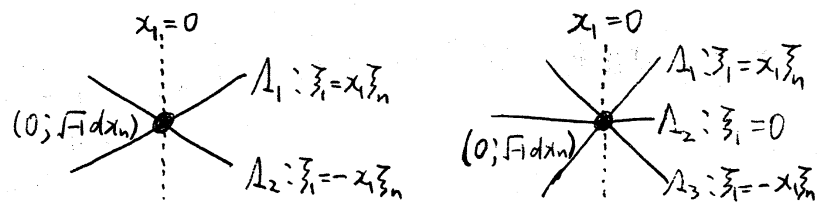


$x_1=0$ で多重特性的な 2 階または 3 階双曲型方程式の
マイクロ関数解の台の分岐

東大数理 (本郷) D3 山根 英司
(Hideshi Yamane)

主表象が $(\xi_1 - x_1 \xi_n)(\xi_1 + x_1 \xi_n)$ あるいは $(\xi_1 - x_1 \xi_n) \xi_1 (\xi_1 + x_1 \xi_n)$ となる 2 階ないし 3 階マイクロ双曲型方程式のマイクロ関数解の台の (あるいは distribution 解の WFA の) 形状について調べよう。

$x_1 \neq 0$ では real, simple characteristics なので S.K.K の伝播定理が成り立つ。陪特性帯は x_1 で parametrize される。一方, $x_1=0$ では $\xi_1 = \pm x_1 \xi_n$ (と $\xi_1=0$) が交わっており, ここで何が起きるのかを知りたい。類似の問題 (2 階双曲型, C^∞ カテゴリー) が Alinhac, 谷口-戸崎などによ, て扱われているが, 3 階は初めてである。また, $x_1 D_1 + \text{lower}$ を Hanges, 大阿久などが扱っている。



考える方程式は, 2階のとき

$$P = D_1^2 - \frac{1}{\lambda} (\beta_1 + \beta_2) x_1 D_n D_1 - \beta_1 \beta_2 x_1^2 D_n^2 - \frac{2\sigma}{\lambda} D_n$$

$$\beta_1, \beta_2 \in i\mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \beta_1/\lambda > \beta_2/\lambda$$

$\sigma = \sigma(x'', D') \in \Sigma(0)_{(0); \sqrt{\lambda} dx_n}$ とする。ただし

$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x'', x_n) = (x_1, x')$ のように書く。

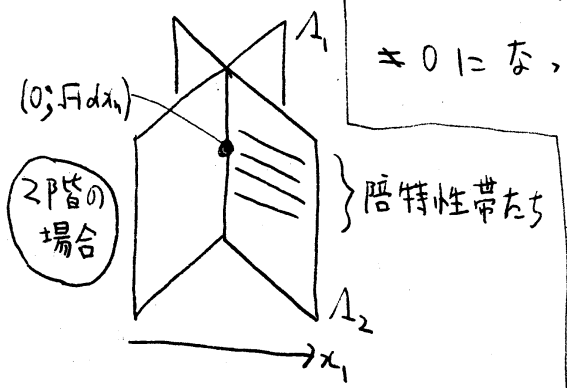
3階のときは

$$P = D_1^3 - x_1^2 D_n D_1 + 2(a-l) D_n D_1 + \{2(a+l) - 3\} x_1 D_n^2$$

$a = a(x'', D') \in \Sigma(0)_{(0); \sqrt{\lambda} dx_n}$, $l = l(x'', D') \in \Sigma(0)_{(0); \sqrt{\lambda} dx_n}$
 で $[a, l] = 0$ とする。

Λ_j は図に示した通り, $\text{Char } P = \bigcup_{j=1}^{\text{ord } P} \Lambda_j$ である。

$\pm x_1 > 0$ において Λ_j のみ台をもつ解を, $\pm x_1 > 0$ における J-pure 解 と呼ぶ。つまり $(\Gamma_{\Lambda_j} \cap \{\pm x_1 > 0\} \subset \mathbb{C}^P)_{(0); \sqrt{\lambda} dx_n}$ の元のことである。
 $(0; \sqrt{\lambda} dx_n)$ から出る Λ_j の陪特性帯上では $\neq 0$ になっていて, Λ_k ($k \neq j$) の陪特性帯上では 0 ということでもある。



さて, 柏原-河合によれば $\Gamma_{\{\pm x_1 > 0\}} \mathbb{C}^P_{(0); \sqrt{\lambda} dx_n} \cong \mathbb{C}^P_{(0); \sqrt{\lambda} dx_n}$
 $\cong \bigoplus^{\text{ord } P} \mathbb{C}^N_{(0'); \sqrt{\lambda} dx_n}$

$N = \mathbb{R}^{n-1} = \{x_1 = 0\} \subset \mathbb{R}^n$

つまり ① 解は $x=0$ をこえて一意に延びる
 ② 初期値問題・境界値問題が一意可解) であった。

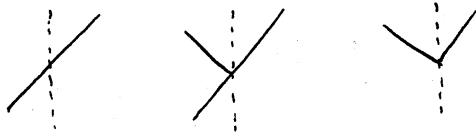
これをふまえて、我々が考える問題は、

問題1 $\forall f \in C_N(0; \int dx_n)$ を考えるとき、これを

2階のとき Dirichlet) データにも j-pure な解はあるか? 一意か?
 3階のとき Neumann

(注) 下線部扱きなら $k-k$ で解決済)

問題2 $x_1 > 0$ における j-pure 解は (一意に延びるわけだが) 境界の向こう側ではどのような台をもつか? 例えば2階のとき $x_1 > 0$ の 1-pure 解は下図のうちどれになるか?



この2つを扱うために次のように定式化する。写像

$$E_j^+ : C_N(0; \int dx_n) \longrightarrow (\Gamma_{\Omega_j \cap \{x_1 > 0\}} C^P)_{(0; \int dx_n)} =: P_j^+ \\ f(x') \longmapsto (E_j^+ f)(x) \quad \text{↑} \\ \text{j-pure 意}$$

をつくる。 $x_1 > 0$ における j-pure な基本解と呼ぶ。

E_j^+ を次の可換図式で定義する。

$$\begin{array}{ccc}
 \overset{ord P}{\bigoplus} C_{N, (0'; \sqrt{1} dx_n)} & \xrightarrow{\bigoplus_j E_j^+} & \bigoplus_j P_j^+ = (\Gamma_{\{x_1 > 0\}} C^P)_{(0; \sqrt{1} dx_n)} \\
 & \searrow L^+ & \downarrow \text{境界値} \\
 & & \overset{ord P}{\bigoplus} C_{N, (0'; \sqrt{1} dx_n)}
 \end{array}$$

L^+ は分数階マイクロ微分作用素の $ord P \times ord P$ 行列になる。これが逆をもつことがわかって、 L^+ も $\bigoplus E_j^+$ も同型。特に各 E_j^+ も同型。簡単のため2階で説明すると、同型 $\bigoplus E_j^+$ を介して $\bigoplus^2 C_N$ の $(1, 0)$ の型の元は 1-pure 解, $(0, 2)$ の形の元は 2-pure 解に同一視される。 $-x_1 > 0$ でも同様のことがわかる。

$$\bigoplus_j P_j^- \xleftarrow{\bigoplus E_j^-} \bigoplus^2 C_N \xrightarrow{L^-} \bigoplus^2 C_N \xleftarrow{L^+} \bigoplus^2 C_N \xrightarrow{\bigoplus E_j^+} \bigoplus_j P_j^+$$

$x_1 > 0$ から境界値を取って、今度はそれを given として $x_1 < 0$ で解くという写像

問題1は L_{\pm} を見ればわかる。実際、 L_{\pm} が

$$\begin{pmatrix} \text{elliptic} & * \\ \text{elliptic} & * \end{pmatrix}$$

となっていれば肯定的に解ける。

次に $B := (L^-)^{-1} L^+$ とおき、分岐行列と名づける。成分は高々 0 階のマイクロ微分作用素になる。B を見れば問題2がわかる。 $x_1 > 0$ の 1-pure 解についていうと、B が例えば

$\begin{pmatrix} \text{elliptic} & * \\ \text{elliptic} & * \end{pmatrix}$ となっていれば $B \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{ellip}) f \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (\text{ellip}) f \end{pmatrix}$

であり, $\begin{matrix} \diagup \\ \diagdown \end{matrix}$ となる。 $\begin{pmatrix} \text{ellip} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ なら $\begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix}$ である。

このあたりで定理をきちんと述べておこう。

★2階の場合

$$c = \frac{\frac{3}{2}\beta_1 - 2\beta_2 + \sigma}{\beta_1 - \beta_2} \in \Sigma(0), \quad c' := \sigma_0(c)(0; Fdx_n) \text{ とおく。}$$

$c' \notin \frac{1}{2} + \mathbb{N}_0$ かつ $c' \notin 1 - \mathbb{N}_0$ とする。 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。

定理1

問題1は肯定的に解ける。さらに, f によらずあるマインク微分作用素 $Q(x', D')$ が存在して,

$$\text{Neumann } \bar{\Delta}^{-1} f = Q(x', D') f(x')$$

定理2

case 1 $c' \notin \frac{1}{2} + \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ のとき B の全成分は elliptic

case 2 c が定数で, $c = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$ のとき $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

case 3 c が定数で, $c = 2, 3, 4, 5, \dots$ のとき $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

☆3階の場合

定理3

定理1と同様。残り2つの境界値が f と適当な作用素で書けることも同様。

定理4

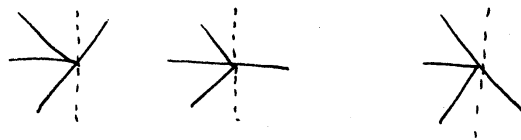
$a' := \sigma_0(a)(0; \int dx_n)$, $b' := \sigma_0(b)(0; \int dx_n)$ とおく。 (a', b')
 $\notin Z := \{(a, b) \in \mathbb{C}^2; a \in -N_0 \text{ or } a+b \in \frac{3}{2} + N_0 \text{ or } b \in -N_0\}$
 とする。 $\mathbb{C}^2 \setminus Z$ で正則な $d_1, d_2, d_3 \neq 0$ が存在し, $\pm d_1 \pm d_2 \pm d_3 \neq 0$

$$B = \begin{pmatrix} d_1 - d_2 - d_3 & 2d_1 & 2d_1 \\ 2d_3 & -d_1 - d_2 + d_3 & 2d_3 \\ 2d_2 & 2d_2 & -d_1 + d_2 - d_3 \end{pmatrix}$$

ただしここで $d_k = d_k(a(x'), D'), b(x'), D') \in \Sigma(0)$

注 $\sigma_0(d_k(a(x'), D'), b(x'), D') = d_k(\sigma_0(a), \sigma_0(b))$

ゆえに $(a', b') \in \mathbb{C}^2 \setminus Z$ が generic な値を取るとき B の全成分が elliptic で



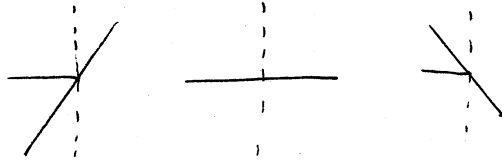
のような branching がおきる。

d_1, d_2 etc. の zeros を完全に求めるのは難しいが, 次の結果がある。

系5 (non-generic case)

a, b が定数で $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ のとき

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



以下で証明の方針を述べる。まず2階の場合を説明する。
 E_2^+ の構成法を述べる。

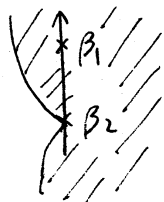
$\sigma \in \mathbb{C}$ として

$$G = (\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2) D_\beta^2 + \left\{ \frac{7}{2}\beta - 2(\beta_1 + \beta_2) + \sigma \right\} D_\beta + \frac{3}{2}$$

は β について affine な変換で Gauss の超幾何作用素

$$x(1-x) D_x^2 + \left\{ c - \left(\frac{3}{2} + 1 + 1 \right) x \right\} D_x - \frac{3}{2} \cdot 1$$

になる。



のような正則域をもつ解 $V(\beta, \sigma)$ は σ についても正則。 σ に $\sigma(x', D')$ を代入すると
 $V(\beta, \sigma(x', D')) \in \Sigma(0)$ となる。

$\forall f \in C_N$ につき $V(\beta, \sigma(x', D'))f \in C_{x'} \mathcal{O}_\beta$ となる。より詳しく $B \cap (虚軸の右半近傍)$ から来ている。よって $\text{Re } \beta \rightarrow 0$ の境界値 $u \in \mathbb{C}$ で、しかも G の解。 $\text{Im } \beta$ の dual 変数 < 0 なるところで、 $\beta \neq \beta_2$ の fiber では $u = 0$ 。 $\beta = \beta_2$ 上では



左図のようなところかゝりの両側かゝりの境界値の差と思っても同じで、これなご台の形状はスイカ割り定理でわかる、つまり陪特性帯の union である。

逆 Legendre 変換 (ζ, x', ξ') \rightarrow $(\tilde{x}_1, x', \zeta')$ により,

$$\left[-\tilde{x}_1 D_{\zeta'} (\tilde{x}_1 D_{\zeta'} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{\lambda} (\beta_1 + \beta_2) \tilde{x}_1^2 D_{\zeta'} D_n + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_2 \tilde{x}_1^2 D_n^2 + \frac{1}{\lambda} \tilde{x}_1 \delta D_n \right] u = 0$$

の $\tilde{x}_1 > 0$ における解で, $\text{supp } u = \{ \xi_1 = \frac{1}{\lambda} \beta_2 \xi_n \}$ なるものをと得る。 $\tilde{x}_1 = \frac{1}{2} x_1^2 (x_1 > 0)$ を u に代入したものを $E_2^+ f$ とおく。

ところで, 上記の ODE の ∞ での特性べき数が $1, 3/2$ であることより, $\forall f \in C\mathcal{O}(\text{cut}) + \zeta^{-1/2} C\mathcal{O}(\text{cut})$

である。才 | 項だけなご mild microfunction を与える。いまの場合は従来の mildness の理論を少し手直しすれば u の境界値 ($x_1=0$ 上の) を求めることができる。すなわち L^2 が計算できる。大ざっぱにいうと

$$V(\zeta, \delta(x'), D') = h_{-1}(x', D') \zeta^1 + h_{-3/2}(x', D') \zeta^{-3/2} + \dots$$

$$\text{と展開するとき } \begin{cases} u(+0, x') = \text{const } h_{-1} f \\ D_n u(+0, x') = \text{const } D_n^{1/2} h_{-3/2} f \end{cases}$$

となる。(片岡清臣)

以上のODEについて必要だったことは

- { ちょうどいい正則域をもつ解をつくる
- { その解のゆでの展開係数を求める

の二つであって、これは接続問題の一種である。Gauss については接続公式が既知なので簡単である。(3階は難しい。)

次に3階の場合を説明する。Gauss の代わりに Pochhammer の超幾何方程式を使う。(特殊関数の人たちの間では有名な方程式らしい。)

我々の方程式は

$$\left[(\zeta^3 + 3) D_\zeta^3 + \left\{ \frac{15}{2} \zeta^2 - i(a-l)\zeta + (a+l) + \frac{3}{2} \right\} D_\zeta^2 + \{12\zeta - 2i(a-l)\} D_\zeta + 3 \right] V(\zeta) = 0$$

という $\zeta = \pm i, 0, \infty$ に確定特異点をもつ Fuchs 型方程式で

$$\int_*^\infty (w-i)^{a-1} w^{-(a+l)+\frac{1}{2}} (w+i)^{l-1} (w-\zeta)^{-1} dw$$

$$* = \pm i, 0 \quad (\text{積分は有限部分})$$

において積分路を左半平面内に取れば、右半平面で正則な解であって、*以外で虚軸をこえて延びるものが得られる。

最後の研究集会以後の進展について述べる。

$$P = D_1^2 - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)x_1 D_n D_1 - \beta_1 \beta_2 x_1^2 D_n^2 - \frac{2\alpha}{\lambda} D_n$$

$$+ x_1 \alpha_{-1}(x_1^2, x_1', D') D_1 + \alpha_0(x_1^2, x_1', D')$$

α は定数 $\in \mathbb{C}$
 $\text{ord } \alpha_{-1} \leq -1, \text{ ord } \alpha_0 \leq 0$
 α_{-1}, α_0 は \tilde{x}_1, x_n については多項式

とす。

このとき定理1, 定理2 case 1 と同様のことが成立する。擾動項は逐次近似で処理する。 $x_1^2 P$ に $\tilde{x}_1 = \frac{1}{2} x_1^2 (\Rightarrow \tilde{x}_1 D_1 = \frac{1}{2} x_1 D_1)$ を代入してから Legendre 変換すると

$$\left[G - \sum_{m=1}^{\text{有限}} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{m,j}(x_1', D') \zeta^j D_3^m \right] V = 0, \text{ ord } \alpha_{m,j} \leq -m$$

となる。 $\{V_k(\zeta, x_1')\}_k$ を

$$G V_0 = 0$$

$$(*)_k : G V_{k+1} = \left(\sum \sum \alpha_{m,j} \zeta^j D_3^m \right) V_k$$

をみたすようにつくる。 $(*)_k$ の右辺は $\Sigma x_1' \otimes \mathbb{Q}_3$ における有限和。 G について項別に定数変化法を用いて V_1 も同様の和。 V_k ($k \geq 2$) も同様の和である。 $\sum_k V_k$ は $\Sigma x_1', \zeta$ において収束することが示される。また $\text{ord } \alpha_{m,j} \leq -1$ ($\forall m, \forall j$) より $\sigma_0(L_+)$, $\sigma_0(B)$ には V_k ($k \geq 1$) は寄与せず, 成分の楕円性をくずさない。

3階の場合は正則域を control しながら非斉次方程式を解くのに定数変化法では不十分なので, 計算が難しくなるが,

やはり, a, b が定数のときに 0 階振動をつけることができようである。

問題を下さ, 片岡先生, ODE について助言を下さ, 大岩崎克則先生, 落合啓之先生に感謝します。

References

柏原-河合 Microhyperbolic Pseudo-differential Operators I
J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 359-404

片岡 Microlocal theory of boundary value problems I.
J. Fac. Sci. UTYO 27 (1980) 355-399

大阿久 A Canonical Form of a System of Microdifferential
Equations with Non-Involutory Characteristics and
Branching of Singularities
Invent. math, 65, 491-525 (1982)

青木 Calcul Exponentiel des Opérateurs Microdifférentiels
d'Ordre Infini I
Ann. Inst. Fourier, Grenoble 33, 4 (1983), 227-250