数理解析研究所講究録
936巻 1996年 50-54

A new outer conjugacy invariant and a classification of automorphisms of subfactors

河東泰之（東大・数理）
(YASUYUKI KAWAHIGASHI)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

1 Introduction

この研究の目的は，subfactor $N \subset M$の自己同型（すなわち，Mの自己同型で，Nをglobalに動かさないもの）をouter conjugacyで分類するための新しい不変量*higher obstruction*を導入し，それに基づく分類定理を示すことにある.

簡単のため，以下すべて$N \subset M$は，II_1型のstrongly amenable subfactorとし，さらにM [resp. M_1] 内にはN [resp. M] のnon-trivial normalizerはないものとする.（そのようなnormalizerがあれば，つまらないタイプのintermediate subfactorがあることになる.）$\alpha \in \mathrm{Aut}(M, N)$を取り，この分類のための不変量を考えてみる．これまでに知られているものとしては，αをJones towerに延長してhigher relative commutant上の作用を見るというLoi invariant [17] があり，Popa [20] は，discrete amenable groupのstrongly outerな作用は，Loi invariantで (up to cocycle conjugacyで) 完全に分類できることを示した.（関連した一般的結果として [2] もある.）ここで，$\alpha \in \mathrm{Aut}(M, N)$がstrongly outerであるとは，長田–幸崎 [3] やPopa [20] で定義されたように，αを自然にJones towerに拡張したあと，

$$[\exists a \in M_k \quad \forall x \in N \quad ax = \alpha(x)a] \Rightarrow a = 0$$

となることである．すなわち，一種のfreenessである．これは大定理であるが，しかし，strongly outerでないような“おもしろい”subfactorの自己同型はいくつも存在するのである.（私がこれまで，orbifold constructionで使って来たautomorphismはすべて，strongly outerではない.）そこでそのような自己同型を調べるにはどのような不変量が必要か考えて見よう．ここで役に立つのは，次の表のような，subfactorとIII型factorの“類似”である.（[15] 参照.）

II_1型 subfactor	III 型 factor
strong amenability	injectivity
paragroup	flow of weights
Loi invariant	Connes–Takesaki module
algebraic χ_a invariant	modular automorphism group

これをもとに，III 型 injective factor の自己同型の分類に用いられた不変量と II_1 型の subfactor の自己同型の分類にこれまで用いられてきた不変量を比べれば次の表が得られる．

II_1型 subfactor	III 型 factor
relative asymptotic period	asymptotic period
Loi invariant	Connes–Takesaki module
ν invariant (簡単)	modular invariant
— missing —	modular obstruction

このうち，modular invariant [22] の類似は，これまで explicit に文献に現れたことはないが，簡単に書き下すことができ，特に面白いことはない．すなわち，automorphism が何乗かして，centrally trivial になったとき，その $\mathrm{Out}(M,N)$ における class をおぼえているというだけである．(ただし，一般には conjugacy orbit を見る必要がある．) 問題なのは，この表で missing と書かれているところである．

ここで，orbifold construction を思い出してみよう．([8], [14] 参照．ここでの formulation は，[9], [10], [11] による．) それには，strongly outer でないαを取る必要があり，その時，次の式で定まる c が 1 であるかどうかが，flatness の問題であった．

$$\exists a \in M_k \setminus \{0\} \quad \forall x \in N \quad ax = \alpha(x)a, \qquad \alpha(a) = ca.$$

一方，古典的な Connes obstruction γ ([7]) は次のように書くことができる．

$$\exists a \in N \setminus \{0\} \quad \forall x \in N \quad ax = \alpha^p(x)a, \qquad \alpha(a) = \gamma a.$$

但し，ここで p は outer period である．

そこで，これらを見比べれば，α^pが strongly outer でなくなるような最小の正の p を取って，

$$\exists a \in M_k \setminus \{0\} \quad \forall x \in N \quad ax = \alpha^p(x)a, \qquad \alpha(a) = \gamma_h a$$

とおくのが自然であることがわかる．(ここでの p は relative な asymptotic period に一致する．[20] 参照．) このγ_hを higher obstruction と呼ぶことにしよう．これが，上

の表の missing のところに入るものである．さらに，Popa の定理でカバーされないケースを考えるという立場から，Loi invariant が自明な場合に考察を限ろう．これによってだいぶ設定が簡単になる．([17] より，これは，approximately inner な自己同型を調べることに当たる.) 例えば，higher relative obstruction は scalar になることが，この設定でわかる．

すると，以下の仮定のどちらか一つが成り立つ場合には，上記の不変量で完全分類が得られることがわかる．

(1) もとの subfactor で，orbifold construction における flatness に対する obstruction が消える．

(2) Relative asymptotic period p_aと outer period p_oに対し，$(p_a, p_o/p_a) = 1$ が成り立つ．

これらの場合には，invariant の取り得る値も簡単に決定でき，自己同型の outer conjugacy class のリストが書き下せる．(1) の場合の基本的手法は Takesaki duality によって，[20] に帰着させることである．また，(2) の場合の手法は Connes による，central sequence の splitting [4], [6] である．どちらの仮定も成り立たない場合については，残念ながら今のところ何も言えていない．

特に，index が 4 未満の場合は，次の表のようになっている．([1], [12], [14], [18], [19] など参照.)

型	A_{2n}, E_8	D_{2n}	A_{4n-3}	A_{4n-1}, E_6
$\overline{\mathrm{Int}}(M,N)$	$\overline{\mathrm{Int}} = \mathrm{Aut}$	$\mathrm{Aut}/\overline{\mathrm{Int}} = \mathbf{Z}_2$	$\overline{\mathrm{Int}} = \mathrm{Aut}$	$\overline{\mathrm{Int}} = \mathrm{Aut}$
$\mathrm{Ct}(M,N)$	$\mathrm{Ct} = \mathrm{Int}$	$\mathrm{Ct} = \mathrm{Int}$	$\mathrm{Ct}/\mathrm{Int} = \mathbf{Z}_2$	$\mathrm{Ct}/\mathrm{Int} = \mathbf{Z}_2$
不変量	p_o, γ	p_o, γ, Loi	p_a, γ_h, ν	p_a, γ_h, ν
完全分類か？	yes	yes	yes	p_a:odd or $\nu = 0$ なら yes

Wenzl [23] の Hecke algebra subfactor の series のうちの次のもの (すなわち index が，$\sin^2(3\pi/k)/\sin^2(\pi/k)$, $k \geq 7$) の場合も同様に考えれば，$\mathrm{Aut}(M,N) = \overline{\mathrm{Int}}(M,N)$ を示すことができ，orbifold construction における flatness に対する obstruction は消滅する ([8]) 事から，(p_a, γ_h, ν) が complete invariant となる．一般に奇数の 2 乗に index が収束する Wenzl の series でも同様のようだが，まだきちんと確認していない．

また，Connes のχ不変量 [5] の subfactor versiont として私が [14] で導入した $\chi(M,N)$ 上の quadratic form κ ([13] の subfactor version) についても，この設定で直接決定できるようになる．これは，[16] の結果の拡張になっている．

References

[1] J. Bion-Nadal, *Subfactor of the hyperfinite II_1 factor with Coxeter graph E_6 as invariant*, J. Operator Theory **28** (1992), 27–50.

[2] T. Ceccherini, *Approximately inner and centrally free commuting squares of type II_1 factors and their classification*, Ph.D. Dissertation, UCLA, (1994).

[3] M. Choda & H. Kosaki, *Strongly outer actions for an inclusion of factors*. J. Funct. Anal. **122** (1994), 315–332.

[4] A. Connes, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Ann. Sci. ENS **8** (1975), 383–419.

[5] A. Connes, *Sur la classification des facteurs de type II*, C.R. Acad. Sci. I **281** (1975), 13–15.

[6] A. Connes, *On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms*, Symp. Math. **XX** (1976), 435–478.

[7] A. Connes, *Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II_1*, Acta Sci. Math. **39** (1977), 39–66.

[8] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Orbifold subfactors from Hecke algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 445–484.

[9] S. Goto, *Orbifold construction for non-AFD subfactors*, Internat. J. Math. **5** (1994), 725–746.

[10] S. Goto, *Symmetric flat connections, triviality of Loi's invariant and orbifold subfactors*, to appear in Publ. RIMS Kyoto Univ.

[11] S. Goto, *Commutativity of automorphisms of subfactors modulo inner automorphisms*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[12] M. Izumi, *On flatness of the Coxeter graph E_8*, Pac. J. Math. **166** (1994), 305–327.

[13] V. F. R. Jones, *A factor anti-isomorphic to itself but without involutory anti-automorphisms*, Math. Scand. **45** (1980), 103–117.

[14] Y. Kawahigashi, *On flatness of Ocneanu's connections on the Dynkin diagrams and classification of subfactors*, J. Funct. Anal. **127** (1995), 63–107.

[15] Y. Kawahigashi, *Centrally trivial automorphisms and an analogue of Connes's $\chi(M)$ for subfactors*, Duke Math. J. **71** (1993), 93–118.

[16] Y. Kawahigashi, *Orbifold subfactors, central sequences and the relative Jones invariant κ*, Internat. Math. Res. Notices (1995), 129–140.

[17] P. H. Loi, *On automorphisms of subfactors*, to appear in J. Funct. Anal.

[18] A. Ocneanu, *Quantized group, string algebras and Galois theory for algebras*, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, 1988, pp. 119–172.

[19] A. Ocneanu, "Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors", University of Tokyo Seminary Notes 45, (Notes recorded by Y. Kawahigashi), 1991.

[20] S. Popa, *Classification of actions of discrete amenable groups on amenable subfactors of type II*, preprint 1992.

[21] V. S. Sunder & A. K. Vijayarajan, *On the non-occurrence of the Coxeter graphs β_{2n+1}, E_7, D_{2n+1} as principal graphs of an inclusion of II_1 factors*, Pac. J. Math. **161** (1993), 185–200.

[22] C. E. Sutherland & M. Takesaki, *Actions of discrete amenable groups on injective factors of type III_λ, $\lambda \neq 1$*, Pac. J. Math. **137** (1989), 405–444.

[23] H. Wenzl, *Hecke algebras of type A and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988), 345–383.