数理解析研究所講究録
934巻 1996年 106-110

超幾何関数とトーリック多様体

神戸大理: 高山信毅 (Nobuki Takayama)

研究集会では、上記の題名で

“主 A 行列式のニュートン多面体が A の secondary polytope に一致する”

という Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky による定理の、超幾何関数を用いた直観的解説を試みた。これについては、数理科学7月号 (1995) の記事 ([12]) がほぼ講演内容に沿っているので、そちらを参照していただきたい。ここでは、講演中にちょっとだけ述べただけで、本格的に説明できなかった話題のひとつ: 三角形分割の flop (restructuring, modification) に付随する超幾何級数の flop、について説明を加えておきたい。記号などは、上記記事の記号を踏襲する。おなじく、講演中にちょっといっただけで詳しく説明できなかった、超幾何関数の定義域となるトーリック多様体と cross ratio variety の関係については [10] を見て下さい。

まず始めに次のような超幾何関数の変形を見てみよう。

Appell の超幾何級数

$$f := F_1\left(\begin{matrix}\alpha & \beta & \beta' \\ & \gamma & \end{matrix}; x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}(1)_m(1)_n} x^m y^n$$

は以下のようにガウスの超幾何級数の重ね合わせ (superposition) で書くことができる。

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\begin{matrix}\alpha+n & \beta \\ & \gamma+n\end{matrix}; x\right) \frac{(\alpha)_n(\beta')_n}{(\gamma)_n(1)_n} y^n.$$

次にガウスの超幾何級数の接続公式

$$\begin{aligned} & F\left(\begin{matrix}\alpha+n & \beta \\ & \gamma+n\end{matrix}; x\right) \\ = & \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pi i\alpha} x^{-\alpha} \frac{(\gamma)_n}{(1+\alpha-\beta)_n} x^{-n} F\left(\begin{matrix}\alpha+n & 1+\alpha-\gamma \\ & 1+\alpha+n-\beta\end{matrix}; \frac{1}{x}\right) \\ & + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} e^{\pi i\beta} x^{-\beta} \frac{(\gamma)_n(\alpha-\beta)_n}{(\alpha)_n(\gamma-\beta)_n} F\left(\begin{matrix}\beta & 1+\beta-\gamma-n \\ & 1+\beta-\alpha-n\end{matrix}; \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$(\mathrm{Im}\, x > 0)$, を用いてこの重ね合わせの式を変形すると、次の式をえる。

$$\begin{aligned} f &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pi i \alpha} x^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta')_n}{(1+\alpha-\beta)_n(1)_n} \left(\frac{y}{x}\right)^n F\begin{pmatrix} \alpha+n & 1+\alpha-\gamma \\ & 1+\alpha+n-\beta \end{pmatrix}; \frac{1}{x} \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} e^{\pi i \beta} x^{-\beta} \frac{(\beta')_n(\alpha-\beta)_n}{(1)_n(\gamma-\beta)_n} y^n F\begin{pmatrix} \beta & 1+\beta-\gamma-n \\ & 1+\beta-\alpha-n \end{pmatrix}; \frac{1}{x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pi i \alpha} x^{-\alpha} F_1 \begin{pmatrix} \alpha & 1+\alpha-\gamma & \beta' \\ & 1+\alpha-\beta & \end{pmatrix}; \frac{1}{x}, \frac{y}{x} \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} e^{\pi i \beta} x^{-\beta} G_2 \begin{pmatrix} \beta & \beta' \\ \alpha-\beta & 1+\beta-\gamma \end{pmatrix}; -\frac{1}{x}, -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$G_2\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}; x, y \end{pmatrix} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m(a')_n(b')_{m-n}}{(1)_m(1)_n(1-b)_{m-n}} (-x)^m(-y)^n$$

は Horn の G_2 という名前のついた関数である。以上のようにして、$(x,y)=(0,0)$ のまわりの超幾何級数より $(x,y)=(\infty,0)$ のまわりの超幾何級数を得ることができた。(この例は [11] より。)

さて、一般に p 変数超幾何級数

$$\sum_m c(m_1,\ldots,m_p)x^m, \quad m=(m_1,\ldots,m_p)$$

を、一変数超幾何級数の重ね合わせ

$$\sum_{m'} h(m_2,\ldots,m_p;x_1)c'(m_2,\ldots,m_p)x'^{m'}, \quad m'=(m_2,\ldots,m_p), x'=(x_2,\ldots,x_p)$$

に書き直す。次に、一変数超幾何級数 h の接続公式

$$h(m_2,\ldots,m_p;x_1)=\sum_{i=1}^{r} d_i h^{(i)}(m_2,\ldots,m_p;x_1^{-1})$$

を用いてもとの超幾何級数を

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \sum_{m'} h^{(i)}(m_2,\ldots,m_p;x_1^{-1})c'(m_2,\ldots,m_p)x'^{m'}$$

と書き直すことができる。次にふたたび $h^{(i)}$ を展開することにより r 個の新しい p 変数超幾何級数を得ることができる。なお、この操作は形式的なものであり収束を論ずるにはいろいろと仮定が必要となる。さて、逆に $h^{(i)}$ 達を $x_1=0$ の

まわりへ解析接続すればあと $r-1$ 個の超幾何級数を得ることができる。従って、まとめると r 個の超幾何級数の組より、新しい r 個の超幾何級数の組を得ることが可能となる。超幾何級数の組を、このような操作で書き換える操作を超幾何級数の flop とよぶことにしたい。さらに $h, h^{(i)}$ のみたす超幾何方程式を flop に付随した サーキット (circuit) 方程式という。(このあたりの用語法、定義はまだ確定版がないのであいまいな部分があるが、発想は理解していただけると思う。)

さて、次に Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky 達による正則三角形分割 (regular triangulation) の flop (restructuring, modification) の定義を復習しよう。

$A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ を $\mathbf{Z}^d$ の n 個の点の集合で超平面 $c\cdot x=1,\ c\in\mathbf{Z}^d$ の上にあり、かつ $\mathbf{Z}A=\mathbf{Z}^d$ であると仮定する。A の部分集合 Z が $\mathbf{Z}$ 上の極小の一次従属集合であるときこれをサーキット (circuit) と呼ぶ。T を A の三角形分割とする。 次の 3 条件をみたすとき T は Z 上にサポートを持つという。

1. Tの頂点より Zの点を除いたものは Z の凸包 conv(Z) の中にはない。

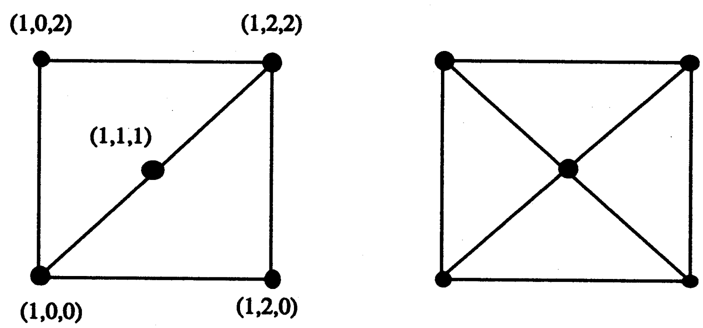
2. conv(Z) は T に含まれる (最大次元より低い次元の) 単体をうまく選んだものの和集合である。

3. T を Z に制限したものを考える。$T_{|Z}$ の 最大次元の単体のなかから I, I' を任意に 2 つとろう。このとき、任意の A の部分集合 F に対して, $F\cup I$ が T の単体であるならば、$F\cup I'$ も T の単体である。

例えば,

$$\{a_1,\ldots,a_5\}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&2&0&2&1\\0&0&2&2&1\end{pmatrix}$$

を考えれば たとえば a_1, a_4, a_5 がサーキットとなる。



さて、サーキットは必ず 2 通りの三角形分割をもつ。いま 三角形分割 T があったとき、これが サーキット Z にサポートをもつとする。Z の三角形分割を新しいものに変更しよう。すると、上の条件より Tの三角形分割も新しいものに更新できる。この操作を Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky は restructuring (modification)

と呼んだ。(ひとによっては、 flop とも呼ぶ。短く簡潔なのでここでも flop とよぶことにする。) 上の図は、サーキット $\{a_1, a_4, a_5\}$ による flop の例である。

さて、Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky によれば、点集合 A に対して A 超幾何方程式系が定義でき、さらに A の正則三角形分割に対して基本解系を超幾何級数で与えることができる。この構成法をよくみると、次がわかる。

観察 1 三角形分割の *flop* に対して超幾何級数の *flop* がひとつきまる。

超幾何級数の flop を厳密に定義するのはやりにくいので、サーキット方程式を厳密に定義しよう。

Z をサーキット、 T を Z をサポートにもつ正則三角形分割としよう。Z の T と両立する三角形分割を

$$Z_1 \cup \cdots \cup Z_r$$

とする。このとき、 Z_1 は T に含まれる最大次元の単体 τ_1 にのばすことができる。$\Gamma = \tau_1 \cup Z$ とおく。Z が T のサポートということより、Γ は Z_1 のとり方に依存せず T と Z だけできまる。添字を入れ換えることにより $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ としてよい。$X_\Gamma = \{x \,|\, x_{m+1} = \cdots = x_n\}$ とおき、 X_Γ を $\mathbf{C}^n$ へ埋め込む写像を j とかく。$M(\alpha)$ で A と パラメータ α できまる 超幾何 D-加群をあらわす。

定義 1 $M(\alpha)$ の D-加群としての逆像 $j^*M(\alpha)$ をサーキット Z, 正則三角形分割 T できまるサーキット方程式という。

例をあげておくと、超幾何方程式 $E(2,n)$ に対しては、ガウスの超幾何方程式がサーキット方程式となる。また $E(3,6)$ に対しては、ガウスの超幾何方程式および ${}_3F_2$ の方程式がサーキット方程式となる。

さて、 正則三角形分割 T と 正則三角形分割 T' が サーキット Z による flop で互いに移りあうとしよう。E_A で A のきめる主 A 行列式をあらわすことにする。

問題 1 サーキット方程式 $j^*M(\alpha)$ の解空間がある適当な α に対してモノドロミ不変な 1 次元の部分空間をもたないならば、主 A 行列式 E_A のアメーバは $C(A,T)$ と $C(A,T')$ の境界のなかを無限遠方までのびている。

問題 2 サーキット方程式 $j^*M(\alpha)$ の解空間が、1 次元のモノドロミ不変な部分空間を持たないような定数 α が存在する。

さて、[7](p543) によれば、α がある有限個の平面の上にのっていないならば、

$$\oplus_{k=1}^{v} M_\Gamma(\alpha - \lambda_i) \to j^*M(\alpha)$$

は全射となる。(記号については [7] を参照。) したがって、

問題 3 $M_\Gamma(\alpha - \lambda_i)$ の解空間すべてが 1 次元のモノドロミ不変な部分空間を持たないような定数 α が存在する。(cf. [5] (定理 2.11))

を示すことができれば、ひとつ前の問題が証明できることになる。

以上の問題をすべてきちんと示すことができれば、定理の直観的説明は厳密な証明となる。

References

[1] Appell,P. and Kampé de Fériet 'Fonctions Hypergéométriques et Hypershériques' Gauthier-Villars, 1926.

[2] Billera, L.J., Filliman, F. and Sturmfels, B. 'Constructions and complexity of secondary polytopes', Advances in Mathematics, **83** (1990), 155-179.

[3] Erdélyi,A., Magnus,W., Oberhettinger,F.and Tricomi,F.G. 'Higher Transcendental Functions I', Robert E.Krieger Publishing Company, 1981

[4] de Loera, J. 'Computing regular triangulations of point configurations' Preprint, Cornell University, (1994).

[5] I.M.Gel'fand, M.M.Kapranov and A.V.Zelevinskii, Generalized Euler Integrals and A-hypergeometric Functions, *Advances in Mathematics* **84**, (1990), 255-271.

[6] Masada, T. 'Enumeration of regular triangulations' Master's thesis, Department of information science, Univ. of Tokyo, (1995).

[7] Saito, Mu. and Takayama, N. 'Restrictions of A-hypergeometric systems and connection formulas of the $\Delta_1 \times \Delta_{n-1}$-hypergeometric function' International Journal of Mathematics **5** (1994), 537-560.

[8] Sekiguchi, J. 'Cross ratio varieties for root systems' *Kyushu J. Math.*, **48** (1994), 123-168.

[9] Sekiguchi, J. 'Hypergeometric function of type (3,6) and Naruki's cross ratio variety' preprint.

[10] Sekiguchi J. and Takayama N., Compactifications of the configuration space of 6 points of the projective plane and fundamental solutions of the hypergeometric system of type $(3, 6)$, preprint.

[11] Takayama, N., Propagation of singularities of solutions of the Euler-Darboux equation and a global structure of the space of holonomic solutions II, Funkcialaj Ekvacioj, **36** (1993), 343-403.

[12] 高山信毅, 特殊関数と組合せ論, 数理科学 7 月号 (1995), 22-28, およびそこに挙げた参考文献.