数理解析研究所講究録
935巻 1996年 151-159

Stationary Navier-Stokes equations under the boundary condition with non-vanishing outflow

明治大学理工学部　森本浩子 (MORIMOTO, Hiroko)

1　はじめに

D は $\mathbf{R}^n(n \geq 2)$ の有界領域で境界 ∂D は滑らかとする. D を占める非圧縮粘性流体の運動を記述する定常 Navier-Stokes 方程式の非斉次境界値問題を考察する.

$$(1)\quad \begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \dfrac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{f} & \text{in } D \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{in } D \end{cases}$$

$$(2)\quad \mathbf{u} = \mathbf{b} \qquad \text{on} \quad \partial D$$

ここで $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$（流速ベクトル）と p（圧力）は未知, ρ（密度）, ν（動粘性係数）は与えられた正定数, $\mathbf{f}$ (外力) $\mathbf{b}$ (境界での速度）は与えられたベクトルである.

６０年ほど昔, Leray [5] は次の条件の下でこの定常問題の弱解の存在を証明した.

$$(\mathrm{H})\quad \int_{\Gamma_i} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

ただし$\partial D = \cup_{i=1}^{k}\Gamma_i$, Γ_i は ∂D の連結成分で $\mathbf{n}$ は境界 ∂D での外向き単位法線ベクトルである.

この仮定の下では$\overline{D}$で定義された滑らかな関数 $\mathbf{c}$ で ∂D 上 $\mathrm{rot}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}$ となるものが存在する．したがって $\mathbf{c}$ を境界の近傍で修正して，非線形項を“小さく”評価することができる．すなわち任意の正数 ε に対し $\mathbf{b}$ の D への拡張 $\mathbf{b}_\varepsilon$ で $\mathrm{div}\,\mathbf{b}_\varepsilon = 0$ をみたし

$$(\mathrm{L}) \quad |((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b}_\varepsilon, \mathbf{u})| \leq \varepsilon||\nabla\mathbf{u}||^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty_{0,\sigma}(D)$$

が成り立つようなものが作れる（c.f. [3], [4], [8]）．ただし $(\cdot,\cdot)$ は L^2- 内積，$||\cdot||$ は L^2-ノルムである．

条件 (H) はソレノイダルなベクトル場の境界値 $\mathbf{b}$ がみたす条件

$$(\mathrm{H})_0 \quad \int_{\partial D} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$$

よりも強い．そこで次の問題を考える．

問題 (P)　条件 (H) はみたさないが条件 $(\mathrm{H})_0$ はみたす境界値に対して境界値問題 (1)(2) は解をもつか．

一般の領域に対してこの問題は未解決である．2 次元の場合，領域，外力，境界値が一直線に関して対称ならば解が存在することを Amick [1] が示した．

一方 竹下 [7] により次の結果が得られている．

定理　領域 $D = \{x \in \mathbf{R}^n | R_1 < |x| < R_2\}$ の境界を$\Gamma_i = \{x \in \mathbf{R}^n | |x| = R_i\}, i = 1, 2$ とする．$\mathbf{b}$ は $\int_{\Gamma_1} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,ds = a$，$\int_{\Gamma_2} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,ds = -a$ をみたし任意の正数 ε にたいして条件 (L) をみたす拡張が作れるならば $a = 0$ である．

したがって (P) を肯定的に解決するには，Leray が用いた拡張による方法は使えないように思われる．

この小論では 2 次元の円環領域で $a \neq 0$ となるある場合に (P) の解を構成し，その解の一意性と安定性を議論する。

2　存在と一意性

関数空間を次のように定める.

$$\mathbf{C}_{0,\sigma}^{\infty}(D) = \{\mathbf{u} \in C_0^{\infty}(D)^n | \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0\},$$

$H_\sigma = \mathbf{C}_{0,\sigma}^{\infty}(D)$ の $L^2(D)^n$ における閉包,

$V = \mathbf{C}_{0,\sigma}^{\infty}(D)$ の $H^1(D)^n$ における閉包.

定義 1 関数 $\mathbf{u}$ が 境界値問題 (1) の弱解であるとは $\mathbf{u} \in H_\sigma \cap H^1(D)^n$ であって

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \qquad \text{for} \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

が成り立つことをいう.

以下では D は 2 次元の円環領域でその境界を $\Gamma_i (i = 1, 2)$ で表す.

$$D = \{x \in \mathbf{R}^2 | R_1 < |x| < R_2\},$$

$$\Gamma_i = \{x \in \mathbf{R}^2 | |x| = R_i\},\ i = 1, 2.$$

境界値問題 (1) を外力 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ および境界値

(3) $\mathbf{b} = \dfrac{\mu}{R_i}\mathbf{e}_r + b_i \mathbf{e}_\theta \qquad \text{on } \Gamma_i, \qquad i = 1, 2$

にたいして考察する. ここでμ, b_1, b_2 は正定数で $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ は極座標 $\{r, \theta\}$ に関する基本ベクトルである.

注意 1 この境界値 $\mathbf{b}$ は $\mu \neq 0$ ならば（条件 $(\mathrm{H})_0$ をみたすが）条件 (H) はみたさない.

定理 1 ([6]) $\mathbf{f}=\mathbf{0}$ とする. 任意の定数 μ, b_1, b_2 に対して境界値問題 (1) の弱解で，境界条件 (3) をみたすものが少なくとも一つ存在する. もし $|\mu|$, $|b_1|$, $|b_2|$ が十分小さければ弱解は一意的である.

証明のスケッチ

u_r, u_θ, p は r のみに依存すると仮定して，次の形の解を探す.

$$\mathbf{u}=u_r\mathbf{e}_r+u_\theta\mathbf{e}_\theta$$

このとき方程式 (1) (3) より u_r, u_θ, p にたいする常微分方程式の境界値問題

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{c} -\nu(u_r''+\frac{1}{r}u_r'-\frac{1}{r^2}u_r)+\frac{1}{\rho}p'+u_ru_r'-\frac{1}{r}u_\theta^2=0 \\ -\nu(u_\theta''+\frac{1}{r}u_\theta'-\frac{1}{r^2}u_\theta)+u_ru_\theta'+\frac{1}{r}u_ru_\theta=0 \\ \frac{1}{r}(ru_r)'=0 \\ u_r(R_1)=\mu/R_1, u_r(R_2)=\mu/R_2, u_\theta(R_1)=b_1, u_\theta(R_2)=b_2 \end{array}\right.$$

が導かれる ([2]). これをといて次の厳密解が得られる.

$\mu\neq -2\nu$ のとき $\mathbf{u}=\dfrac{\mu}{r}\mathbf{e}_r+(\dfrac{c_1}{r}+c_2r^{1+\frac{\mu}{\nu}})\mathbf{e}_\theta$

ただし $c_1=\dfrac{b_1R_1R_2^{2+\frac{\mu}{\nu}}-b_2R_2R_1^{2+\frac{\mu}{\nu}}}{R_2^{2+\frac{\mu}{\nu}}-R_1^{2+\frac{\mu}{\nu}}}$, $c_2=\dfrac{b_2R_2-b_1R_1}{R_2^{2+\frac{\mu}{\nu}}-R_1^{2+\frac{\mu}{\nu}}}$

$\mu=-2\nu$ のとき $\mathbf{u}=\dfrac{\mu}{r}\mathbf{e}_r+\dfrac{1}{r}(c_1+c_2\log r)\mathbf{e}_\theta$

ただし $c_1 = \dfrac{b_1R_1\log R_2 - b_2R_2\log R_1}{\log R_2 - \log R_1}$, $c_2 = \dfrac{b_2R_2 - b_1R_1}{\log R_2 - \log R_1}$

上で得られた解を $\mathbf{u}_0$，任意の解を $\mathbf{u}$ とし $\mathbf{w} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}$ とおく．$\mathbf{w}$ は，次の方程式をみたす．

(5) $\nu(\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}) - \{((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) - ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{u})\} = \mathbf{0}$ for $\forall\mathbf{v} \in V$.

ここで $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ととれば

$$\nu\|\nabla\mathbf{w}\|^2 = -((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{w})$$

が成り立つ．右辺を J とおく．

$$J = -\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\left\{w_r^2\frac{\partial u_r}{\partial r} + w_r w_\theta\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\Big) + w_\theta^2\frac{u_r}{r}\right\} r\,dr\,d\theta.$$

$\mu \neq -2\nu$ のとき $u_r = \dfrac{\mu}{r}$，$u_\theta = \dfrac{c_1}{r} + c_2 r^{1+\frac{\mu}{\nu}}$ を代入して

$$J = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\mu}{r^2}(w_r^2 - w_\theta^2) + \Big(\frac{2c_1}{r^2} - \frac{\mu}{\nu}c_2 r^{\frac{\mu}{\nu}}\Big)w_r w_\theta\right\} r\,dr\,d\theta.$$

これより簡単な計算で

$$(6)\quad \begin{array}{l} |J| \le c_0\|\nabla\mathbf{w}\|^2 \\ \left(c_0 = \frac{|\mu|+|c_1|}{2}\left(\log\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \frac{|\mu c_2|}{2\nu}\int_{R_1}^{R_2} r^{1+\frac{\mu}{\nu}}\log r\,dr\right) \end{array}$$

を得る．したがって $|\mu|, |c_1|, |c_2|$ が十分小さければ，すなわち $|\mu|, |b_1|, |b_2|$ が十分小さければ，解が一意であることが示せる．$\mu = -2\nu$ のときも同様である．　証明終．

注意 2 $\mu = 0$ ならばここで得られた $\mathbf{u}$ はよく知られた Couette 流である．

注意 3 これらの解は ν に依存する点で興味深い．実際 φ を D で調和なスカラー値関数とすれば $\mathbf{u}=\nabla\varphi$, $p=-|\nabla\varphi|^2/2$ は $\Delta\mathbf{u}=0$ であるから，任意の ν にたいして

$$
(7)\quad \begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\dfrac{1}{\rho}\nabla p &= \mathbf{0}\ \text{ in }\ D \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0\ \text{ in }\ D \end{cases}
$$

をみたす．

注意 4 境界値 $\mathbf{b}$ が θ にも依存する次のような場合に得られた結果を記しておく．

$$
(8)\quad \begin{cases} \mathbf{b} \ = \ \sum\limits_n(\alpha_n^i\cos n\theta+\beta_n^i\sin n\theta)\mathbf{e}_r \\ \qquad +\sum\limits_n(\beta_n^i\cos n\theta-\alpha_n^i\sin n\theta)\mathbf{e}_\theta, \\ \qquad \text{on } |x|=R_i, i=1,2 \end{cases}
$$

ただし $\alpha_n^i,\beta_n^i,\gamma_n^i,\delta_n^i$, は，次の関係式をみたす定数とする．

$$
(9)\quad \begin{cases} \alpha_n^1R_1^{1-n} &= \alpha_n^2R_2^{1-n}, \\ \beta_n^1R_1^{1-n} &= \beta_n^2R_2^{1-n}, \end{cases} \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots
$$

このとき境界値問題 (1) (8) は次の形の解をもつ．

$$
(10)\begin{cases} \mathbf{u} &= u_r\mathbf{e}_r+u_\theta\mathbf{e}_\theta \\ u_r &= \sum\limits_n\left(\dfrac{r}{R_1}\right)^{n-1}(\alpha_n^1\cos n\theta+\beta_n^1\sin n\theta) \\ u_\theta &= \sum\limits_n\left(\dfrac{r}{R_1}\right)^{n-1}(\beta_n^1\cos n\theta-\alpha_n^1\sin n\theta). \end{cases}
$$

これらは調和多項式であるから ν に依存しない．しかし$\alpha_0^1\neq 0$ ならば境界値は $(\mathrm{H})_0$ はみたすが (H) はみたさない．

3　安定性

Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題を考える.

$$
(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= \nu\Delta\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \dfrac{1}{\rho}\nabla p, \quad x\in D, \quad t>0, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x\in D, \quad t>0, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b}, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x\in\partial D, \; t>0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{a}, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x\in D, \quad t=0. \end{cases}
$$

初期値は $\mathbf{a}\in H_\sigma$ とする. 境界条件は (3) のものとし定理 1 で得られた定常解を $\mathbf{u}_0$, p_0 とする. $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{w}$, $p=p_0+q$ として $\mathbf{w}, q$ についての方程式に書き直す.

$$
(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} &= \nu\Delta\mathbf{w} - (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{w} - (\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{w} \\ & \qquad\qquad -(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0 - \dfrac{1}{\rho}\nabla q, \\ \operatorname{div}\mathbf{w} &= 0, \\ \mathbf{w}|_{\partial D} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{w}|_{t=0} &= \mathbf{a}-\mathbf{u}_0. \end{cases}
$$

定義 2 $\mathbf{w}\in L^2(0,T:V)$ は

$$
\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mathbf{w},\mathbf{v}) + \nu(\nabla\mathbf{w},\nabla\mathbf{v}) \\ \quad = ((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{w}) + ((\mathbf{u}_0\cdot)\mathbf{v},\mathbf{w}) - ((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{for} \quad \forall\mathbf{v}\in V \\ \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{a}-\mathbf{u}_0 \end{cases}
$$

をみたすとき (12) の弱解であるという. また $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{w}$ を (11) の弱解とよぶ.

$\nu > c_0$ ならば $\forall T > 0$ に対して (11) の弱解は一意であること，またガレルキン近似によって弱解が存在することを示せる（たとえば [8]）.

このとき次が成り立つ.

定理 2 $\nu > c_0$ ならば $\mathbf{u}_0$ は漸近安定である．すなわち正数 α_0 が存在して (11) の弱解 $\mathbf{u}$ に対し

$$||\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0|| \leq e^{-\alpha_0 t}||\mathbf{a} - \mathbf{u}_0||.$$

証明 定義 2 の第 1 式で $\mathbf{v} = \mathbf{w} \equiv \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ とすれば

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\mathbf{w}||^2 + \nu||\nabla \mathbf{w}||^2 = -((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) \leq c_0||\nabla \mathbf{w}||^2$$

ここで (6) を用いた．Poincaré の不等式より $c_D > 0$ が存在して

$$c_D||\mathbf{w}|| \leq ||\nabla \mathbf{w}||, \qquad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}$$

従って $\alpha_0 = {c_D}^2(\nu - c_0)$ とおけば仮定より $\alpha_0 > 0$ で

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\mathbf{w}||^2 + \alpha_0||\nabla \mathbf{w}||^2 \leq 0$$

両辺を積分して結論を得る． 証明終.

参考文献

[1] Amick, C. J., Existence of solutions to the nonhomogeneous steady Navier-Stokes equations, Indiana Univ. Math. J. **33**(1984), pp.817-830.

[2] Berker, R., Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, Handbuch der Physik Bd VIII/2 pp.1-384, Springer, Berlin, 1963.

[3] Fujita, H., On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equation, J.Fac.Sci., Univ.Tokyo, Sec.I, **9**(1961), pp59-102.

[4] Ladyzhenskaya, O. A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York, 1969.

[5] Leray, J., Etude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, J. Math. Pure Appl. **12**(1933) pp.1-82.

[6] Morimoto, H., A solution to the stationary Navier-Stokes equations under the boundary conditon with non-vanishing outflow, Memoirs of the Institute of Science and Technology, Meiji Univ., Vol.31(1992), pp.7-12.

[7] Takesita, A., A remark on Leray's inequality, Pacific J.Math., **157**(1993), pp.151-158.

[8] Temam, R., Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam, 1977.