数理解析研究所講究録
935巻 1996年 134-142

非線型固有値と領域特異摂動

東工大理　小沢 真
(Shin Ozawa)

1. Introduction

M : $\mathbb{R}^3$ の有界領域, ∂M : C^∞

w : M の fixed point

$B(\varepsilon; w) \equiv B_\varepsilon$: w 中心, 半径 ε の球

$M_\varepsilon = M \setminus \overline{B(\varepsilon; w)}$ とおく。

$p \in (1,5)$ とする。

minimizing problem を考える。

(1) $$\lambda(\varepsilon) = \inf_{X_\varepsilon} \int_{M_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx$$

$$X_\varepsilon = \{ u ; u \in H_0^1(M_\varepsilon), \|u\|_{L^{p+1}(M_\varepsilon)} = 1, u \geq 0 \}$$

ここで扱かう主問題は次のとおりである。

問題　$\lambda(\varepsilon)$ の $\varepsilon \longrightarrow 0$ のときの漸近状態をしらべよ。

Sobolev 埋めこみ定理によって、次の事がわかる。

* $p \in (1,5)$ とすると、少なくとも1つの positive solution u_ε が存在して (1) を attain する。u_ε は

$(2)_\varepsilon$ $$-\Delta u_\varepsilon = \lambda(\varepsilon) u_\varepsilon^p \quad \text{in } M_\varepsilon$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{on } M_\varepsilon$$

注. $p\in(1,5)$のときは $H^1(M_\varepsilon)\hookrightarrow L^{p+1}(M_\varepsilon)$ が compact 埋め込みとなるが，$p=5$ のときは $H^1(M_\varepsilon)\hookrightarrow L^6(M_\varepsilon)$ は連続うめ埋みであるが compact 性をもたず，上に掲げた問題 $\lambda(\varepsilon)$ の $\varepsilon\to0$ での挙動は不明である。$p\in(1,5)$に対しては問題は良い結果をもつことがわかった。

また，

$$(3)\qquad \lambda(0)=\inf_X\int_M|\nabla u|^2dx$$

$$X=\{u: u\in H_0^1(M),\ \|u\|_{L^{p+1}(M)}=1,\ u\geq 0\}$$

とする。

$$A: \underset{H^2(M)\cap H_0^1(M)}{\overset{\in}{v}} \longrightarrow \underset{L^2(M)}{\overset{\in}{\Delta v}}$$

なる Laplace operator とする。

定理を述べるために，次の property (p,M) を導入する。

Property (p,M): $-\Delta u=\lambda u^p$ in M, under the Dirichlet condition on ∂M なる positive solution は一意的である。

Property (p,M) をみたす M の example は Gidas-Ni-Nirenberg Commun. Math. Phys 68 (1979) 及び Dancer. J of Diff. Equations 74 (1988) によって知られている。Gidas-Ni-Nirenberg の場合は $M=B_R$（半径 R の球）.

次の結果が主定理である。

定理1. $p\in(1,5)$ を固定する。M が property (p,M) をみたすとする。さらに $\mathrm{Ker}(A+\lambda p u^{p-1})=\{0\}$ とする。

そのとき、

(4) $\lambda(\varepsilon)-\lambda=4\pi\varepsilon u(w)^2+o(\varepsilon)$

as $\varepsilon\to 0$. (Tōhoku Math. J. 45 (1993))

定理1の Corollary として

系1. (T. Osawa and S. Ozawa Proc. Japan Acad 69 (1993))

$p^*(M)>1$ が存在して、$p\in(1,p^*(M))$ なるすべての fixed された p に対して、M が (p,M) 条件をみたせば、(4) がなりたつ。

だから、球の場合、実際に (4) がなりたつ。w は球のどの点でもよい。定理1は次の定理2と Dancer の Theorem 3 により得られる。

定理2 $p\in(1,5)$ とする。M が さらに $(2)_\varepsilon$ をみたす positive solution u_ε が unique とする。 property (p,M) をみたすとする。そのとき (4) がなりたつ。

定理3 (Dancer, Math Z. 206 (1991))
$p\in(1,5)$ とする。M が property (p,M) をみたすとする。
そのとき $\mathrm{Ker}(A+\lambda p u^{p-1})=\{0\}$ ならば、$(2)_\varepsilon$ をみたす u_ε は unique である。

今後の課題として、$-\Delta u=\lambda u^p$ in M, $u=0$ on ∂M なる positive solusition が1個とは限らず n 個ある場合の研究がある。また $M\subset\mathbb{R}^3$ ではなく $M\subset\mathbb{R}^d$ $(d\geq 4)$ の場合どうなるかは、今の所不明であり、興味深い。

定理1の証明のoutlineに入るまえに、この定理1の周辺事柄について少しだけ言及しておこう。

$$(5) \qquad \mu(\varepsilon) = \inf_{u \in X_\varepsilon} \left(\int_{M_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + k \int_{\partial B_\varepsilon} u^2 d\sigma_x \right),$$

$X_\varepsilon = \{ u \in H^1(M_\varepsilon),\ u = 0 \text{ on } \partial M,\ u \geq 0 \text{ in } M_\varepsilon,\ \|u\|_{L^{p+1}(M_\varepsilon)} = 1 \}$

$p \in (1,5)$ とする。そのとき (5) を attain する u_ε が少なくとも1つ存在して、

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon(x) = \mu(\varepsilon) u_\varepsilon(x)^p & \text{in } M_\varepsilon \\ u_\varepsilon(x) = 0 & \text{on } \partial M \\ k u_\varepsilon(x) + \left(\dfrac{\partial}{\partial \nu_x}\right) u_\varepsilon(x) = 0 & \text{on } \partial B_\varepsilon \end{cases}$$

ここで $\dfrac{\partial}{\partial \nu_x}$ は M_ε の boundary の点での exterior normal vector. $S_\varepsilon = \{$(5) を attain する positive function u_ε の全体$\}$ とする。そのとき、

<u>定理 3</u> (submitted).

Fix $p \in (1,2)$. そのとき ε に無関係な定数 C が存在して

$$\sup_{u_\varepsilon \in S_\varepsilon} \sup_{x \in M_\varepsilon} u_\varepsilon(x) < C.$$

以下は著者の意見だが、$\mu(\varepsilon)$ の $\varepsilon \to 0$ での挙動をしらべるためには、Dancer の定理の Robin condition 版が必要となろう。Dancer に直接連絡をとったが、彼の意見は、「その場合にも Robin condition 版が成立すると予想されるが、証明には、

工夫が必要となろう。」

2. Sketch（定理2の証明）

$$\lambda(\varepsilon)-\lambda(0)=\int_0^{\varepsilon}\lambda'(t)\,dt$$

を用いる。ところで、次の結果が知られている。

$$\lambda'(t)=\int_{\partial B_t}\left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma_t \qquad \text{(S. Roppongi)}$$

だから、結局 Claim $\lambda'(t)=4\pi u(w)^2+o(1)$ as $t\to 0$

を証明すればよい。claim の証明であるが、一見事態は複雑になったように見える。すなわち、$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}$ という量があらわれて、余計に解析しにくく思えるからである。そこで、次の idea を導入する。

$$u_\varepsilon=\lambda(\varepsilon)\,\mathbb{G}_\varepsilon u_\varepsilon^{\,p}$$

$\mathbb{G}_\varepsilon$：M_ε での ∂M_ε と Dirichlet 条件を置いたときの $-\Delta$ の Green 関数による Green 作用素。

$$G_\varepsilon(x,y):\quad -\Delta_x G_\varepsilon(x,y)=\delta(x-y),\quad x,y\in M_\varepsilon$$
$$G_\varepsilon(x,y)=0\quad x\in\partial M_\varepsilon$$

$$G(x,y):\quad -\Delta_x G(x,y)=\delta(x-y),\quad x,y\in M$$
$$G(x,y)=0\quad x\in\partial M$$

Schiffer-Spencer によって（彼らは2次元の場合だが）G_ε は次の如く近似できることがわかっている。

$$P_\varepsilon(x,y)=G(x,y)-4\pi\varepsilon\,G(x,w)\,G(w,y)$$

とする。 そのとき

$$G_\varepsilon(x,y) \sim p_\varepsilon(x,y)$$ （～のいみは、ここでは特に問いつめない）

$$\mathbb{G}_\varepsilon f(x) = \int_{M_\varepsilon} G_\varepsilon(x,y) f(y)\,dy$$

$$\mathbb{P}_\varepsilon f(x) = \int_{M_\varepsilon} p_\varepsilon(x,y) f(y)\,dy$$

$$\mathbb{G}\, g(x) = \int_M G(x,y) g(y)\,dy$$

次の補題がcrucialである。

補題 1

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in M \setminus \overline{B_\varepsilon} \quad ① \\ u(x) = 0 & x \in \partial M \quad ② \\ u(x) = L(\theta) & x = w + \varepsilon\theta, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in S^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_{S^2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)(x) \right)^2 \Big|_{\partial B_\varepsilon} \varepsilon^2 \, d\theta \le C\left(\max_\theta L(\theta)^2 + W\right)$$

$$W = \left(\max_\theta L(\theta)^2\right)^{\sigma/(1+\sigma)} \left(\|L\|^2_{H^1(S^2)} + \|L\|^2_{C^{1+\sigma'}(S^2)} \right)^{1/(1+\sigma)}$$

for $\sigma' > \sigma > 0$. つまり $L(\theta)$ が小さければ $\int_{S^2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)(x)\right)^2\Big|_{\partial B_\varepsilon} \varepsilon^2 d\theta$ も小さい。この補題の証明はnon-trivialであって工夫を要する。

さて、$\mathbb{G}_\varepsilon$ を $\mathbb{P}_\varepsilon$ が近似するその意味は $u = (\mathbb{P}_\varepsilon - \mathbb{G}_\varepsilon) f$ とおけば u は①，②をみたし、補題1における $L(\theta)$ は小さい。したがって、この事を用いて、次の補題2が示される。

補題2. $h, C>0$ が存在して,

$$\int_{S^2}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}(\mathbb{P}_\varepsilon-\mathbb{G}_\varepsilon)f\right)^2_{|\partial B_\varepsilon}\varepsilon^2\,d\theta\le C\varepsilon^h\|f\|_{L^q(M_\varepsilon)},$$

が $f\in L^q(M_\varepsilon)$ $q>3$ に対して成立する.

ところで, $p\in(1,5)$ のとき u_ε を(1.1)の解とすると

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}\ \sup_{x\in M_\varepsilon}|u_\varepsilon(x)|<C<\infty$$

が成立することがわかる. $u_\varepsilon(x)=\lambda(\varepsilon)\mathbb{G}_\varepsilon u_\varepsilon^p$ を用いて示される. したがって補題2に於いて f の所に u_ε を代入することが可能となる。

補題3. $p\in(1,5)$ を固定. Property(p,M) を仮定, そのとき

$$\lambda(\varepsilon)\longrightarrow\lambda(0)\quad\text{as }\varepsilon\to0.$$

注. Property(p,M) をはずしても, これは言えそうであるが, その場合証明は nontrivial になろう。

定理2の証明

$$\lambda'(t)=\lambda(t)^2(K_1+K_2+K_3)$$

$$K_1=\int_{S^2}(\partial\mathbb{P}_t u_t^p/\partial\nu_x)^2t^2\,d\theta$$

$$K_2=2\int_{S^2}(\partial\mathbb{P}_t u_t^p/\partial\nu_x)(\partial(\mathbb{P}_t-\mathbb{G}_t)u_t^p/\partial\nu_x)t^2\,d\theta$$

$$K_3=\int_{S^2}(\partial(\mathbb{P}_t-\mathbb{G}_t)u_t^p/\partial\nu_x)^2t^2\,d\theta$$

となる. 補題2より $K_3=O(t^\nu)$, $\nu>0$ がわかる. シュワルツの不等式と補題2より, もし $K_1\le C<+\infty$ が示されれば $K_2=O(t^{\nu/2})$ がわかる。

<u>Claim</u> $K_1 = O(1)$.

このclaimが正しければ K_1, K_2, K_3 の中で K_1 のみが主項となる。さて

$$\lambda(t)^2 K_1 = L_1 + L_2 + L_3,$$

$$L_1 = \lambda(t)^2 \int_{S^2} (\partial G \tilde{u}_t^p / \partial \nu_x)^2 t^2 d\theta$$

$$L_2 = -8\pi t \lambda(t)^2 \int_{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x} G \tilde{u}_t^p(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x} G(x,w) G \tilde{u}_t^p(w)\right) t^2 d\theta$$

$$L_3 = 16\pi^2 t^2 \lambda(t)^2 \int_{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} G(x,w)\right)^2 (G \tilde{u}_t^p(w))^2 t^2 d\theta$$

である。ここで $\tilde{u}_t$ は u_t を M へextensionしたもので B_ε 上 0 なる関数である。さて $L_1 = O(t^2)$, $L_2 = O(t)$, $L_3 = O(1)$ はすぐわかる。問題なのは L_3 の部分であるが、

$$\frac{\partial}{\partial \nu} G(x,w) = \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{4\pi} |x-w|^{-1}, \quad (G \tilde{u}_t^p(w))^2 \to (G u^p(w))^2 + o(1)$$

なども用いて計算することによって、

$$\lambda(t)^2 K_1 = 4\pi \lambda(0) G u^p(w) + o(1)$$

がわかる。まとめて、

$$\lambda'(t) = 4\pi u(w)^2 + o(1).$$ 定理の証明おわり。

さて、ここで筆者が強調したいのは、非線型固有値と領域摂動および、非線型偏微分方程式と領域摂動の分野は、はじまったばかりであり、十分研究するに値する肥沃な未開拓地であるということである。クーラン研究所のNirenbergの部屋を訪れたとき、彼にそのような研究をどう思うかと尋ねたところ、それは研究に値するから、ぜひ

やりなさいということであった。その理由の1つとして非線型の場合、半線型方程式に限っても解は一般にn個あり、そのような場合に領域を摂動することによって解達がどう振る舞うかを調べることによって、色々なことがわかるであろうということであった。それを言われたのは1983年のことである。しばらく忘れていた、その事を思い出して、近年研究をはじめたという具合である。