数理解析研究所講究録
936巻 1996年 1-15

記号力学系とC^*環

群馬大・工　松本健吾 (Kengo Matsumoto)

0. はじめに

位相力学系からC^*環を構成し，もとの位相力学系の力学系としての性質とできたC^*環の代数的性質を調べる　という研究は昔からいろいろとあります。そのときのC^*環の構成方法として，たとえば，コンパクト空間の上にある同相写像(達)が作用しているというような場合は，そのコンパクト空間の上の連続関数環を考え，同相写像を自己同型にもちあげ，接合積を作る　というポピュラーな方法がまず思い浮かびます。

この路線での研究は，最近では，富山先生，Giordano, Skau, Putnam, 等の人々達によって精力的になされているので，ぼくの出る幕は全くありません。これとは別に，位相的マルコフチェーンから位相的マルコフシフトを作り，この位相的マルコフシフトに附随してできるCuntz-Krieger環の研究があまりにも有名です。

ここでは，位相的マルコフシフトの一般化である記号力学

系（サブシフトとも呼ばれる）という位相力学系に注目して，この一般の記号力学系から（多くの場合）単純，純粋無限 C^* 環を構成して，その C^* 環の構造をもとの力学系の性質を見ながら調べていきます。この構成方法で特にもとのサブシフトが位相的マルコフシフトの場合は，構成された C^* 環は，Cuntz-Krieger 環になり，さらに特に，フルシフトの場合が Cuntz 環になります。

以下の目次で進めていきます

1. サブシフトと C^* 環の構成
2. AF-環が出てくる
3. C^* 環の普遍性
4. C^* 環の単純性，純粋無限性
5. Sofic subshift の例
6. K-群
7. 最近わかったことなど

1. サブシフトと C^* 環の構成

$n = 1, 2, 3, \cdots$ を固定する。

$\Sigma = \{1, 2, \cdots, n\}$ とおき，その無限直積 $\Sigma^{\mathbb{Z}} = \prod_{i=-\infty}^{\infty} \Sigma$，$\Sigma^{\mathbb{N}} = \prod_{i=1}^{\infty} \Sigma$ に直積位相を入れて，コンパクトにする。

shift σ on $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ or $\Sigma^{\mathbb{N}}$ を $\sigma((x_i))_i = x_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$ or $\mathbb{N}$ で定義する。閉部分集合 $\Lambda \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$ (or $\Sigma^{\mathbb{N}}$) で $\sigma(\Lambda) = \Lambda$ を満たすものを考え，ペア (Λ, σ) をサブシフト (or. 片側サブシフト) といいます。以下，特に断わらなければ，(両側) サブシフトを考えます。

$\boxed{例1}$ (フルシフト)

$\Lambda = \Sigma^{\mathbb{Z}}$ としたとき $(\Sigma^{\mathbb{N}}, \sigma)$ を (n)-フルシフトといいます

$\boxed{例2}$ (位相的マルコフシフト)

$A = (A(i,j))_{i,j=1,2,\cdots n}$: $n \times n$ 行列で成分が $\{0,1\}$ からなるものに対して，

$$\Lambda_A = \{ (x_i)_{i=-\infty}^{\infty} \mid A(x_i, x_{i+1}) = 1 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \}$$

とおくと (Λ_A, σ) はサブシフトになり，これを0-1行列 A から定まる位相的マルコフシフト (簡単に，マルコフシフト) といいます。特に成分が全部 1 の場合が上のフルシフトです。

マルコフでないサブシフトの例はもちろんたくさんたくさんあります。たとえば，次の例は ソヒック (Sofic) と呼ばれるクラスに属すサブシフトです。

$\boxed{例3}$ $\Sigma = \{1, 2\}$,

$Y \equiv \{$ "2" が偶数回連続する $\{1,2\}$ 両側無限列全体 $\}$

さて，$\mu_j \in \Sigma$, $j=1,2,\cdots,k$ に対して，その有限列 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$ のことを block or word（語）と言いまして，$|\mu|$ でその長さ k を現わします。

$x=(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}\in\Sigma^{\mathbb{Z}}$ と $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_k)$ に対して，
μ が列 x に"現れる"とは

$\exists m \in \mathbb{N}$;　$x_m=\mu_1,\ x_{m+1}=\mu_2,\ \cdots,\ x_{m+k-1}=\mu_k$

のときを言います。

これから，以後，サブシフト (Λ,σ) を1つ固定します。

$\Lambda^k \equiv \{$ある $x\in\Lambda$ に現れる長さ k の語全体$\}$ とし

$\Lambda_l=\bigcup_{k=0}^{l}\Lambda^k$,　$\Lambda_*=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Lambda^k$　とします。

このサブシフトから C^* 環を構成したいのですが，まず，土台になる Hilbert 空間を以下のように作ります。

$\{e_1,\cdots,e_n\}$ を n-次元 Hilbert 空間 $\mathbb{C}^n$ の直交 basis とします

$F_\Lambda^0 \equiv \mathbb{C}e_0$,　（$e_0$：真空状態 vector）

$F_\Lambda^k =$ ベクトル達 $e_\mu \equiv e_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes e_{\mu_k}$, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_k)\in\Lambda^k$ で張られる Hilbert 空間。

そこで

$$F_\Lambda \equiv \bigoplus_{k=0}^{\infty} F_\Lambda^k \quad : \text{Hilbert 空間の直和}$$

とおき，サブシフト Λ に付随してできる Hilbert 空間を構成しておきます。そこで，その上に"生成作用素"を $\mu,\nu\in\Lambda_*$ に対して，

$$T_\nu e_\mu \equiv \begin{cases} e_\nu \otimes e_\mu & \text{if } \overset{\text{横に並べたもの}}{\nu\mu} \in \Lambda_* \\ 0 & \text{if else.} \end{cases}$$

とおきます。これは各 $\nu \in \Lambda_*$ において、partial isometry です

$P_0 = \mathbb{C}e_0$ への1次元射影 とします。すると

$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* + P_0 = 1$ がすぐわかります。さらに

$T_\mu P_0 T_\nu^*$ がベクトル $\mathbb{C}e_\nu$ から $\mathbb{C}e_\mu$ への1次元の partial isometry です。

$\mathbb{K}(F_\Lambda) \equiv F_\Lambda$ 上のコンパクト作用素全体のなす C^*環

$\mathcal{T}_\Lambda \equiv T_\mu : \mu \in \Lambda_*$ 達で生成される F_Λ 上の C^*環

とおきます

$\boxed{\text{定義}}$（サブシフトに付随してできる C^*環 $\mathcal{O}_\Lambda$）

$$\mathcal{O}_\Lambda \overset{\text{def}}{\equiv} \mathcal{T}_\Lambda \big/ \mathbb{K}(F_\Lambda) \quad \text{: 商 } C^*\text{環}$$

ここで、S_μ を T_μ の商作用素、特に S_i は T_i, $i=1,2,\ldots,n$ の商作用素とします。

この C^*環 $\mathcal{O}_\Lambda$ がこれからの^ぼくの^研究対象となる C^*環です。

まずすぐに分ることは 生成元達 S_i, $i=1,\ldots,n$ が関係式

$\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = 1$ を満たしていることがわかります。

前後しますが、この構成方法は、榎本、藤井、綿谷 先生達[EFW]

と Evans [E] が独立に マルコフシフトに対して Cuntz-Krieger 環を構成したときの方法を、一般のサブシフトに対してぼくが真似たものです。ですから この [EFW] と [E] の結果により、サブシフトとして特にマルコフシフト Λ_A をとると、$\mathcal{O}_{\Lambda_A} \cong \mathcal{O}_A$ が成立します。したがって、このようにして作ったサブシフトからできる C^*環達のクラスは Cuntz-Krieger 環達の作るクラスを含むということです。もこのサブシフトがフルシフトだったら、もちろん、そこからできる C^*環は Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ に一致します。

以後、この C^*環の構造を調べて行きましょう。

2. AF環が出てくる

Cuntz-Krieger 環の場合を頭の隅において、議論を進めます。

Lemma 2.1 $S_\mu^* S_\mu$, $S_\nu S_\nu^*$, $\mu, \nu \in \Lambda^*$ 達は皆交換可能である。

証明は $T_\mu^* T_\mu$, $T_\nu T_\nu^*$ 達が交換可能であることを示せばよいが、それは簡単。よって

Corollary 2.2 $a_\mu S_\nu = S_\nu a_{\mu\nu}$, $\forall \mu, \nu \in \Lambda^*$

where $a_\mu = S_\mu^* S_\mu$

この系と関係 $\sum_{|\mu|=k} S_\mu S_\mu^* = 1$ に注意すると、次の Lemma が出てくる

$\boxed{\text{Lemma 2.3}}$ S_i, S_j^*, $i,j=1,2,\dots,n$ のどんな word も必ず

$$S_\mu a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_m} S_\nu^*, \quad \mu, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \nu \in \Lambda_*$$

の形に書きかえできる。

次のように記号を定義します。$k \le l$：自然数に対し

$$A_l = C^*(a_\mu \mid |\mu| \le l),$$
$$A_\Lambda = C^*(a_\mu \mid \mu \in \Lambda_*)$$
$$\mathcal{F}_k^l = C^*(S_\mu a S_\nu^* \mid |\mu| = |\nu| = k,\ a \in A_l)$$
$$\mathcal{F}_k^\infty = C^*(S_\mu a S_\nu^* \mid |\mu| = |\nu| = k,\ a \in A_\Lambda)$$
$$\mathcal{F}_\Lambda^\infty = C^*(S_\mu a S_\nu^* \mid |\mu| = |\nu|,\ a \in A_\Lambda)$$

すると以下のことがわかります。

$\boxed{\text{Lemma 2.4}}$

(i) $\dim A_l < \infty$

(ii) $A_l \hookrightarrow A_{l+1}$ (subalg となる)... 故に $A_\Lambda = \varinjlim_l A_l$ は可換 AF-環

(iii) $\mathcal{F}_k^l$ の任意の元は $S_\mu a S_\nu^*$, $\mu, \nu \in \Lambda^k$, $a \in A_l$ の形の有限1次結合。故に $\mathcal{F}_k^l$ は有限次元環。

(iv) $\{\mathcal{F}_k^l\}_{k \le l}$ に関して以下の2つの埋め込みがある

(a) $A_\ell \hookrightarrow A_{\ell+1}$ よりできる埋め込み $\iota_\ell: \mathcal{F}_k^\ell \hookrightarrow \mathcal{F}_k^{\ell+1}$

(b) 恒等式

$$S_\mu a S_\nu^* = \sum_{j=1}^{n} S_{\mu j} S_j^* a S_j S_{\nu j}^* \quad , \mu,\nu \in \Lambda_*, \ a \in A_\ell$$

を通した埋め込み $\lambda_\ell : \mathcal{F}_k^\ell \hookrightarrow \mathcal{F}_{k+1}^{\ell+1}$

(c) $\mathcal{F}_k^\infty = \varinjlim_\ell \mathcal{F}_k^\ell$ と $\mathcal{F}_\Lambda^\infty = \varinjlim_k \mathcal{F}_k^\infty$ は共に AF 環.

こうしてできた AF 環 $\mathcal{F}_\Lambda^\infty$ が Cuntz-Krieger 環の中にできる AF 環を一般化したものです。Cuntz-Krieger 環の場合の AF 環の Bratteli diagram は横に広がらず同じ幅で伸びますが、一般の subshift (Λ, σ) からできる AF 環 $\mathcal{F}_\Lambda^\infty$ の Bratteli diagram は (Λ, σ) が sofic system でなければ、横幅が広がりながら下に伸びていきます。

subshift に付随した Fock space F_Λ 上に変換 $e_\mu \longrightarrow z^k e_\mu$, $|\mu| = k$, $z \in \mathbb{C}, |z|=1$ を定義すると、これが1次元トーラス群 $\mathbb{T}$ の unitary 表現を与えます。これは $\mathbb{K}(F_\Lambda)$ を不変にしているので、$\mathcal{O}_\Lambda$ 上に action を定義します。これを α で表し、gauge action と呼びます。
従って、 $\alpha_z(S_i) = z S_i$, $i=1,2,\dots,n$, $z \in \mathbb{T} \subset \mathbb{C}, |z|=1$。

$\boxed{\text{Lemma 2.5}}$ $\mathcal{F}_\Lambda^\infty = \mathcal{O}_\Lambda^\alpha$: 不動点環.

3. C*環の普遍性

C*環 $\mathcal{O}_\Lambda$ を構成的な方法で捉えるのでなく、抽象的な方法で捉えるやり方として、次の(2つの)普遍性定理が成立します。

$\boxed{\text{Theorem 3.1}}$ (普遍性その1)

$\mathcal{A}$ を勝手なC*環で、A_Λ から $\mathcal{A}$ の中への準同型 π があったとします。さらに、$s_1, \dots, s_n \in \mathcal{A}$ (直交rangeをもつ) partial isometries が

$$\pi(S_\mu^* S_\mu) = s_\mu^* s_\mu, \qquad s_\mu^* s_\mu s_\nu = s_\nu s_{\mu\nu}^* s_{\mu\nu} \quad {}^\forall \mu, \nu \in \Lambda^*$$

を満たしていたなら π は $\mathcal{O}_\Lambda$ 全体の上の準同型に拡張できる。

少し記号を準備します。

$$\mathcal{D}_\Lambda = C^*(S_\mu S_\mu^* \mid \mu \in \Lambda^*),$$

これは可換C*環でもとのsubshiftの片側subshift上の連続関数環と同型です。その上のshift σ に対応するものが次の

$$\phi_\Lambda(X) = \sum_{j=1}^{n} S_j X S_j^*, \quad X \in \mathcal{D}_\Lambda \qquad \text{です。}$$

Cuntz-Krieger環の単純性を証明するときにでてくる"既約行列(not 巡回行列)"に対応する条件が次の条件 (I_Λ) で

条件 (I_Λ): ${}^\forall k \le {}^\exists l$, $\exists q_k^l \in \mathcal{D}_\Lambda$: projection;

(i) $q_k^l a \neq 0$ for ${}^\forall a \in A_l$, (ii) $q_k^l \phi_\Lambda^n(q_k^l) = 0$ $1 \le {}^\forall n \le k$.

$\boxed{\text{Theorem 3.2}}$（普遍性その2）

Theorem 3.1 と同じ状況で，準同型 $\pi : A_\Lambda \to \mathcal{A}$ が injective だ，とする。　このとき，もし $\mathcal{O}_\Lambda$ が条件 (I_Λ) を満たしていれば，拡張された準同型 $\tilde{\pi}$ は injective になる。

この普遍性定理により，C*環 $\mathcal{O}_\Lambda$ の代数構造は完全に，中の可換C*環の部分 A_Λ で決ってしまうことを意味してます。

4．C*環の単純性，純粋無限性

Theorem 4.2 から $\mathcal{O}_\Lambda$ の単純性が導かれそうなことはすぐに予想がつく。　そこで，

ある条件を加味すれば…

とりあえず

$$\lambda(X) = \sum_{j=1}^{n} S_j^* X S_j \quad , X \in A_\Lambda$$

とおきます。

特に X が A_ℓ の元のとき，λ を λ_ℓ とかいたりもします。

λ は A_Λ 上の自己準同型を与えますが，もし A_Λ の中に λ-不変な ideal がなかったら，λ を "minimal" と呼ぶこととします。　このとき，次がわかります

$\boxed{\text{Theorem 4.1}}$　$\mathcal{O}_\Lambda$ が条件 (I_Λ) を満たし，λ が minimal だとする。このとき，$\mathcal{O}_\Lambda$ は単純で純粋無限である。

条件(I_Λ)とλの minimality は Cuntz-Krieger 環でいうところの"既約かつ not 置換行列"に対応しています。実際，Cuntz-Krieger 環の場合はその条件に一致します。また，この(I_Λ)と minimality はもとの subshift の言葉で言うと，もとのサブシフトに非周期点が少なくとも1つあり，シフトが位相混合的 + $\boxed{\text{ゴミ}}$のような条件になっています。この$\boxed{\text{ゴミ}}$の部分は少し言いづらいです。

5. Sofic subshift の例

sofic subshift (or sofic system) と言うのは，Markov shift よりも広いクラスで，Markov でない sofic の例が最初の例3のYという subshift です。sofic の詳しい定義等は記号力学系の論文等を見て下さい。

$\mathcal{D}_k \equiv C^*(S_\mu S_\mu^* \mid |\mu| \le k)$ とおくと

$\boxed{\text{Proposition 5.1}}$

(i) (Λ, σ) が sofic $\iff$ $\dim A_\Lambda < \infty$

(ii) 〃 subshift of finite type $\iff$ $A_\Lambda \subset \mathcal{D}_k$ for some k

(iii) (Λ, σ) が Markov $\iff$ $A_\Lambda \subset \mathcal{D}_1$

そこで最初の例3のYという sofic subshift をみてみる

と，Yの語 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_k)$ に対し

$$S_\mu^* S_\mu = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu=(2,\cdots,2) \\ S_1^* S_1 & \text{if } \mu=(*,\cdots,*,1) \text{ or } (*,\cdots,*,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\text{偶}}) \\ S_2^* S_1^* S_1 S_2 & \text{if } \mu=(*,\cdots,*,1,\underbrace{2,\cdots,2}_{\text{奇}}) \end{cases}$$

となり $S_1^*S_1 + S_2^*S_1^*S_1S_2 = 1$ を満たします。

従って，

$$A_\ell = A_Y = \mathbb{C}S_1^*S_1 + \mathbb{C}S_2^*S_1^*S_1S_2, \qquad \ell \in N$$

となり $\dim A_Y = 2$ である。

次に，最近，C^*環論の中ではやっている（た？）分類理論に関連して，K群の計算公式等を述べましょう。

6. K-群.

まずAF環 $\mathcal{F}_\Lambda^\infty$ の方ですが，Λ が Markov のときは，この K_0-群 $K_0(\mathcal{F}_\Lambda^\infty)$ がずばりもとのサブシフト (Λ,σ) の次元群（Krieger 達の意味で）になります。したがって，一般のsubshift に対するAF-環 $\mathcal{F}_\Lambda^\infty$ の K_0 がもとのサブシフトの"次元群"です。つまり

$$K_0(\mathcal{F}_\Lambda^\infty) = \text{次元群}\ \text{of}\ (\Lambda,\sigma).$$

一般の順序群としての計算はむつかしいですが，単に群としてなら次の形をします

$\boxed{\text{Theorem 6.1}}$ $\quad K_0(\mathcal{F}_\Lambda^\infty) = \varinjlim_\ell (\mathbb{Z}^{m(\ell)}, \lambda_{\ell *})$

但し，$m(\ell) = \dim A_\ell$ で $\mathbb{Z}^{m(\ell)} = K_0(A_\ell)$ で $\lambda_{\ell *}$ は

$\lambda_{\ell *} : K_0(A_\ell) \to K_0(A_{\ell+1})$ となっています。

この結果を利用して，また，$\mathcal{F}_\Lambda^\infty$ が $\mathcal{O}_\Lambda \rtimes_\alpha \mathbb{T}$ に stably 同型であることに注意すると，Pimsner-Voiculescu の K群の6項完全列から(少し計算すると)，次がわかります。

$\boxed{\text{Theorem 6.2}}$ (K-群公式)

(i) $\quad K_0(\mathcal{O}_\Lambda) = \varinjlim_\ell \quad \mathbb{Z}^{m(\ell+1)} / (\iota_{\ell *} - \lambda_{\ell *}) \mathbb{Z}^{m(\ell)}$

(ii) $\quad K_1(\mathcal{O}_\Lambda) = \varinjlim_\ell \quad \mathrm{Ker}(\iota_{\ell *} - \lambda_{\ell *}) \text{ in } \mathbb{Z}^{m(\ell)}$

丁度，Cuntz-Krieger 環の K群公式の帰納極限の形になっています。

$\boxed{\text{例}}$ 先にでてきた sofic subshift Y で 上の K-群公式をあてはめて計算してみると，

$$K_0(\mathcal{O}_Y) \cong \mathbb{Z}^2 / (1-[\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}])\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$$

$$K_1(\mathcal{O}_Y) \cong \mathrm{Ker}\,(1-[\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}]) \underset{\text{in}}{\subset} \mathbb{Z}^2 = 0$$

となります。

サブシフトからできるC^*環達の多くは、最近のKirchbergやPhillipsがやった分類の枠組に入るC^*環です。つまり

$\boxed{\text{Proposition 6.3}}$ 多くの$\mathcal{O}_\Lambda$はunital separable, nuclear, simple purely infiniteでUCT (Universal Coefficient Theorem)を満たす。従って、$\mathcal{O}_\Lambda$の同型は完全にそのK-群で決ります。

このことと$\mathcal{O}_Y$のK_0, K_1をみると、$\mathcal{O}_Y$はCuntz-Krieger環$\mathcal{O}_{[\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}]}$に同型がわかります。

7. 最近わかったことなど.

① 一般の$\mathcal{O}_\Lambda$も、Cuntz-Krieger環の生成元の関係式

$$S_i^* S_i = \sum_{j=1}^{n} A(i,j) S_j S_j^*$$

の"無限和"版で特徴づけられることがわかりました。

② subshift (Λ, σ) のエントロピーが多くの場合にC^*環$\mathcal{O}_\Lambda$

の gauge action の KMS-状態の"温度"で捉えることがわかってきました。

③ 他にもいろいろありますが…

この辺でやめます。

以上の話は綿谷先生(九大)、片山先生(大阪教育大)に Cuntz-Krieger 環のことなどをいろいろ教えてもらい、進んだ話です。

細かい証明はすべて

K. Matsumoto :「On C^*-algebras associated with subshifts」 preprint

:「K-Theory for C^*-algebra associated with subshifts」

にあります。

参考

[EFW] : M. Enomoto, M. Fujii and Y. Watatani 「tensor algebra on the sub Fock space associated with $\mathcal{O}_A$」 Math. Japon 24 (1979)

[E] D. Evans 「Gauge actions on $\mathcal{O}_A$」 J. O. T. 7 (1982)