\beta)\alpha_{n+1}(\beta) \end{aligned}$$

と表わす。ただし $\alpha_i \in S_h^\perp$ で $\|\alpha_i\|_{H_0^1} = 1$ とする（$i = n+1$ のときは β に依存する)。これより $(n+1) \times (n+1)$ 行列 $\widetilde{T'}(W)$ を

$$\begin{aligned} (\widetilde{T'}(W))_{ij} \quad &= \quad \sup_{w \in W} |t'_{ij}(w)| \\ (\widetilde{T'}(W))_{n+1,j} \quad &= \quad \sup_{w \in W} \sup_{\|\beta\|=1} |t'_{n+1,j}(w;\beta)| \end{aligned}$$

で定め、ベクトル $\bar{t}' = \widetilde{T'}(W)\bar{w} > 0$ を用いて

$$T'(W)W \quad = \quad \{v \in H_0^1(\Omega) \quad | \quad \|v\|_{\bar{t}'} \leq 1\}$$

と定義する。この集合は $\bar{t}'$-norm の意味での超立方体となっている。また作用素 $T'(W)$ の $\bar{w}$-norm を $\|T'(W)\|_{\bar{w}} = \|\bar{t}'\|_{\bar{w}}$ で与える。ただし実際の計算

では、ここで現れる行列 $\widetilde{T'}(W)$ を要素ごとに定めるわけではないことを注意しておく。

では、Krawczyk 作用素の定義をしよう。

定義

$$K(W) \;=\; \widehat{T}(0) + T'(W)W.$$

すなわち $H_0^1(\Omega)$ の部分集合に対する作用素である。$\widehat{T}(0)$ は $T(0)$ を含み、また原点 0 を内部に含む集合として定める。このような $\widehat{T}(0)$ をもちいるのは、$T(0)$ の無限次元部分がノルム評価の形でしか与えられず、有限次元部分 $P_hN(0) = [P_h - P_hA'(\widehat{u}_h)]^{-1}P_hF(0)$ についても $F(0) = (-\Delta)^{-1}(f(\widehat{u}_h + v_0) - f(\widehat{u}_h))$ がノルムの評価しかわかっていない関数 v_0 を含むためである。

Krawczyk 作用素を用いた検証条件は次の定理で述べられる。

定理

(2) で定められる集合 W に対して、$K(W) \subset W$ が成り立つならば、$w = T(w)$ の W において一意な解が $K(W)$ の中に存在する。

証明には Banach の不動点定理を用いる。すなわち

1. $T(W) \subset W$
2. $\exists k < 1 s.t. \|T(w_1) - T(w_2)\|_{\bar{w}} \le \|w_1 - w_2\|_{\bar{w}} \qquad \forall w_1, w_2 \in W$

を示す。

1 を言うには $T(W) \subset K(W)$ を示せば十分であるが、これは

$$\begin{aligned} \|T(w) - T(0)\|_{\bar{t'}} &\le \sup_{s\in[0,1]} \|T'(sw)w\|_{\bar{t'}} \\ &\le 1 \qquad \forall w \in W \end{aligned}$$

より得られる。

また縮小写像であることを示すには、まず $\widehat{T}(0) + T'(W)W \subset W$ と $\widehat{T}(0)$ が 0 を内部に含むことから、ある $k < 1$ があって、

$$\|T'(W)W\|_{\bar{w}} \;\le\; k$$

となることを言う。$\|T'(W)W\|_{\bar{w}} = \|\bar{t'}\|_{\bar{w}} = \|T'(W)\|_{\bar{w}}$ であるから、このことと $\|T'(W)w\|_{\bar{w}} = \sup_{w'\in W} \|T'(w')w\|_{\bar{w}}$ の評価

$$\|T'(W)w\|_{\bar{w}} \;\le\; \|T'(W)\|_{\bar{w}}\|w\|_{\bar{w}} \qquad \forall w \in W$$

を利用して、2 を証明する。

集合の包含関係は

$$K(W) \subset W \iff \|K(W)\|_{\bar{w}} \leq 1$$

によって見ることが出来る。また集合 W を定めるには、従来の δ-inflation を用いる方法のほかに、例えば $W = (1+\delta)T(0)$ あるいは $W = T(0) + (1+\delta)T'(T(0))T(0)$ などとおいて δ を特定せずに計算を行い、検証条件を δ に関する条件式に帰着させてこれを定める方法などが考えられる。

4. 計算例

ここでは具体的な計算例として、Emden 型の方程式を扱う。

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

領域 Ω は $(0,1) \times (0,1)$ の正方形に取る。

まず **1.** で述べた検証法の手順に従って近似解 $\hat{u}_h$ の計算および v_0 のノルムの評価を行なった。用いた有限要素は正方形一様メッシュ上の二次要素である（この場合定数 C_0 は 2π に取ることができる）。残差 w の方程式は、

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} -\Delta w = (\hat{u}_h + v_0 + w)^2 - \hat{u}_h^2 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

となる。これより作用素 $T(w)$ を定め、さらに集合 $\hat{T}(0)$ を決める。以下、

1. $W = \hat{T}(0)$ として $K(W)$ を算定し、検証条件 $K(W) \subset W$ をチェックする。条件が満たされなければ、
2. 予め定めておいた小さな定数 δ と $K(W) = \{w \in H_0^1(\Omega) |\ \ \|w\|_{\bar{w}'} \leq 1\}$ を定める $\bar{w}'$ とを用いて

$$\bar{w} = (1+\delta)\bar{w}'$$

   と定め直し、この $\bar{w}$ によってあらたに集合 W を決定する。
3. $K(W)$ を算定し、検証条件 $K(W) \subset W$ をチェックする。条件が満たされなければ、2 に戻る。

の手順で検証を行なった。

結果は次のとおりである。

分割数 30 （$h = 1/30$, $n = 3721$）で (4) の真の解を包含する集合

$$W = \{w \in H_0^1(\Omega) |\ \ \|w\|_{\bar{w}} \leq 1\}$$

および

$$K(W) = \{w \in H_0^1(\Omega) | \ \|w\|_{\bar{w}'} \leq 1\}$$

が得られた。$\bar{w} = (\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_n, \bar{w}_{n+1})$ および $\bar{w}' = (\bar{w}'_1, \cdots, \bar{w}'_n, \bar{w}'_{n+1})$ の大きさの目安は、有限次元部分については

$$\max_{1 \leq k \leq n} \bar{w}_k = 6.79326509 \times 10^{-2}$$
$$\max_{1 \leq k \leq n} \bar{w}'_k = 6.54302936 \times 10^{-2}$$

無限次元部分については

$$\bar{w}_{n+1} = 1.83711527 \times 10^{-2}$$
$$\bar{w}'_{n+1} = 1.29737167 \times 10^{-2}$$

であった。これより (3) の真の解は $\hat{u}_h + v_0 + K(W)$ の中に存在し、$\hat{u}_h + v_0 + W$ の範囲で一意であることが結論づけられる。ただし以上の計算はすべて倍精度浮動小数点演算を用いて行ない、これに伴う丸め誤差の影響は考慮していない。

References

[1] Yamamoto,N., Nakao, M.T. Numerical verifications for solutions to elliptic equations using residual iterations with higher order finite element, to appear in Journal of Computational and Applied Mathematics.
[2] 山本野人、原雅文、中尾充宏. 楕円型方程式の解の数値的検証法における簡便法について 応用数学合同研究集会報告集. 1994