数理解析研究所講究録
931巻 1995年 45-69

Painlevé 系の初期値空間について

神戸大学　高野恭一
(TAKANO, Kyoichi)

§1. 序

もう２０年程前のことになるが、岡本和夫さんが各 Painlevé 方程式 P_J に対して、解の舞台ともいうべき良い性質を持つ fiber 空間 $\mathcal{P}_J = (E_J, \pi_J, B_J)$ を構成した ([7])。各 fiber $E_J(t) = {\pi_J}^{-1}(t)$ $(t \in B_J)$ は P_J の解全体を過不足なく parametrize するので、岡本さんはそれを初期空間 (espaces des conditions initiales) と呼んだ ([7],[9])。ここで B_J は複素射影直線 $\mathbf{P}$ から有限個の動かない特異点を除いた領域を表す。当時はまだ P_J が多項式型の Hamilton 系 (H_J) と同値であることが認識されていなかったので、岡本さんは、P_J と同値な定数倍を除いて (H_J) と同じである１階２連立微分方程式を求めておいてから、fiber 空間 $\mathcal{P}_J$ を構成したのであった。少し後に見つけられた Hamilton 系 (H_J) は第 J Painlevé 系と呼ばれている。fiber 空間 $\mathcal{P}_J$ の全空間 E_J には適当は名前がついていないので、ここでは Painlevé 系 (H_J) の定義空間とでも呼んでおく。また初期空間も、私の耳には初期値空間と聞こえていてそれに慣れてしまったので、ここでは初期値空間ということにする。（木村弘信さんが数学の論説 [4] で Garnier 系の初期値空間といっていたからかもしれない。かつて木村俊房先生は相空間 (phase space) がよいと言っておられた。）名前が定まっていないのは不便なので、岡本さんか誰か E_J をこめて適当な命名をしてくれると有り難い。

Painlevé 方程式 P_J あるいは Painlevé 系 (H_J) についてはその後多くの注目すべき研究があった。この研究集会で連続講演が行なわれている、竹井さんや河合さん達による漸近解析のように現在進行中のものもある。誰かが新しい切り口を見いだして流行の波を作り、しばらくしてその波が引くという過程を繰り返すとしても、Painlevé 方程式の研究は２１世紀になってもずっと続くと思われる。この魅力ある対象には、まだ知られていない深い性質が沢山あるように思われるからである。

私は、P. Painlevé が今日 Painlevé 方程式と言われるものを見い出す大変な計算をした動機が新しい超越関数を求めることにあったのだから、Painlevé 方程式の研究は Painlevé 関数（Painlevé 方程式の解）の関数としての研究でなければならないという狭い考えにとらわれつつ、Painlevé 関数の動かない特異点の研究をしばらくしていた ([11],[12])。もちろん岡本さんが見つけた Painlevé 系 (H_J) の持つうまい性質を利用してである。かなりうまくいったとは思っているが、方程式が非線形であるので線形の場合とは異なり、このような局所的な問題にも完全な解答は与えられなかった。これは始めから分かっていることで、局所的な問題にさらに局所的な解答しか与えられない。動く極の存在が問題なのである。Painlevé 系 (H_J) の解 $(x(t), y(t))$ に対して関数 $x(t)$ や $y(t)$ は極を持ちうるので、(H_J) をそれが定義されている空間 $\mathbf{C}^2 \times B_J \ni (x, y, t)$ においてのみ考えていては不十分なのである。岡本さんが構成したここでいうところの定義空間 E_J において考えなければならない。我々は解の振る舞いを見ようというのだから、E_J を適当な開集合で覆い、各開集合に適当な座標を導入し、その座標を用いて Painlevé 系 (H_J) をきちんと書き表す必要がある。しかし連立微分方程式の座標変換を具体的に実行するのは大変であるし、ただ複雑な式を書き下してもみても意味がない。出発点である (H_J) が簡単な形をした Hamilton 系であるのだから、座標変換が symplectic になるように、そして各座標近傍で (H_J) が簡単な Hamilton 系になるようにしたい。こういう訳で岡本さんの論文 [7] を読み返すことにした。始めにも述べたように [7] が書かれた当時はまだ Painlevé 系 (H_J) が知られていなかったので、(H_J) に合わせて [7] と同様な計算をしてみた。この話をするとよく聞かれるのであらかじめ注意しておくが、定義空間 E_J は微分方程式の変換を丹念に計算しながら構成するのである。

定義空間 E_J をどう構成するかをごく簡単に述べておこう。まず $\mathbf{C}^2$ の minimal compactification $\overline{\Sigma}_\epsilon$ をとる。これは parameter ϵ に依存し、ϵ は (H_J) に含まれる定数に依存する。次に、自明な fiber 空間 $\overline{\Sigma}_\epsilon \times B_J$ の各 fiber $\overline{\Sigma}_\epsilon \times t\ (t \in B_J)$ ごとに有限回モノイダル変換を繰り返してコンパクトな 2 次元複素多様体 $\overline{E_J(t)}$ を得る。そして $\overline{E}_J = \cup_{t \in B_J} \times t$

と定義する。ここが本質的な部分である。Hamilton 系 (H_J) を変数 x, y, t に対する Pfaff 系とみて、これが定める foliation を注意深く観察しながら、モノイダル変換を行なっていくのである。最後に各 $\overline{E_J(t)}$ から vertical leaves (ある fiber に含まれる leaf を vertical leaf という) と foliation の特異点を除いて非コンパクトな 2 次元複素多様体 $E_J(t)$ を得て、$E_J = \cup_{t\in B_J} E_J(t) \times t$ と定義する。

第 VI Painlevé 系の定義空間 E_{VI} の計算は比較的簡単で、E_{VI} は $\mathbf{C}^2 \times B_{VI}$ の 6 個のコピーを簡単な birational かつ symplectic な関係式で貼り合わせたものであることが分かる。しかも各チャート $\mathbf{C}^2 \times B_{VI} = V(*) \times B_{VI} \ni (x(*), y(*), t)$ において、Hamiltonian が $x(*)$ と $y(*)$ の多項式となる。これが数年前のことであった。しめしめと思って第 V Painlevé 系 (H_V) の定義空間 E_V の考察に進んだところ、なかなか座標変換が symplectic にならない。しばらく諦めて放っておいたのであるが、昨年 Strasbourg の Gérard 氏のところに行く機会を得て、やはりそこに滞在していた岩崎克則さんと久しぶりに数学的な時を過ごした折、単に逆数をとるという変換を途中に挟めば symplectic になることに、しかも各チャートで (その座標を $(x(*), y(*), t)$ とすると)Hamiltonian が $x(*)$ と $y(*)$ の多項式になることに気付いた。他の E_J については帰国してから神戸大学の院生（保野君と松宮君）にしてもらった ([6])。ただし E_I はまだ出来ていない。これが第 1 の主張である。

第 2 の主張に移ろう。岡本さんの論文 [7] の解説でもある "数学" の論説 [9] の最後の方に（また木村さんの論説 [4] にも命題 6.1 として引用されているが）細かい条件を抜きにしかも大雑把にいうと、各 E_J の上で定義される微分方程式は Painlevé 方程式 P_J に限る、ということが述べられている。（正確には $\overline{E}_J$ におけるある条件を仮定する。）我々は定義空間 E_J の簡単な記述を得たのであるから、この主張も容易に確かめられそうである。そこでやはり神戸大学院生の塩田君と、手始めに、E_{VI} 上で正則な Hamilton 系がどのような条件の下で Painlevé 系 (H_{VI}) から決まる Hamilton 系と一致するかを調べることにした。

空間 E_{VI} は 6 個の $\mathbf{C}^2 \times B_{VI}$ のコピー $V(*) \times B_{VI}$ の貼り合わせであるが、$V(00) \times B_{VI}$ を (H_{VI}) が定義されている座標近傍とし、座標

$(x(00), y(00), t)$ を簡単のために (x, y, t) と書く。理由はないが試みに、$V(00) \times B_{VI}$ 上で定義される正則な Hamiltonian $K(x, y, t)$ が x と y の多項式でその係数は単に B_{VI} 上の正則関数とする。これが他のチャート $V(*) \times B_{VI}$ においても正則であるという条件は x と y の多項式 K の係数に対する連立 1 次方程式として表される。これを解いて $K = H_{VI}$ を言いたい。Hamiltonian H_{VI} が y については 2 次以下、x については 3 次以下であるので、まずこの条件の下で連立 1 次方程式を塩田君に解いてもらうことにした。上に述べたように私は Painlevé 系の動かない特異点の研究をしたことがあり、その場面では動かない特異点が方程式の 1 位の極であるか 2 位以上の極であるかは大違いであったので、動かない特異点 $t = 0, 1, \infty$ に関する何らかの条件なしには、連立 1 次方程式の解は唯一つに定まらないと予想していた。どのような条件を付けるかは塩田君の計算結果を見てから考える積もりだった。しかし予期に反して彼は解が唯一つに決まるという結果を持って来た。連立 1 次方程式が一意的に解けて $K = H_{VI}$ になるのである。これは我々の E_{VI} の表し方に間違いがなかったことも意味する。昨年の秋のことであった。それではという訳で、多項式の次数に関する条件なしで $K = H_{VI}$ を共同で示すことにした。2 項係数を成分にもつ行列の行列式の計算に苦労したが、昨年の暮れに、多項式という範囲では正しいことを確かめた。連立 1 次方程式を解きさえすればよいというのは、ある意味で感動的であった。ここまで来ると多項式などという条件は除きたくなる。空間 E_{VI} 上で正則な Hamilton 系は (H_{VI}) から決まるものに限るということを示したくなる。これが言えれば、Painlevé 系 (H_{VI}) はその定義空間 E_{VI} によって完全に規定されるということになり、(H_{VI}) の大域解析は定義空間 E_{VI} の本質的には各 fiber $E_{VI}(t)$ の幾何学に帰着すると言えることになる。現在はそこまでは言えていなくて、E_{VI} 上で正則で $\overline{E}_{VI}$ まで有理的に拡張されるならば $K = H_{VI}$ ということまでは確かめた。この有理的に拡張されるという仮定は、各 $t \in B_{VI}$ に対して、$E_{VI}(t)$ 上の正則関数は必ず $\overline{E}_{VI}(t)$ 上にまで有理的に拡張されるという命題が正しければ、除くことが出来る。

なおここに述べた (H_{VI}) の特徴付は、他の $J = V, IV, III, II$ に

対しても成り立つことが、松宮君によって確かめられた。

以下、上に述べた2つの話を具体的に展開しよう。第2の主張の $J = VI$ の場合の証明も与える。

§2. Painlevé 系の定義空間の記述と Painlevé 系の特徴付け

Painlevé 系 (H_J) とは次で与えられる H_J を H amiltonian とする Hamilton 系 (Hamilton の正準方程式)

$$(H_J) \qquad dx/dt = \partial H_J/\partial y, \qquad dy/dt = -\partial H_J/\partial x$$

のことをいう：

$$\begin{aligned}
H_{VI}(x,y,t) =& \frac{1}{t(t-1)}[x(x-1)(x-t)y^2 - \{\kappa_0(x-1)(x-t) \\
&+ \kappa_1 x(x-t) + (\kappa_t - 1)x(x-1)\}y + \kappa(x-t)], \\
&\kappa = \frac{1}{4}\{(\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_t - 1)^2 - \kappa_\infty^2\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_V(x,y,t) =& \frac{1}{t}[x(x-1)^2 y^2 - \{\kappa_0(x-1)^2 \\
&+ \kappa_t x(x-1) - \eta t x\}y + \kappa(x-1)], \\
&\kappa = \frac{1}{4}\{(\kappa_0 + \kappa_t)^2 - \kappa_\infty^2\}; \\
H_{IV}(x,y,t) =& 2xy^2 - \{x^2 + 2tx + 2\kappa_0\}y + \kappa_\infty x; \\
H_{III}(x,y,t) =& \frac{1}{t}[2x^2y^2 - \{2\eta_\infty t x^2 \\
&+ (2\kappa_0 + 1)x - 2\eta_0 t\}y + \eta_\infty(\kappa_0 + \kappa_\infty)tx]; \\
H_{II}(x,y,t) =& \frac{1}{2}y^2 - (x^2 + \frac{t}{2})y - (\alpha + \frac{1}{2})x.
\end{aligned}$$

ここで x, y, t は複素変数、その他の文字は複素定数を表す ([2] を参照)。各 (H_J) から変数 y を消去すると (H_J が y の2次式であるので消去は簡単に出来る)、変数 x についての2階非線形微分方程式が得られる。それがまさに Painlevé の微分方程式 P_J なのである。

第1の主張を定理の形で述べる。5つの定理に分けないでひとつの定理としたので3ページにわたる。

定理 1. Painlevé 系 (H_J) の定義空間 E_J は次のように記述される $(J = VI, V, IV, III, II)$。

(i) 定義空間 E_{VI} は 6 個の $\mathbf{C}^2 \times B_{VI}$ のコピー

$$V(00) \times B_{VI} = \mathbf{C}^2 \times B_{VI} \ni (x, y, t) = (x(00), y(00), t),$$
$$V(0\infty) \times B_{VI} = \mathbf{C}^2 \times B_{VI} \ni (x(0\infty), y(0\infty), t),$$
$$V(1\infty) \times B_{VI} = \mathbf{C}^2 \times B_{VI} \ni (x(1\infty), y(1\infty), t),$$
$$V(t\infty) \times B_{VI} = \mathbf{C}^2 \times B_{VI} \ni (x(t\infty), y(t\infty), t),$$
$$V(\infty0+) \times B_{VI} = \mathbf{C}^2 \times B_{VI}F \ni (x(\infty0+), y(\infty0+), t),$$
$$V(\infty0-) \times B_{VI} = \mathbf{C}^2 \times B_{VI} \ni (x(\infty0-), y(\infty0-), t),$$

を次の symplectic な関係式により貼り合わせたものである：

$$x(00) = y(0\infty)(\kappa_0 - x(0\infty)y(0\infty)), \quad y(00) = 1/y(0\infty),$$

$$x(00) = 1 + y(1\infty)(\kappa_1 - x(1\infty)y(1\infty)), \quad y(00) = 1/y(1\infty),$$

$$x(00) = t + y(t\infty)(\kappa_t - x(t\infty)y(t\infty)), \quad y(00) = 1/y(t\infty),$$

$$x(00) = 1/x(\infty0+),\ y(00) = x(\infty0+)(\epsilon(+) - x(\infty0+)y(\infty0+)),$$

$$x(\infty0+) = y(\infty0-)(\kappa_\infty - x(\infty0-)y(\infty0-)),\ y(\infty0+) = 1/y(\infty0-).$$

ここで

$$B_{VI} = \mathbf{C} - \{0, 1\},$$

$$\epsilon(\pm) = (\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_t - 1 \pm \kappa_\infty)/2.$$

(ii) 定義空間 E_V は 5 個の $\mathbf{C}^2 \times B_V$ のコピー

$$V(00) \times B_V = \mathbf{C}^2 \times B_V \ni (x, y, t) = (x(00), y(00), t),$$
$$V(0\infty) \times B_V = \mathbf{C}^2 \times B_V \ni (x(0\infty), y(0\infty), t),$$
$$V(1\infty) \times B_V = \mathbf{C}^2 \times B_V \ni (x(1\infty), y(1\infty), t),$$
$$V(\infty0+) \times B_V = \mathbf{C}^2 \times B_V \ni (x(\infty0+), y(\infty0+), t),$$
$$V(\infty0-) \times B_V = \mathbf{C}^2 \times B_V \ni (x(\infty0-), y(\infty0-), t),$$

を次の symplectic な関係式により貼り合わせたものである：

$$x(00)=y(0\infty)(\kappa_0-x(0\infty)y(0\infty)),\quad y(00)=1/y(0\infty),$$

$$x(00)=1+x(1\infty),\quad y(00)=-\frac{\eta t}{x(1\infty)^2}+\frac{\kappa_t+1}{x(1\infty)}+y(1\infty),$$

$$x(00)=1/x(\infty 0+),\quad y(00)=x(\infty 0+)(\epsilon(+)-x(\infty 0+)y(\infty 0+)),$$

$$x(\infty 0+)=y(\infty 0-)(\kappa_\infty-x(\infty 0-)y(\infty 0-)),\quad y(\infty 0+)=1/y(\infty 0-).$$

ここで

$$B_V=\mathbf{C}-\{0\},$$

$$\epsilon(\pm)=(\kappa_0+\kappa_t\pm\kappa_\infty)/2.$$

(iii)　定義空間 E_{IV} は 4 個の $\mathbf{C}^2\times B_{IV}$ のコピー

$$V(00)\times B_{IV}=\mathbf{C}^2\times B_{IV}\ni(x,y,t)=(x(00),y(00),t),$$

$$V(0\infty)\times B_{IV}=\mathbf{C}^2\times B_{IV}\ni(x(0\infty),y(0\infty),t),$$

$$V(\infty 0)\times B_{IV}=\mathbf{C}^2\times B_{IV}\ni(x(\infty 0),y(\infty 0),t),$$

$$V(\infty\infty)\times B_{IV}=\mathbf{C}^2\times B_{IV}\ni(x(\infty\infty),y(\infty\infty),t),$$

を次の symplectic な関係式により貼り合わせたものである：

$$x(00)=x(0\infty),\quad y(00)=\frac{\kappa_0}{x(0\infty)}+y(0\infty),$$

$$x(00)=1/x(\infty 0),\quad y(00)=x(\infty 0)(\kappa_\infty-x(\infty 0)y(\infty 0)),$$

$$x(\infty 0)=x(\infty\infty),\ y(\infty 0)=\frac{-1/2}{x(\infty\infty)^3}+\frac{-t}{x(\infty\infty)^2}+\frac{2\kappa_\infty-\kappa_0+1}{x(\infty\infty)}+y(\infty\infty).$$

ここで

$$B_{IV}=\mathbf{C}.$$

(iv)　定義空間 E_{III} は 4 個の $\mathbf{C}^2\times B_{III}$ のコピー

$$V(00)\times B_{III}=\mathbf{C}^2\times B_{III}\ni(x,y,t)=(x(00),y(00),t),$$

$$V(0\infty)\times B_{III}=\mathbf{C}^2\times B_{III}\ni(x(0\infty),y(0\infty),t),$$

$$V(\infty 0)\times B_{III}=\mathbf{C}^2\times B_{III}\ni(x(\infty 0),y(\infty 0),t),$$

$$V(\infty\eta_\infty t)\times B_{III}=\mathbf{C}^2\times B_{III}\ni(x(\infty\eta_\infty t),y(\infty\eta_\infty t),t),$$

を次の symplectic な関係式により貼り合わせたものである：

$$x(00) = x(0\infty), \quad y(00) = \frac{-\eta_0 t}{x(0\infty)^2} + \frac{\kappa_0 + 1}{x(0\infty)} + y(0\infty),$$

$$x(00) = 1/x(\infty 0), \quad y(00) = x(\infty 0)(\epsilon - x(\infty 0)y(\infty 0)),$$

$$x(\infty 0) = x(\infty \eta_\infty t), \quad y(\infty 0) = \frac{-\eta_\infty t}{x(\infty \eta_\infty t)^2} + \frac{\kappa_\infty}{x(\infty \eta_\infty t)} + y(\infty \eta_\infty t).$$

ここで

$$B_{III} = \mathbf{C} - \{0\},$$

$$\epsilon = (\kappa_0 + \kappa_\infty)/2.$$

(v) 定義空間 E_{II} は 3 個の $\mathbf{C}^2 \times B_{II}$ のコピー

$$V(00) \times B_{II} = \mathbf{C}^2 \times B_{II} \ni (x, y, t) = (x(00), y(00), t),$$
$$V(\infty 0) \times B_{II} = \mathbf{C}^2 \times B_{II} \ni (x(\infty 0), y(\infty 0), t),$$
$$V(\infty\infty) \times B_{II} = \mathbf{C}^2 \times B_{II} \ni (x(\infty\infty), y(\infty\infty), t),$$

を次の symplectic な関係式により貼り合わせたものである：

$$x(00) = 1/x(\infty 0), \quad y(00) = x(\infty 0)(\epsilon - x(\infty 0)y(\infty 0)),$$

$$x(\infty 0) = x(\infty\infty), \quad y(\infty 0) = \frac{-2}{x(\infty\infty)^4} + \frac{-t}{x(\infty\infty)^2} + \frac{-2\alpha}{x(\infty\infty)} + y(\infty\infty).$$

ここで

$$B_{II} = \mathbf{C},$$

$$\epsilon = -\alpha - \frac{1}{2}.$$

定理の意味するところを説明しておこう。まず symplectic 変換の復習からする。複素空間 $\mathbf{C}^3 \ni (X, Y, t)$ 内の領域から $\mathbf{C}^3 \ni (x, y, t)$ の中への biholomorphic な写像 $x = x(X, Y, t)$, $y = y(X, Y, t)$, $t = t$ は

$$dy \wedge dx = dY \wedge dX;$$

を満たすとき symplectic であるといわれる。ここで t は定数あるいはパラメータと考える。このとき任意の Hamilton 系

$$dx/dt = \partial H/\partial y, \quad dy/dt = -\partial H/\partial x$$

は Hamilton 系

$$dX/dt = \partial K/\partial Y, \quad dY/dt = -\partial K/\partial X$$

に変換されるが、K は

$$dy \wedge dx - dH \wedge dt = dY \wedge dX - dK \wedge dt$$

によって定まる。ここでは t は変数と考える。Hamiltonian K は t のみの関数を加えるという不定性を除いて一意に決まる。

以下しばらく $J = VI$ とし、添字 VI は省略する。6 個のラベルの集合を I で表す：

$$I = \{00,\ 0\infty,\ 1\infty,\ t\infty,\ \infty 0+,\ \infty 0-\}.$$

各 $V(*) \times B$, $B = B_{VI}$ を $E = E_{VI}$ の座標近傍と考える。貼り合わせを調べると分かるように、E の各 fiber $E(t)$ は集合としては複素平面 $V(00) = \mathbf{C}^2$ と 5 本の複素直線 $\{y(*) = 0\}$, $* \neq 00, \infty 0+$ と $\{x(\infty 0+) = 0\}$ の disjoint union である。

座標近傍 $V(00)\times B$ における Hamilton 系 (H_{VI}) は座標近傍 $V(*)\times B$、$* \in I$ においても Hamilton 系で書けるが、Hamiltonian $H(*) = H(*; x(*), y(*), t)$ は B で正則な t の有理関数を係数とする $x(*)$ と $y(*)$ の多項式であることが計算によって確かめられる。この事実は重要である。例えば次のようなことが分かる。座標近傍 $V(0\infty) \times B$ における Hamilton 系

$$dx(0\infty)/dt = \partial H(0\infty)/\partial y(0\infty),\ dy(0\infty)/dt = -\partial H(0\infty)/\partial x(0\infty)$$

の初期値問題

$$x(0\infty)(t_0) = h \in \mathbf{C}, \quad y(0\infty)(t_0) = 0$$

を考える。関数 $H(0\infty)$ が $x(0\infty)$ と $y(0\infty)$ の多項式でその係数が B で正則であるので、この初期値問題は一意に解ける。この解を $V(00)\times B$ における座標でみて $(x(h;t),y(h;t))$ と書くと、これは

$$\lim_{t\to t_0} x(h;t)=0,\ \lim_{t\to t_0} y(h;t)=\infty$$

を満たす (H_{VI}) の解である。このようにして点 $(x,y)=(0,\infty)$ を通る (H_{VI}) の無限個の解 $\{(x(h;t),y(h;t))|h\in\mathbf{C}\}$ が存在することが分かる。ラベル 0∞ は点 $(x,y)=(0,\infty)$ を通る解を分離するのに都合のよい座標あるいはその座標近傍であることを示すものである。

次のような関係式も成り立つ。

$$\begin{aligned}
x(00)y(00) &= \kappa_0 - x(0\infty)y(0\infty),\\
(x(00)-1)y(00) &= \kappa_1 - x(1\infty)y(1\infty),\\
(x(00)-t)y(00) &= \kappa_t - x(t\infty)y(t\infty),\\
x(00)y(00) &= \epsilon(+) - x(\infty 0+)y(\infty 0+)\\
&= \epsilon(-) - x(\infty 0-)y(\infty 0-),\\
x(\infty 0+)y(\infty 0+) &= \kappa_\infty - x(\infty 0-)y(\infty 0-).
\end{aligned}$$

定理 1 の注釈としての最後に次のことにも触れておこう。定義空間 E_J は岡本さんが構成した fiber 空間 $\mathcal{P}_J$ の全空間であるので、岡本さんが [7] のなかで証明しているように次が成り立つ：”任意の点 $P_0\in E_J$ $(\pi_J(P_0)=t_0\in B_J)$ に対して、Hamilton 系 (H_J) の E_J への拡張は P_0 を通る局所解 $P=P(t)$ $(\pi_J(P(t))=t)$ を一意に定めるが、これは、t_0 を始点とする B_J 内の任意の曲線の上で延長される。”これは Painlevé 関数の動く特異点は高々極という所謂 Painlevé property を用いて示される。実はこの逆も正しい。すなわち、もし Hamilton 系 (H_J) の E_J 上への拡張に対して上のことが言えれば、Painlevé property の別証明が得られたことになる。

さて次に空間 E_J 上には (H_J) の拡張以外に Hamilton 系があるだろうかという問題を考えよう。空間 E_J の座標近傍を区別するラベルの集合を I_J で表す。各 $*\in I_J$ に対して $V(*)\times B_J$ で正則な関数 $K(*)=$

$K(*; x(*), y(*), t)$ があって、$K(*)$ が $(x(*), y(*), t)$ と $(x(00), y(00), t)$ の間の symplectic 変換による $K(00)$ の変換であるとき族 $\{K(*; x(*), y(*), t)\}_{* \in I_J}$ を E_J で正則な Hamilton 系ということにする。

注意。 E_J 上の Hamilton 系は E_J 上の関数を定義しない。しかし E_J 上の 2 つの Hamilton 系 $\{K(*)\}_*$ と $\{K'(*)\}_*$ の差 $\{K(*)-K'(*)\}_*$ は関数を定義する。ただし必要ならば t のみの関数を加えることによって。

空間 E_J 上の正則な Hamilton 系 $\{K(*)\}_*$ に対して、各 $K(*)$ が $V(*) \times B_J$ の $\overline{E}_J$ における閉包 $\overline{V(*)} \times B_J$ にまで有理的に拡張出来るとき、この Hamilton 系は $\overline{E}_J$ にまで有理的に拡張出来るということにする。我々の第 2 の主張は次のように述べられる。

定理 2. 空間 E_J 上で正則かつ $\overline{E}_J$ にまで有理的に拡張される Hamilton 系は (H_J) が 定めるものに限る。ただし $J = VI, V, IV, III, II$。

§3. 定理 1 の証明の概略

定理 1 の $J = VI$ の場合の証明の概略を述べる。そのために岡本さんの論文 [7] にある空間 $E = E_{VI}$ の構成法を我々の記号に合わせて述べる。これをきちんとやればあとは簡単である。

3.1. 空間 $\overline{\Sigma}_\epsilon$. 複素平面 $\mathbf{C}^2$ の minimal compactification として 4 枚の $W_i = \mathbf{C}^2 \ni (x_i, y_i), i = 0, 1, 2, 3$ を次の関係式

$$x_0 = x_1, \qquad y_0 = 1/y_1,$$
$$x_0 = 1/x_2, \qquad y_0 = x_2(\epsilon - x_2 y_2),$$
$$x_2 = x_3, \qquad y_2 = 1/y_3,$$

で貼り合わせた空間 $\overline{\Sigma}_\epsilon$ をとる。この空間は良く知られたものである（[5] の Example 2.16）。我々の場合は ϵ としては

$$\epsilon = \epsilon(+) = (\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_t - 1 + \kappa_\infty)/2$$

とする。W_1 内の $y_1 = 0$ と W_3 内の $y_3 = 0$ が対応していることに注意する。 Hamilton 系 (H_{VI}) を変数 x,y,t に関する Pfaff 系と考え、それ

を $\overline{\Sigma}_\epsilon \times B$ 全体にまで拡張し、それが定める foliation を観察する。まず、$W_i \times B, i = 0, 2$ においては foliation は nonsingular ですべての leaf が fiber に transversal である。ところが $W_i \times B, i = 1, 3$ においては、各 $t \in B$ に対して

$$D^{(0)}(t) = (W_1(y_1 = 0) \times t) \cup (W_3(y_3 = 0) \times t) \cong \mathbf{P}^1,$$

$$a_\nu^{(0)}(t) = \{(x_1, y_1, t) \mid x_1 = \nu, y_1 = 0\}, \qquad \nu = 0, 1, t,$$

$$a_\nu^{(0)}(t) = \{(x_3, y_3, t) \mid x_3 = y_3 = 0\}, \qquad \nu = \infty,$$

とおくと、$D^{(0)}(t) - \cup_\nu \{a_\nu^{(0)}(t)\}$ が vertical leaf で 4 点 $a_\nu^{(0)}(t), \nu = 0, 1, t, \infty$ が foliation の特異点であることが確かめられる。

3.2. 点 $a_\nu^{(0)}(t), t \in B, \nu = 0, 1, t, \infty$ **を中心とするモノイダル変換**. 各 t に対して一斉に、点 $a_\nu^{(0)}(t)$ を中心とするモノイダル変換 $Q_{a_\nu^{(0)}(t)}$ を行なう。$\nu = 0, 1, t$ のときは

$$x_1 = \nu + z_\nu w_\nu, \quad y_1 = w_\nu,$$
$$x_1 = \nu + z'_\nu, \quad y_1 = z'_\nu w'_\nu,$$

$\nu = \infty$ のときは

$$x_3 = z_\infty w_\infty, \quad y_3 = w_\infty,$$
$$x_3 = z'_\infty, \quad y_3 = z'_\infty w'_\infty,$$

によって定まる、$Q_{a_\nu^{(0)}(t)}(W_1 \times t)$ または $Q_{a_\infty^{(0)}}(t)(W_3 \times t)$ の標準的な座標系 $(z_\nu, w_\nu) \in \mathbf{C}^2$ と $(z'_\nu, w'_\nu) \in \mathbf{C}^2$ をとる。

$$\begin{aligned} D_\nu^{(1)}(t) :&= Q_{a_\nu^{(0)}(t)}(a_\nu^{(0)}(t)) \\ &= \{(z_\nu, w_\nu) \in \mathbf{C}^2 \mid w_\nu = 0\} \cup \{(z'_\nu, w'_\nu) \in \mathbf{C}^2 \mid z'_\nu = 0\} \end{aligned}$$

に注意して因子 $D_\nu^{(1)}(t)$ の近傍で Pfaff 系がどう書かれるかを見る。

$$a_\nu^{(1)}(t) = \{(z_\nu, w_\nu) \mid z_\nu = \kappa_\nu, w_\nu = 0\} \in D_\nu^{(1)}(t),$$

$$b_\nu^{(1)}(t) = \{(z'_\nu, w'_\nu) \mid z'_\nu = w'_\nu = 0\} \in D_\nu^{(1)}(t)$$

とすると、$D_\nu^{(1)}(t)-\{a_\nu^{(1)}(t),b_\nu^{(1)}(t)\}$ が vertical leaf で、点 $a_\nu^{(1)}(t)$ と $b_\nu^{(1)}(t)$ が foliation の特異点、特に点 $b_\nu^{(1)}(t)$ を通る (H_{VI}) の解（の延長）はないことが Painlevé propeerty などから分かる。

3.3. 点 $a_\nu^{(1)}(t), t\in B, \nu=0,1,t,\infty$ を中心とするモノイダル変換. さらに各 t に対して一斉に、点 $a_\nu^{(1)}(t)$ を中心とするモノイダル変換 $Q_{a_\nu^{(1)}(t)}$ 変換を行なう。標準的な関係式

$$z_\nu=\kappa_\nu+u_\nu v_\nu,\qquad w_\nu=v_\nu,$$
$$z_\nu=\kappa_\nu+u'_\nu,\qquad w_\nu=u'_\nu v'_\nu.$$

によって定められる、$\nu=0,1,t$ のときは $Q_{a_\nu^{(1)}(t)}(Q_{a_\nu^{(0)}(t)}(W_1\times t))$ の、$\nu=\infty$ のときは $Q_{a_\infty^{(1)}(t)}(Q_{a_\infty^{(0)}(t)}(W_3\times t))$ の座標系 $(u_\nu,v_\nu)\in\mathbf{C}^2$ と $(u'_\nu,v'_\nu)\in\mathbf{C}^2$ をとる。このとき

$$\begin{aligned}D_\nu^{(2)}(t):&=Q_{a_\nu^{(1)}(t)}(a_\nu^{(1)}(t))\\&=\{(u_\nu,v_\nu)\in\mathbf{C}^2\mid v_\nu=0\}\cup\{(u'_\nu,v'_\nu)\in\mathbf{C}^2\mid u'_\nu=0\}\end{aligned}$$

である。ここに来て Pfaff 系が座標系 (u_ν,v_ν,t) では u_ν,v_ν と t の多項式 P_ν,Q_ν を用いて

$$t(t-1)du_\nu-P_\nu(u_\nu,v_\nu,t)dt=0,\ t(t-1)dv_\nu-Q_\nu(u_\nu,v_\nu,t)dt=0$$

と表されることが分かる。これは (u_ν,v_ν,t)- 空間 $\mathbf{C}^2\times B$ においては foliation がもはや特異点を持たないこと、すべての lear はファイバーに transversal であることを意味する。他方 (u'_ν,v'_ν,t)- 空間においては、

$$b_\nu^{(2)}(t)=\{(u'_\nu,v'_\nu)\mid u'_\nu=v'_\nu=0\}$$

とすると、$D_\nu^{(1)}(t)-\{b_\nu^{(1)}(t),b_\nu^{(2)}(t)\}$ が vertical leaf、点 $b_\nu^{(2)}(t)$ はこの点を通る (H_{VI}) の解は存在しないような特異点であることが確かめられる。ただし記号が煩雑になるのを避けるため $D_\nu^{(1)}(t)$ や $b_\nu^{(1)}(t)$ のモノイダル変換による proper image を同じ記号で表している。

3.4. 空間 E の構成. 各 t に対して、上で与えたすべてのモノイダル変換の合成を Φ_t とする、すなわち

$$\Phi_t=\prod_{\nu=0,1,t,\infty}Q_{a_\nu^{(1)}(t)}\circ Q_{a_\nu^{(0)}(t)}.$$

そして $\overline{E(t)}$ と $\overline{E}$ を

$$\overline{E(t)} = \Phi_t(\Sigma_\epsilon \times t), \qquad \overline{E} = \bigcup_{t\in B} \overline{E(t)} \times t$$

により定義する。空間 $\overline{E}$ は

$$\{(x_0, y_0, t) \in \mathbf{C}^2 \times B\}, \quad \{(x_2, y_2, t) \in \mathbf{C}^2 \times B\},$$
$$\{(x_1, y_1, t) \in \mathbf{C}^2 \times B \mid (x_1, y_1) \neq (0,0), (1,0), (t,0)\},$$
$$\{(x_3, y_3, t) \in \mathbf{C}^2 \times B \mid (x_3, y_3) \neq (0,0), (1,0), (1/t,0)\},$$
$$\{(z_\nu, w_\nu, t) \in \mathbf{C}^2 \times B \mid (z_\nu, w_\nu) \neq (\kappa_\nu, 0)\},$$
$$\{(z'_\nu, w'_\nu, t) \in \mathbf{C}^2 \times B \mid (z'_\nu, w'_\nu) \neq (0, 1/\kappa_\nu)\},$$
$$\{(u_\nu, v_\nu, t) \in \mathbf{C}^2 \times B\}, \quad \{(u'_\nu, v'_\nu, t) \in \mathbf{C}^2 \times B\}, \ \nu = 0, 1, t, \infty,$$

の貼り合わせであることが分かる。

さらに、$D^{(0)}(t)$, $D_\nu^{(1)}(t)$, $b_\nu^{(1)}(t)$, $\nu = 0, 1, t, \infty$ のモノイダル変換による proper image を同じ記号であらわすと、$\overline{E}$ 上にまで拡張された Pfaff 系が定める foliation は次の性質を持つ：

(i) 任意の $t \in B$ と ν に対して、$b_\nu^{(0)}(t)$ と $b_\nu^{(1)}(t)$ は、その点を通る (H_{VI}) の解が存在しないような特異点である、

(ii) $\overline{E} - \cup_{t\in B, \nu, i=0,1}\{b^{(i)}(t)\}$ は互いに交わらない 1 次元 leaves で覆われる、

(iii) 任意の $t \in B$ と ν に対して、$D^{(0)}(t) - \cup_\nu \{b_\nu^{(1)}(t)\}$ と $D_\nu^{(1)}(t) - \cup_\nu\{b_\nu^{(0)}(t), b_\nu^{(1)}(t)\}$ は vertical leaves である、

(iv) $\cup_{t\in B}(D^{(0)}(t) \cup (\cup_\nu D_\nu^{(1)}(t)))$ の外のすべての leaf は (H_{VI}) が定める leaf またはそれの延長である。

そこで、

$$E(t) = \overline{E(t)} - D^{(0)}(t) \cup \bigcup_{\nu=0,1,t,\infty} D_\nu^{(1)}(t), \quad E = \bigcup_{t\in B} E(t) \times t$$

と定義することにより空間 E が得られる。

3.5. 定理 1 の証明. 空間 E は

$$\{(x_0, y_0, t) \in \mathbf{C}^2 \times B\}, \quad \{(x_2, y_2, t) \in \mathbf{C}^2 \times B\},$$
$$\{(u_\nu, v_\nu, t) \in \mathbf{C}^2 \times B\}, \quad \nu = 0, 1, t, \infty,$$

の貼り合わせである。まず

$$dy_0 \wedge dx_0 = dy_2 \wedge dx_2.$$

であるので

$$(x(00), y(00)) = (x_0, y_0), \qquad (x(\infty 0+), y(\infty 0+)) = (x_2, y_2)$$

とする。次に $\nu = 0, 1, t$ に対しては、

$$x_0 = \nu + v_\nu(\kappa_\nu + u_\nu v_\nu), \quad y_0 = 1/v_\nu,$$

また $\nu = \infty$ に対しては

$$x_2 = v_\infty(\kappa_\infty + u_\infty v_\infty), \quad y_2 = 1/v_\infty,$$

よって

$$dy_0 \wedge dx_0 = -dv_\nu \wedge du_\nu, \quad dy_2 \wedge dx_2 = -dv_\infty \wedge du_\infty.$$

従って

$$(x(1\infty), y(1\infty)) = (-u_1, v_1), \qquad (x(t\infty), y(t\infty)) = (-u_t, v_t),$$
$$(x(\infty 0-), y(\infty 0-)) = (-u_\infty, v_\infty),$$

のように座標を選べばよい。

§4. 定理 2 の証明

$J = VI$ の場合の証明を与える。添字 VI は省略する。

$\{K(*; x(*), y(*), t)\}_*$ を E で正則で $\overline{E}$ にまで有理的に拡張できる Hamilton 系とする。簡単のため、$V(00) \times B$ の座標 $(x(00), y(00), t)$ とその上の Hamiltonian $K(00; x(00), y(00), t)$ を (x, y, t), $K(x, y, t)$ と表す。言いたいことは $K(x, y, t) = H_{VI}(x, y, t)$ である。

$$K = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$$

を K の Taylor 展開とする。ただし a_{ij} は B 上の正則関数である。

4.1. K の多項式への簡約. 空間 $\overline{V(00)} \times B$ は因子 $\{(x_1, y_1, t) \in \mathbf{C}^2 \times B \mid y_1 = 0, x_1 \neq 0, 1, t\}$ を含む。ただし $x = x_1, y = 1/y_1$。よって $K(x_1, 1/y_1, t)$ は $y_1 = 0, x_1 \neq 0, 1, t$ の上で有理的、従ってある非負整数 M が存在して

$$a_{ij} = 0, \qquad j > M. \tag{4.1}$$

$V(\infty 0+) \times B$ の座標 $(x(\infty 0+), y(\infty 0+), t)$ を (X, Y, t) と表すと、

$$\begin{aligned} K(\infty 0+) &= \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} X^{-(i-j)} (\epsilon - XY)^j \\ &\equiv \sum_{\mu \geq 1} \sum_{k=0}^{\mu-1} (-1)^k \frac{Y^k}{X^{\mu-k}} \sum_{j \geq k} \binom{j}{k} \epsilon^{j-k} a_{j+\mu, j}. \end{aligned}$$

ここで ϵ は定理 1 で与えられた $\epsilon(+)$, $\equiv$ は mod B 上の正則関数を係数とする X, Y のべき級数という意味である。$K(\infty 0+)$ が $X = 0$ 上で正則でなければならないので、$Y^k / X^{\mu-k}$, $\mu \geq 1, 0 \leq k \leq \mu - 1$ の係数は 0、すなわちすべての $\mu = 1, 2, \ldots$ に対して、

$$\sum_{j \geq 0} a_{j+\mu, j} \binom{j}{k} \epsilon^{j-k} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \mu - 1$$

を得る。これを

$$(a_{\mu,0}, a_{1+\mu,1}, \cdots) \left(\binom{p}{q} \epsilon^{p-q} \right)_{p \geq 0, 0 \leq q \leq \mu-1} = (0, 0, \cdots, 0) \tag{4.2}$$

と書く。ここで

$$\det \left(\binom{p}{q} \epsilon^{p-q} \right)_{0 \leq p, q \leq \mu-1} = 1$$

と (4.1) に注意すれば、任意の $\mu > M$ に対する (4.2) から $a_{ij} = 0$ が $i - j > M$ を満たすすべての i, j に対して成り立つ。よって K は x と y の多項式でなければならない。

4.2. K **の係数に対する条件**. すべての座標近傍 $V(*)\times B$ において K が正則であるための条件を求めておこう。

まず $V(\infty 0-)\times B$ 上の Hamiltonian $K(\infty 0-)$ を調べる。$(X,Y,t)=(x(\infty 0-),y(\infty 0-),t)$ と書くと

$$x=\frac{1}{Y(\kappa_\infty-XY)},\quad y=Y(\kappa_\infty-XY)(\epsilon-(\kappa_\infty-XY)).$$

であるので $\kappa_\infty\neq 0$ のときは

$$\begin{aligned}K(\infty 0-)&=\sum_{i,j\geq 0}a_{ij}Y^{-(i-j)}(\kappa_\infty-XY)^{-(i-j)}(\epsilon-(\kappa_\infty-XY))^j\\&=\sum_{\mu}\sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{(-)^k\binom{j}{k}\epsilon^{j-k}(\kappa_\infty-XY)^k}{Y^\mu(\kappa_\infty-XY)^\mu}a_{j+\mu,j}\\&\equiv\sum_{\mu\geq 1}\sum_{k=0}^{\mu-1}\frac{(-1)^k}{Y^\mu(\kappa_\infty-XY)^{\mu-k}}\sum_{j\geq k}\binom{j}{k}\epsilon^{j-k}a_{j+\mu,j}\\&\quad+\sum_{\mu\geq 1}\sum_{h=0}^{\mu-1}\frac{(-1)^\mu X^h}{Y^{\mu-h}}\sum_{j\geq 0}\phi_h^j(\mu)a_{j+\mu,j}\end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\phi_h^j(\mu)=\sum_{h+\mu\leq k\leq j}(-1)^{h+k-\mu}\binom{j}{k}\binom{k-\mu}{h}\epsilon^{j-k}{\kappa_\infty}^{k-h-\mu}$$

であるので

$$\phi_h^j(\mu)=\begin{cases}0, & j<h+\mu,\\ 1, & j=h+\mu,\\ (h+\mu+1)\epsilon-(h+1)\kappa_\infty, & j=h+\mu+1,\end{cases}\tag{4.3}$$

に注意する。これより (4.2) と

$$\sum_{j\geq 0}a_{j+\mu,j}\phi_h^j(\mu)=0,\qquad h=0,1,\dots,\mu-1$$

を得る。よって $\kappa_\infty \neq 0$ のときは次の 2μ-system

(4.4)

$$(a_{\mu,0}, a_{1+\mu,1}, \cdots)\left(\left(\binom{p}{q}\epsilon^{p-q}\right)_{p\geq 0, 0\leq q\leq \mu-1}, \left(\phi^p_{q-\mu}(\mu)\right)_{p\geq 0, \mu\leq q\leq 2\mu-1}\right)$$
$$= (0, 0, \cdots, 0)$$

を得る。$\kappa_\infty = 0$ のときは

$$K(\infty 0-) \equiv \sum_{\mu\geq 1}\sum_{k=0}^{2\mu-1}\frac{(-1)^\mu}{X^{\mu-k}Y^{2\mu-k}}\sum_{j\geq k} a_{j+\mu,j}\binom{j}{k}\epsilon^{j-k}$$

より次の 2μ-system を得る：

$$(4.5)\quad (a_{\mu,0}, a_{1+\mu,1}, \cdots)\left(\binom{p}{q}\epsilon^{p-q}\right)_{p\geq 0, 0\leq q\leq 2\mu-1} = (0, 0, \cdots, 0).$$

次に Hamiltonian $K(0\infty)$ を調べる。$(X, Y, t) = (x(0\infty), y(0\infty), t)$ とすると、$x = Y(\kappa_0 - XY)$, $y = 1/Y$ より

$$K(0\infty) = \sum_{i,j\geq 0} a_{ij}Y^{-(j-i)}(\kappa_0 - XY)^i$$
$$\equiv \sum_{\mu\geq 1}\sum_{k=0}^{\mu-1}(-1)^k\frac{X^k}{Y^{\mu-k}}\sum_{i\geq k}\binom{i}{k}\kappa_0^{i-k}a_{i,i+\mu}.$$

よってすべての $\mu = 1, 2, \ldots$ に対して、μ-system

$$(4.6)\quad (a_{0,\mu}, a_{1,1+\mu}, \cdots)\left(\binom{p}{q}{\kappa_0}^{p-q}\right)_{p\geq 0, 0\leq q\leq \mu-1} = (0, 0, \cdots, 0)$$

を得る。次の等式にも注意しよう：

$$\det\left(\binom{p}{q}{\kappa_0}^{p-q}\right)_{0\leq p,q\leq \mu-1} = 1.$$

最後に Hamiltonians $K(1\infty)$ と $K(t\infty)$ を調べる。$(X, Y, t) = (x(1\infty), y(1\infty), t)$ とすると $x = 1 + Y(\kappa_1 - XY)$, $y = 1/Y$ であるので、

$$K(1\infty) = \sum_{i,j\geq 0} a_{ij}\frac{((1+\kappa_1 Y) - XY^2)^i}{Y^j}$$
$$= \sum_{i,j\geq 0}\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{i}{k}\frac{X^k}{Y^{j-2k}}(1+\kappa_1 Y)^{i-k}a_{ij}.$$

従って、もし、ある2以上の M に対して、

$$a_{ij} = 0, \qquad j > M \tag{4.7}$$

ならば、X^k/Y^{M-2k}, $k = 0, 1, \ldots, [(M+1)/2] - 1$ ([ ] は Gauss 記号) の係数を見ることにより、

$$\sum_{i \geq 0} \binom{i}{k} a_{iM} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, [(M+1)/2] - 1 \tag{4.8}$$

が得られる。ここで記号 $\nu(*)$ を導入しておく：

$$\nu(M) = [(M+1)/2].$$

さらに、やや面倒であるが X^k/Y^{M-1-2k}, $k = 0, 1, \ldots, \nu(M-1) - 1$ の係数を見ることにより、$k = 0, 1, \ldots, \nu(M-1) - 1$ に対する方程式

$$\sum_{i \geq 0} a_{i,M-1} \binom{i}{k} + (k+1)\kappa_1 \sum_{i \geq 0} a_{iM} \binom{i}{k+1} = 0 \tag{4.9}$$

を得る。さて $(X, Y, t) = (x(t\infty), y(t\infty), t)$ とすると $x = t + Y(\kappa_t - XY)$, $y = 1/Y$ である。この symplectic 変換には変数 t が explicit に現われていることに注意する。この場合は、

$$K(t\infty) = K(t + Y(\kappa_t - XY), 1/Y, t) - 1/Y$$

である。よって、仮定 (4.7) の下で、X^k/Y^{M-2k}, $k = 0, 1, \ldots, \nu(M) - 1$ および X^k/Y^{M-1-2k}, $k = 0, 1, \ldots, \nu(M-1) - 1$ の係数を観察することにより、

$$\sum_{i \geq 0} \binom{i}{k} t^{i-k} a_{iM} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \nu(M) - 1 \tag{4.10}$$

と、$k = 0, 1, \ldots, \nu(M-1) - 1$ に対する

(4.11)
$$\sum_{i \geq 0} a_{i,M-1} \binom{i}{k} t^{i-k} + (k+1)\kappa_t \sum_{i \geq 0} a_{iM} \binom{i}{k+1} t^{i-(k+1)} = \delta_{M-1,1}$$

を得る。(4.8) と (4.10) をまとめた $2\nu(M)$-system は

$$(a_{0M}, a_{1M}, \cdots)F(\infty, 2\nu(M)) = (0, 0, \cdots, 0) \tag{4.12}$$

と表せる。ここで $F(\infty, 2n)$ は $\infty \times 2n$ 行列 $(f_j^i)_{i \geq 0, 0 \leq j \leq 2n-1}$ で、各成分が次で与えられるものである：

$$f_q^p = \binom{p}{q}, \qquad p \geq 0,\ 0 \leq q \leq n-1,$$
$$f_{q+n}^p = \binom{p}{q} t^{p-q}, \qquad p \geq 0,\ 0 \leq q \leq n-1.$$

4.3. 多項式 K の次数の低減化. ここでは

$$a_{ij} = 0, \qquad i > 3 \quad \text{or} \quad j > 2 \tag{4.13}$$

を示す。そのためには次を示せばよい。

命題 4.1. $m \geq 2$ とする。もし $a_{ij} = 0$ が i または $j > 3m$ を満たすすべての i, j について成り立つならば、$a_{ij} = 0$ が $i > 3m - 3$ または $j > 2m - 2$ を満たすすべての i, j について成り立つ。

そこで以下、2 以上の固定された m に対して、次を仮定する：

$$a_{ij} = 0, \qquad i \quad \text{or} \quad j > 3m. \tag{4.14}$$

まず

$$a_{ij} = 0, \qquad i - j > m$$

に注意する。これは仮定 (4.14) と方程式 (4.4) または (4.5) と関係式 (4.3) などから言える。

証明を簡潔にするために、道具を準備する。ある (k, l) に対して

$$a_{ij} = 0, \qquad j > l \quad \text{or} \quad j - i > l - k$$

であるとき多項式 Hamiltonian $K = \sum a_{ij} x^i y^j$ は "状態" $S(k, l)$ にあると言おう。

Hamiltonian K が状態 $S(k,l)$ にあるとする。もし $l-k \geq k+1$ ならば（これは未知数の数より方程式の数の方が大きいという条件）、すなわち $l \geq 2k+1$ ならば、方程式 (4.6) より、K は状態 $S(k+1,l)$ に簡約されることが分かる。この操作を Reduction A と言う。同様にもし $2\nu(l) \geq 3m-k+1$ ならば、方程式 (4.12) より、K は状態 $S((k-1)^+, l-1)$ ($\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$) に簡約される。この操作を Reduction B と言う。ただし行列式が 0 でないことをいうために次の命題が必要である。

命題 4.2. $F_k(\infty, 2n)$ を行列 $F(\infty, 2n)$ の一部からなる正方行列 $(f^i_j)_{k \leq i \leq k+2n-1, 0 \leq j \leq 2n-1}$ とすると、

$$\det F_k(\infty, 2n) = t^{nk}(t-1)^{n^2}. \tag{4.15}$$

命題 4.2 の証明。 すべての $k \geq 1$ に対して、$\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1}$ を用いて、

$$\det F_k(\infty, 2n) = t^n \det F_{k-1}(\infty, 2n)$$

がいえる。よって $k=0$ の場合をいえばよい。$I(t) = \det F_0(\infty, 2n)$ と置くと $I(t)$ は高々 n^2 次の t の多項式えあること、$i = 0, 1, \ldots, n^2 - 1$ に対して $I(t)$ の i 次微分は $t=1$ で消えること、さらに $I(0) = (-1)^{n^2}$ なることが確かめられる。これより $k=0$ の場合が、よってすべての場合が示された。

まず示したいことは、(4.14) のもとで、Reduction A と B を適当に行なうことによって状態 $S(m, 2m)$ にまで簡約できることである。少し言葉を用意する。状態 $S(k,l)$ が reducible とは Reduction A または B が可能であるとき、irreducible とは Reduction A も B も不可能なときとする。とすると、状態 $S(k,l)$ が reducible であるための必要十分条件は $l \geq 2k+1$ または $2\nu(l) \geq 3m-k+1$ である。よって $S(0,3m)$ は reducible、$S(m,2m)$ は irreducible である。

集合 Σ を次の条件を満たす (k,l) に対応する状態 $S(k,l)$ 全体とする：

$$0 \leq k \leq 3m, \quad 2m \leq l \leq 3m, \quad l \geq 2k-1, \quad l \geq 3m-k-2.$$

このとき $\Sigma-\{S(m,2m)\}$ に属する状態はすべて reducible 、かつこの状態に Reduction A を行なっても Reduction B を行なっても、得られる状態は Σ に属することが分かる。さらに Σ に全順序 $\succ$ を " $l>l'$ または $l=l'$ かつ $l-k>l'-k'$ のとき $S(k,l)\succ S(k',l')$ " により定義すると、$S(0,3m)$ が最高状態で $S(m,2m)$ が最低状態であること、また Reduction A または Reduction B をほどこすと必ずもとより低い状態に落ちることが分かる。以上によって状態 $S(0,3m)$ から状態 $S(m,2m)$ に落としていく Reduction A と Reduction B からなる列が存在することが示される。

最後に $4m+2$ 個の未知数 $a_{i,2m-1}$, $m-1\leq i\leq 3m-1$ と $a_{i,2m}$, $m\leq i\leq 3m$ に関する $4m+2$ 個の方程式を取り出しそれを解いて命題 4.1 の証明を完結させる。まず $\mu=m$ に対する (4.4) または (4.5) と (4.6) のそれぞれの最後の式より

$$
\begin{aligned}
a_{3m-1,2m-1} &+ m(\kappa_0+\kappa_1+\kappa_t-1)a_{3m,2m}=0,\\
a_{m-1,2m-1} &+ m\kappa_0 a_{m,2m}=0
\end{aligned}
$$

を得る。次に $M=2m$ に対する (4.8) と (4.9) より

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{3m} a_{i,2m}\binom{i}{k} &= 0, \qquad k=0,1,\dots,m-1,\\
\sum_{i=m-1}^{3m-1} a_{i,2m-1}\binom{i}{k} &= 0, \qquad k=0,1,\dots,m-2,\\
\sum_{i=m-1}^{3m-1} a_{i,2m-1}\binom{i}{m-1} + m\kappa_1\sum_{i=m}^{3m} a_{i,2m}\binom{i}{m} &= 0,
\end{aligned}
$$

を、$M=2m$ に対する (4.10) と (4.11) より

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{3m} a_{i,2m}\binom{i}{k}t^{i-k} &= 0, \qquad k=0,1,\dots,m-1,\\
\sum_{i=m-1}^{3m-1} a_{i,2m-1}\binom{i}{k}t^{i-k} &= 0, \qquad k=0,1,\dots,m-2,\\
\sum_{i=m-1}^{3m-1} a_{i,2m-1}\binom{i}{m-1}t^{i-(m-1)} + m\kappa_t\sum_{i=m}^{3m} a_{i,2m}\binom{i}{m}t^{i-m} &= 0,
\end{aligned}
$$

を得る。これらを $(4m+2)$-system としてまとめると

$$(a_{m-1,2m-1},\dots,a_{3m-1,2m-1},a_{m,2m},\dots,a_{3m,2m})G_m$$
$$=(0,\dots,0),$$

となる。ここで正方行列 $G_n=(g^i_j(n))_{0\le i,j\le 4m+1}$ は次で与えられる：

$$g^0_0(n)=1,\qquad g^{2m+1}_0(n)=m\kappa_0,$$
$$g^p_{q+1}(n)=\binom{p+(n-1)}{q},\qquad 0\le p\le 2m,\quad 0\le q\le m-1,$$
$$g^{p+2m+1}_m(n)=m\kappa_1\binom{p+n}{m},\qquad 0\le p\le 2m,$$
$$g^p_{q+m+1}(n)=\binom{p+(n-1)}{q}t^{p+(n-1)-q},\quad 0\le p\le 2m,\ 0\le q\le m-1,$$
$$g^{p+2m+1}_{2m}(n)=m\kappa_t\binom{p+n}{m}t^{p+n-m},\qquad 0\le p\le 2m,$$
$$g^{p+2m+1}_{q+2m+1}(n)=\binom{p+n}{q},\qquad 0\le p\le 2m,\quad 0\le q\le m-1,$$
$$g^{p+2m+1}_{q+3m+1}(n)=\binom{p+n}{q}t^{p+n-q},\qquad 0\le p\le 2m,\quad 0\le q\le m-1,$$
$$g^{2m}_{4m+1}(n)=1,\qquad g^{4m+1}_{4m+1}(n)=m(\kappa_0+\kappa_1+\kappa_t-1),$$
$$g^i_j(n)=0,\qquad \text{for other } i,j.$$

従って次の命題がいえれば $a_{i,2m-1}=0,\ m-1\le i\le 3m-1$ と $a_{i,2m}=0,\ m\le i\le 3m$ がいえ、この小節の目的が達せられる。

命題 4.3.

$$\det G_n=-mt^{2mn}(t-1)^{2m^2}. \tag{4.16}$$

命題 4.3 の証明。　まず任意の $n\ge 0$ に対して

$$\det G_n=t^{2m}\det G_{n-1}$$

が確かめられる。よって $n=0$ の場合を示せばよい。そこで $J(t)=\det G_0$ と置く。パラメータ $\kappa_\nu,\ \nu=0,1,t$ に関する $J(t)$ のすべての 2 階偏導

関数が恒等的に 0 であること、すべての 1 階偏導関数が $\kappa_0=\kappa_1=\kappa_t=0$ において消えることが確かめられて、$J(t)$ はこれらのパラメータに依存しないことが分かる。$J(t)|_{\kappa_0=\kappa_1=\kappa_t=0}=-m(t-1)^{2m^2}$ であることは、命題 4.2 などを用いて示される。

4.4. 定理 2 の証明の完成. 以上より (4.13) を仮定してよいことが分かった。$\mu=3,2,1$ に対する (4.4) または (4.5) より

$$
\begin{aligned}
a_{30} =& a_{20} = a_{31} = 0,\\
a_{10} +& \epsilon a_{21} + \epsilon^2 a_{32} = 0,\\
&a_{21} + (2\epsilon - \kappa_\infty)a_{32} = 0,
\end{aligned}
$$

を得る。また $\mu=2,1$ に対する (4.6) から次を得る：

$$
\begin{aligned}
a_{02} &= 0,\\
a_{01} + \kappa_0 a_{12} &= 0.
\end{aligned}
$$

さらに $M=2$ に対する (4.8),(4.9),(4.10) と (4.11) から

$$
\begin{aligned}
a_{12} + a_{22} + a_{32} &= 0,\\
a_{01} + a_{11} + a_{21} + \kappa_1 a_{12} + 2\kappa_1 a_{22} + 3\kappa_1 a_{32} &= 0,\\
ta_{12} + t^2 a_{22} + t^3 a_{32} &= 0,\\
a_{01} + ta_{11} + t^2 a_{21} + \kappa_t a_{12} + 2\kappa_t t a_{22} + 3\kappa_t t^2 a_{32} &= 1,
\end{aligned}
$$

が得られる。0 以外の係数 $a_{32}, a_{22}, a_{12}, a_{21}, a_{11}, a_{01}$ と a_{10} に関する 7-system は簡単に解けて

$$
\begin{aligned}
&a_{32} = \frac{1}{t(t-1)}, \qquad a_{22} = \frac{-(t+1)}{t(t-1)}, \qquad a_{12} = \frac{t}{t(t-1)},\\
&a_{21} = \frac{-(\kappa_0+\kappa_1+\kappa_t-1)}{t(t-1)}, \qquad a_{11} = \frac{(\kappa_0+\kappa_1)t+(\kappa_0+\kappa_t-1)}{t(t-1)},\\
&a_{01} = \frac{-\kappa_0 t}{t(t-1)}, \qquad a_{10} = \frac{\kappa}{t(t-1)},
\end{aligned}
$$

が得られる。

参考文献

[1] K. Iwasaki, Moduli and deformation for Fuchsian projective connection on a Riemann surface, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math., **38**(1991), 431-531.

[2] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé, Vieweg, 1991.

[3] H. Kimura, Uniform foliation associated with the Hamiltonian system $\mathcal{H}_n$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **20**(1993), 1-60.

[4] 木村弘信、Garnier 系の葉層構造、数学、**41**(1989), 223-236.

[5] K. Kodaira, Complex manifolds and deformation of complex structures, Springer-Verlag, 1985.

[6] T. Matano, A. Matumiya and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems II, in preparation.

[7] K. Okamoto, Sur les feuilletages associés aux équation du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales, Japan. J. Math., **5**(1979), 1-79.

[8] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations, I, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **56**(1980), 264-268; II, ibid, **56**(1980), 367-371.

[9] 岡本和夫、Painlevé の方程式、数学、**32**(1980), 30-43.

[10] T. Shioda and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, preprint.

[11] K. Takano, Reduction for Painlevé equations at the fixed singular points of the first kind, Funkcial. Ekvac., **29**(1986), 99-119.

[12] K. Takano, Reduction for Painlevé equations at the fixed singular points of the second kind, J. Math. Soc. Japan, **42**(1990), 423-443.