数理解析研究所講究録
937巻 1996年 152-161

Schrödinger Operators with Periodic Potentials and Constant Magnetic Fields

阪大理　吉富　和志 (Kazushi Yositomi)

1 Introduction and main results

考える作用素は、ポテンシャルが周期的な定数磁場のSchrödinger 作用素

$$H(\lambda)=(D_{x_1}+bx_2)^2+(D_{x_2}-bx_1)^2+\lambda^2V(x) \quad in \quad L^2(\mathbf{R}^2)$$

である。ただし $D_{x_j}=-i\,\partial/\partial x_j$ $(j=1,2)$, λは正のパラメータ、$b\in\mathbf{R}$は定数とする。$H(\lambda)$に対応する磁場は$B=-2b\,dx_1\wedge dx_2$である。ポテンシャル$V(x)$には次の仮定をおく。

$(H.1)$ $V(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})$

$(H.2)$ $V(x+\gamma)=V(x)$ in $\mathbf{R}^2$ $for\ any$ $\gamma\in\Gamma:=2\pi\mathbf{Z}\oplus2\pi\mathbf{Z}$

$(H.3)$ $V(x)\geq0$ in $\mathbf{R}^2$

$(H.4)$ $V(x)=0\Longleftrightarrow x\in\Gamma$

$(H.5)$ $V''(x)=2\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}$, $\mu_1,\mu_2>0$

Direct integral decomposition を用いるために、磁場Bに次の仮定をおく。

$(H.6)$ $\langle B,\Gamma\wedge\Gamma\rangle\subset2\pi\mathbf{Z}$ $i.e.$ $b\in\frac{1}{4\pi}\mathbf{Z}$

この仮定により$H(\lambda)$のスペクトルはバンド構造を持つ。研究の目標は、$\lambda\to\infty$としたときの$H(\lambda)$のスペクトルの漸近挙動を調べることである。磁場の

無い場合(すなわち、b=0の場合)に、B.Simon [1]と、A.Outassout[2]はground state bandの幅がexponential orderで減少することを示した。Simonはその証明に確率論的な方法を用い、OutassoutはB.Helffer-J.Sjöstrand [3]らによるWKB解析による方法を用いている。今回の研究では、磁場のある場合に、ground state band の幅に対する exponential order の評価を得た。以下その内容を簡単に述べる。

$d_V(x,y)$ を V(x)に対応する Agmon distance、$s_0 := \min_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}} d_V(0,\gamma) \ (>0)$

$x_0 \in \mathbf{R}^2, r>0$ に対し $B_V(x_0,r) := \{x\in\mathbf{R}^2 : d_V(x_0,x)<r\}$ とおく。

<u>*Theorem A*</u> (H.1)から(H.6)を仮定する。このとき、$\forall\eta>0$ に対し$H(\lambda)$の ground state bandの幅は $O(e^{-(s_0-2\eta)\lambda})$ (as $\lambda\to\infty$) である。

幾何学的な仮定を付け加えれば、Theorem Aの評価は次のように精密化される。

$\Lambda := \{\gamma\in\Gamma : d_V(0,\gamma)=s_0\}$ とおく。 $\gamma\in\Lambda$ に対し次を仮定する。

(H.7) There is a unique geodesic κ of length s_0 joining 0 and γ.

(H.8) $x_0 \in \kappa\cap B_V(0,s_0)\cap B_V(\gamma,s_0)$

$\Gamma_0 \subset\subset B_V(0,s_0)\cap B_V(\gamma,s_0)$: smooth curve which intersects κ transversally at x_0 where x_0 is the only point in $\overline{\Gamma_0}\cap\kappa$

$\Rightarrow \exists C>0$ s.t.

$$d_V(x,0)+d_V(x,\gamma) \geq s_0 + C d_V(x,x_0)^2 \quad for\ any\ x\in\Gamma_0$$

$F_0 := \{\pm(0,2\pi), \pm(2\pi,0), \pm(2\pi,2\pi), \pm(2\pi,-2\pi)\}$ とおく。

<u>*Theorem B*</u> (H.1)から(H.9)を仮定する。このとき、$H(\lambda)$ のground state bandの幅は $(b_0\lambda^{\frac{3}{2}}+O(\lambda^{\frac{1}{2}}))\,e^{-s_0\lambda}$ $(as\ \lambda\to\infty)$ である。
ただし $b_0>0$: independent of λ

以下でこれらの証明の概略を述べる。

2 Preliminaries

$\Gamma = 2\pi\mathbf{Z} \oplus 2\pi\mathbf{Z}$のfundamental domain を E, Γのdual latticeをΓ^* , Γ^*の fundamental domain を E^*とする。すなわち、$E = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, $\Gamma^* := \{\gamma^* \in \mathbf{R}^2 \ : \ \gamma \cdot \gamma^* \in 2\pi\mathbf{Z} \ \ \forall\gamma \in \Gamma\} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, $E^* = [0,1) \times [0,1)$ とする。

$H^2_B(\mathbf{R}^2) := \{u \in L^2(\mathbf{R}^2) : T_i u, T_i T_j u \in L^2(\mathbf{R}^2) \ \ \forall i,j \in \{1,2\}\}$
$, T_1 := D_{x_1} + bx_2$, $T_2 := D_{x_2} - bx_1$ とおいて,
$Dom(H(\lambda)) := H^2_B(\mathbf{R}^2)$と定義する。$H(\lambda)$はself-adjointである。
$H^2_B(\mathbf{R}^2)$に内積を

$$(u,v)_{H^2_B(\mathbf{R}^2)} := (u,v)_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \sum_{i=1}^{2}(T_i u, T_i v)_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \sum_{i,j=1}^{2}(T_i T_j u, T_i T_j v)_{L^2(\mathbf{R}^2)}$$

$(u, v \in H^2_B(\mathbf{R}^2)$)で定義する。

$\forall\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$, $u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^2)$に対し

$$(\mathbf{T}^B_\gamma u)(x) := e^{ib\gamma_1\gamma_2} e^{-ib(x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1)} u(x - \gamma),$$

$u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $\theta \in E^*$に対し

$$(\mathcal{U}u)(x,\theta) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}^B_\gamma u)(x) \quad (x \in \mathbf{R}^2)$$

とおく。
$\theta \in E^*$に対し
$\mathcal{H}_{B,\theta} := \{v \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^2) \ : \ \mathbf{T}^B_\gamma v = e^{-i\gamma\cdot\theta} v \ \ a.e. \ in \ \mathbf{R}^2 \ \ \forall\gamma \in \Gamma\}$
$\mathcal{H}^2_{B,\theta} := \{v \in \mathcal{H}_{B,\theta} \ : \ T_i v, T_i T_j v \in \mathcal{H}_{B,\theta} \ \ \forall i,j \in \{1,2\}\}$と定義する。
$\mathcal{H}_{B,\theta}$に内積を $(u,v)_{H_{B,\theta}} := \int_E u(x)\overline{v(x)}dx$, $u, v \in \mathcal{H}_{B,\theta}$で定義する。
$\theta \in E^*$に対し
$H(\lambda;\theta) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 V(x) \ in \ \mathcal{H}_{B,\theta} \ with \ domain \ \mathcal{H}^2_{B,\theta}$
と定義する。

Proposition 2.1
$\mathcal{U}$は$L^2(\mathbf{R}^2)$から$\int_{E^*}^{\oplus} \mathcal{H}_{B,\theta} d\theta$へのunitary operatorに一意に拡張され、次が成り立つ

(2.1) $\mathcal{U}H(\lambda)\mathcal{U}^{-1} = \int_{E^*}^{\oplus} H(\lambda,\theta)d\theta$

ただし$\mathcal{H} := \int_{E^*}^{\oplus} \mathcal{H}_{B,\theta} d\theta$の内積は

$$(u,v)_{\mathcal{H}} := (vol E^*)^{-1} \int_{E^*} \int_E u(x,\theta)\overline{v(x,\theta)} dx d\theta \quad (u,v \in \mathcal{H})$$

で定義する。

$H(\lambda,\theta)$は正定値でcompact resolventをもつので、spectrumはpurely discreteである。$H(\lambda,\theta)$の多重度を込めて下からj番目の固有値を$\mathcal{E}_j(\lambda,\theta)$とする。$\mathcal{E}_j(\lambda,\theta)$は$\theta$の連続関数であるから、次が成り立つ。

$$(2.2) \quad \sigma(H(\lambda)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_j(\lambda, E^*) \quad ただし \quad \mathcal{E}_j(\lambda, E^*) := \{\mathcal{E}_j(\lambda;\theta) \ : \ \theta \in E^*\}$$

$\mathcal{E}_j(\lambda;E^*)$は閉区間または1点集合で、$\mathcal{E}_j(\lambda;E^*)$をj-th band、$\mathcal{E}_1(\lambda;E^*)$をground state bandという。従って$H(\lambda)$のspectrumの解析は$\mathcal{E}_j(\lambda;\theta)$の解析に帰着される。

$\Lambda_0 := \{ \ (2j+1)\sqrt{\mu_1} + (2k+1)\sqrt{\mu_2} \ : \ j,k \geq 0 \ ; \ integers\}$とおき、$\Lambda_0$の元で重複度を込めてn番目に小さい元を$v_n$とする。このとき次の定理が得られる。

<u>*Theorem 2.2*</u>
$\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$に対し$\mathcal{E}_n(\lambda;\theta) = v_n\lambda + o(\lambda) \quad (\lambda \to \infty)$
ただしerror term は$\theta \in E^*$に関し一様である。

<u>*Outline of proof*</u>
この定理の証明にはHarmonic approximation を用いる(cf.[1])。

(H.6)より$V(x) = \mu_1 {x_1}^2 + \mu_2 {x_2}^2 + O(|x|^3) \quad (as \ |x| \to 0)$である。
(1.1)でV(x)を$\mu_1 {x_1}^2 + \mu_2 {x_2}^2$で置き換えた次の作用素:

$$(2.3) H_0(\lambda) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2(\mu_1 {x_1}^2 + \mu_2 {x_2}^2) \ \ in \ \ L^2(\mathbf{R}^2)$$

の固有値、固有関数を用いて各$\mathcal{E}_j(\lambda;\theta)$を近似する。
$H_0(\lambda)$はWeyl擬微分作用素の正準変換による不変性を用いると、次のHarmonic oscillatorとunitary同値になる。

$$(2.4) \quad -\Delta + m_1(\lambda){x_1}^2 + m_2(\lambda){x_2}^2 \quad in \ \ L^2(\mathbf{R}^2)$$

ただし$m_1(\lambda), m_2(\lambda)$はtに関する2次方程式

$$t^2 - ((\mu_1 + \mu_2)\lambda^2 + 4b^2)t + \mu_1\mu_2\lambda^4 = 0$$

の解で、$m_1(\lambda) < m_2(\lambda)$を満たすものとする。

よって$H_0(\lambda)$のeigenvalueは　$(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)}+(2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$,
$(j,k\geq 0; integers)$で、

$$v_{j,k} := \begin{cases} (2j+1)\sqrt{\mu_1}+(2k+1)\sqrt{\mu_2} & (\mu_2 \geq \mu_1) \\ (2j+1)\sqrt{\mu_2}+(2k+1)\sqrt{\mu_1} & (\mu_2 \leq \mu_1) \end{cases}$$

とおけば$(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)}+(2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)} = v_{j,k}\lambda + O(1) \quad (as\ \lambda \to \infty)$
である。

$(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)}+(2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$に対応する$H_0(\lambda)$の固有関数を$\psi_{j,k}(\lambda;x)$
$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\geq 0}$: $C.O.N.S.\ in\ L^2(\mathbf{R}^2)$とする。$\psi_{j,k}$は具体的に計算でき次が成り立つ。

(2.5)　$|\psi_{j,k}(\lambda;x)| \leq C_{j,k}\lambda^{\frac{1}{2}}exp(-c\lambda|x|^2)$, $(C_{j,k}, C>0 : const.\ indep.\ of\ \lambda)$
である。

$v_n = v_{j_n,k_n} \quad (n=1,2,\cdots)$, $(j_n,k_n)\neq(j_m,k_m)\ \ if\ \ n\neq m$
とおける。

$\psi_n := \psi_{j_n,k_n}$, $\varphi_n(\lambda;x;\theta) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}^B_\gamma\psi_n)(\lambda;x) \quad (\theta\in E^*)$とおく。

(2.5)より次がなりたつ。

(2.6)　$(\varphi_n(\lambda;x;\theta),\varphi_m(\lambda;x;\theta))_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = \delta_{nm}+O(e^{-c\lambda}) \ \ (as\ \ \lambda\to\infty)$

(2.7)　$(H(\lambda;\theta)\varphi_n(\lambda;x;\theta),\varphi_m(\lambda;x;\theta))_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = v_n\lambda\delta_{nm}+O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \ \ (as\ \ \lambda\to\infty)$
ただし各error termは$\theta\in E^*$に関し一様である。

Schmidtの直交化法と、Rayleigh-Ritz Principleを用いて
$\mathcal{E}_n(\lambda;\theta) \leq v_n\lambda + O(\lambda^{\frac{1}{2}})$を得る。

また、Simon[1]と同様にI.M.S. localization formulaを用いれば
$\mathcal{E}_n(\lambda;\theta) \geq v_n\lambda - O(\lambda^{\frac{1}{2}})$を得る。□

3 Outline of Proof of Theorem A

この章ではTherem Aの証明の概略を説明する。まず、$d_V(x,y)$の定義を正確に述べる。

$x, y \in \mathbf{R}^2$に対し、

$d_V(x,y) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(t))}\, |\dot{\gamma}(t)| dt$

ただし、$\gamma : [0,1) \to \mathbf{R}^2$; *piecewise* C^1 *path s.t.* $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$
と定義する。

$x_0 \in \mathbf{R}^2$, $r > 0$に対し　$B_V(x_0, r) := \{x \in \mathbf{R}^2\ :\ d_V(x_0, x) < r\}$,
$s_0 := \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} d_V(0, \gamma)\ \ (> 0)$とおく。

$\eta > 0$:十分小　に対し　$W_\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$として

$W_\eta = 1$ *on* $B_V(0, \frac{\eta}{4})$, $W_\eta \geq 0$ *in* $\mathbf{R}^2$, *supp* $W_\eta \subset B_V(0, \frac{\eta}{2})$

を満たすものを選ぶ。

$\widetilde{V}(x) := V(x) + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} W_\eta(x - \gamma)$とおく。

$\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ $(\theta \in E^*)$を近似するために次の作用素を導入する:

(3.1)　$\widetilde{H}(\lambda) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 \widetilde{V}(x)$ *in* $L^2(\mathbf{R}^2)$
with domain $H_B^2(\mathbf{R}^2)$

§2とほぼ同様にして次のことが判る。　$\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$に対し$\widetilde{H}(\lambda)$は十分大きいλに対して、その essential spectrum の下に少なくとも n 個の固有値をもち、$\widetilde{H}(\lambda)$の多重度を込めて j 番目の固有値は　$v_j \lambda + o(\lambda)$ $(as\ \lambda \to \infty)$ である。

$\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda)$を$\widetilde{H}(\lambda)$の first eigenvalue ($\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda) = (\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})\lambda + o(\lambda)$) , $\widetilde{\phi}(\lambda)(x)$を$\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda)$に対応する$\widetilde{H}(\lambda)$の eigenfunctionで、$\|\widetilde{\phi}(\lambda)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} = 1$とする。
Helffer-Sjöstrand [2] とほぼ同様に、$\widetilde{\phi}(\lambda)$は次の decay estimate を満たす:

<u>*Lemma* 3.1</u>　$\forall \varepsilon > 0$に対し

(3.2)　$\| e^{\lambda(1-\varepsilon) d_{\widetilde{V}}(x,0)} \widetilde{\phi}(\lambda)(x) \|_{H_B^2(\mathbf{R}^2)} = O(e^{\varepsilon\lambda})$　$(as\ \lambda \to \infty)$

さらに、楕円型作用素に対する a priori estimate と Sobolev の埋込定理を用いて次が得られる。

<u>*Lemma* 3.2</u>　$\forall \varepsilon > 0$, $\forall \alpha \in \mathbf{N}^2$　$\exists C_{\alpha,\varepsilon} > 0$: *const. s.t.*

$| \partial_x^\alpha \widetilde{\phi}(\lambda)(x) | \leq C_{\alpha,\varepsilon} e^{-\lambda(d_{\widetilde{V}}(x,0) - \varepsilon)}$ *in* $\mathbf{R}^2$

$\chi_\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$として、

$$supp\ \chi_\eta \subset B_V(0, s_0 - \tfrac{3}{4}\eta)\ ,\ 0 \le \chi_\eta \le 1\ in\ \mathbf{R}^2\ ,\ \chi_\eta = 1\ on\ B_V(0, s_0 - \eta)$$

を満たすものを選ぶ。

$\widetilde{\psi}(\lambda)(x) := \chi_\eta(x)\widetilde{\phi}(\lambda)(x)$とおく。

$\theta \in E^*$に対し $\widetilde{\psi}_\theta(\lambda)(x) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}_\gamma^B\widetilde{\psi})(x)\ \ (\in \mathcal{H}_{B,\theta} \cap C^\infty(\mathbf{R}^2)\ )$

とおいて、次を得る。

$$(3.3)\quad H(\lambda;\theta)\widetilde{\psi}_\theta(\lambda) = \widetilde{\mathcal{E}}(\lambda)\widetilde{\psi}_\theta(\lambda) + \widetilde{r}_\theta(\lambda)$$

ただし、$\widetilde{r}_\theta(\lambda)(x) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}_\gamma^B\widetilde{r}(\lambda)\ )(x),$

$$\widetilde{r}(\lambda) := -\triangle\chi_\eta\widetilde{\phi} - 2\nabla\chi_\eta\cdot\nabla\widetilde{\phi} - 2bi(\ (x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2})\chi_\eta)\widetilde{\phi}$$

(3.2),(3.3)を用いて次の評価を得る。

$$(3.4)\quad \|\widetilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = 1 + O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)}),$$

error termは$\theta \in E^*$に関しuniform.

$(3.5)\quad \|\widetilde{r}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)})$, error termは$\theta \in E^*$に関しuniform.

したがって、
$$dis(\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda)\ ,\ \sigma(H(\lambda;\theta))\ ) \le \frac{\|(H(\lambda;\theta) - \widetilde{\mathcal{E}}(\lambda))\widetilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}}{\|\widetilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}} = \frac{\|\widetilde{r}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}}{\|\widetilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}} = O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)})$$

ここで、$\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda) = v_1\lambda + o(\lambda)$, $\mathcal{E}_1(\lambda;\theta) = v_1\lambda + o(\lambda)$, $\mathcal{E}_2(\lambda;\theta) = v_2\lambda + o(\lambda)$
(ただし、 $v_1 = \sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2} < v_2$, 各error termは$\theta \in E^*$に関して一様)
を用いてTheorem Aの結論を得る。□

4 Outline of Proof of Theorem B

この章ではTheorem Bの証明の概略を述べる。§3で得た$\mathcal{E}_1(\lambda;\theta)$の評価は$\theta \in E^*$に関し一様な評価であったが、bandの幅をより精密に評価するには、$\mathcal{E}_1(\lambda;\theta)$の$\theta \in E^*$に依存する評価を得ることが必要である。この定理の証明にはW.K.B.解析が本質的な役割を果たす。

まず、準備として関数解析的な定義を述べる。一般に　H: Hilbert sp.
$E, F \subset H$: closed subsp. とする。
$\Pi_F \ : \ H \to F$;　orthogonal projection onto F　とする。

$$\overrightarrow{d}(E,F) := \sup_{x \in E\,,\, \|x\|=1} dis(x,F) = \|(1-\Pi_F)|_E\|_H$$ とおく。

ここで、$\theta \in E^*$に対し$E_\theta(\lambda) := \{k\widetilde{\psi}_\theta(\lambda) \ : \ k \in \mathbf{C}\}$, $F_\theta(\lambda)$を$H(\lambda;\theta)$の$\mathcal{E}_1(\lambda;\theta)$に対応する固有空間とする。§3の内容と、関数解析的方法(see [3], Prop.2.5)を用いて次の補題を得る。

<u>*Lemma* 4.1</u>

$$\overrightarrow{d}(E_\theta(\lambda), F_\theta(\lambda)) = O(e^{-(s_0-2\eta)\lambda}) \ \ (\lambda \to \infty)$$

error term は$\theta \in E^*$に関し一様である。

この補題とLemma 3.1 ,Lemma 3.2から次が得られる。

<u>*Lemma* 4.2</u>

$$\mathcal{E}_1(\lambda;\theta) = \widetilde{\mathcal{E}}(\lambda) + \sum_{\gamma \in \Gamma \backslash \{0\}} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}_\gamma^B \widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} + O(e^{-(2s_0-5\eta)\lambda})$$

$$(as \ \ \lambda \to \infty)$$

$s_0' := \min_{\gamma \in \Gamma \backslash (\Lambda \cup \{0\})} d_V(\gamma, 0) \ \ (> s_0)$とおいて、Lemma 3.2より

$$\mathcal{E}_1(\lambda;\theta) = \widetilde{\mathcal{E}}(\lambda) + \sum_{\gamma \in \Lambda} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}_\gamma^B \widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \widetilde{O}(e^{-s_0'\lambda}) \quad (\lambda \to \infty) \tag{4.1}$$

を得る。(ただし$\widetilde{O}(e^{-s_0'\lambda})$とは$\forall\eta > 0$に対し、$O(e^{-(s_0'-\eta)\lambda})$という意味である)　また直接的な計算により次が判る:

$$(\mathbf{T}_\gamma^B \widetilde{r}, \psi)_{L^2(\mathbf{R}^2)} = \overline{(\mathbf{T}_{-\gamma}^B \widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)}} \quad \forall\gamma \in \Lambda \tag{4.2}$$

$\gamma \in \Lambda$, $a > 0$に対し

$E_\gamma^{(a)} := \{ \, x \in \mathbf{R}^2 \ : \ d_V(0,x) + d_V(\gamma,x) \le s_0 + a\}$とおく。

$a > 0$: 十分小　に対し、　$E_\gamma^{(a)} \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta) \cap B_V(\gamma, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$である。

Ω : open domain with smooth boundary を

$0 \notin \overline{\Omega}$, $\gamma \in \Omega$, $E_\gamma^{(a)} \cap \overline{\Omega} \subset B_V(\gamma, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$, $E_\gamma^{(a)} \cap \Omega^c \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$

を満たすように選ぶ。$\widetilde{\Gamma}_\gamma := \partial\Omega \cap E^{(a)}$とおく。$n = (n_1, n_2)$を$\partial\Omega$のouter unit normalとする。eigenfunctionのdecay estimateを用いて次の補題を得る。

<u>*Lemma* 4.3</u>

$$(4.3)\quad (\mathbf{T}_\gamma^B\tilde{r},\tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} \equiv \int_{\tilde{\Gamma}_{-\gamma}} \{\phi\tfrac{\partial}{\partial n}(\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B\tilde{\phi}})-(\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B\tilde{\phi}})\tfrac{\partial}{\partial n}\tilde{\phi}\}\,dS$$
$$-2bi\int_{\tilde{\Gamma}_{-\gamma}} \phi\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B\tilde{\phi}}(x_2n_1-x_1n_2)\,dS \quad mod\ O(\lambda^{-\infty}e^{-s_0\lambda})$$

$(\mathbf{T}_\gamma^B\tilde{r},\tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)}$を$mod\ O(\lambda^{-\infty}e^{-s_0\lambda})$で近似するために、$\tilde{H}(\lambda)$の固有関数をW.K.B.解で近似する。以下、W.K.B.解について述べる。

$\varepsilon>0$:十分小に対し
Ω_ε :=the set consists of $\{0\}$ and the union of the interiors of all minimal geodesics from 0 to some point in $\mathbf{R}^2$,of length strictly less than $s_0-\varepsilon$.
とおく。$d(x):=d_V(x,0)$とおいて、$d(x)\in C^\infty(\Omega_0)$, $|(\nabla d)(x)|^2=V(x)\ in\ \Omega_0$が成り立つ。

<u>*Lemma* 4.4</u> $\exists e_1,e_2,\cdots\in\mathbf{R}$ $(e_1=\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2})$
$\exists\mathcal{E}(\lambda)\sim e_1\lambda+e_2+e_3\lambda^{-1}+\cdots$ $(\lambda\to\infty)$
$\exists\ a_0(x)$, $a_1(x)\cdots$: *complex valued* C^∞ *function in* Ω_0
with $a_0(x)\neq 0\ in\ \Omega_0$, $a_0(0)=1$, $a_j(0)=0$ $(j\geq 1)$
$\exists a(x,\lambda)$: *complex valued* C^∞ *function of* x *in* Ω_ε

s.t. $a(x,\lambda)\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)\lambda^{-j}$

$$(i.e.\ \max_{|\alpha|\leq 2}\sup_{x\in\Omega_\varepsilon}|\partial_x^\alpha(a(x,\lambda)-\sum_{j=0}^{N}a_j\lambda^{-j}|=O(\lambda^{-(N+1)})\ \ \forall N\in\mathbf{N})$$
$$,(H(\lambda)-\mathcal{E}(\lambda))\theta(\lambda)=O(\lambda^{-\infty})e^{-\lambda d(x)}\ \ in\ \ \Omega_\varepsilon$$
$$(i.e.\ \sup_{x\in\Omega_\varepsilon}|e^{\lambda d(x)}(H(\lambda)-\mathcal{E}(\lambda))\theta(\lambda)|=O(\lambda^{-\infty}))$$
where $\theta(\lambda):=\lambda^{\frac{1}{2}}a(x,\lambda)e^{-\lambda d(x)}$

$\varepsilon>0$を固定する。$\|\theta(\lambda)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}=1$ とnormalizeしておく。
$K\subset\Omega_\varepsilon$: compact とする。$\eta>0$を十分小さく取って、$\Omega_\varepsilon\subset B_V(0,s_0-\eta)$とする。
$\widehat{K}$をKの点と$\{0\}$とを結ぶminimal geodesic 全体のなす集合とする。$\widehat{K}\subset\Omega_\varepsilon$である。
$\tilde{\Omega}$: $\widehat{K}$の開近傍を$\tilde{\Omega}\subset\subset\Omega_\varepsilon$となるように選ぶ。
$\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$を、$\chi=1\ in\ nbd.\ of\ \widehat{K}$, $supp\chi\subset\tilde{\Omega}$を満たすように選ぶ。

Lemma 4.4を用いて、$|(\chi\theta(\lambda), \widetilde{\phi}(\lambda))_{L^2(\mathbf{R}^2)}| = 1 + O(\lambda^{-\infty})$を得る。
このことから、十分大きいλに対して、$\widetilde{\phi}(\lambda)$は$(\chi\theta(\lambda), \widetilde{\phi}(\lambda))_{L^2(\mathbf{R}^2)} > 0$を満たすとしてよい。
$\omega(\lambda) = \chi(\widetilde{\phi}(\lambda) - \theta(\lambda))$とおく。

<u>*Lemma* 4.5</u> $\widetilde{K}$: *nbd. of* $\widehat{K}$が存在して $(\widetilde{K} \subset\subset \widetilde{\Omega})$
$\omega = O(\lambda^{-\infty})e^{-\lambda d(x)}$ *in* $H^2(\widetilde{K})$が成り立つ。

この補題と(4.3)より

$$(4.4)\quad (\mathbf{T}^B_\gamma \widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} \equiv \int_{\widetilde{\Gamma}_{-\gamma}} \{\theta \frac{\partial}{\partial n}\overline{(\mathbf{T}^B_{-\gamma}\theta)} - \overline{(\mathbf{T}^B_{-\gamma}\theta)}\frac{\partial}{\partial n}\theta\}\, dS$$
$$-2bi\int_{\widetilde{\Gamma}_{-\gamma}} \theta\overline{\mathbf{T}^B_{-\gamma}\theta}(x_2 n_1 - x_1 n_2)\, dS$$

を得る。仮定 (H.7) , (H.8) とMorse lemmaを用いて、

$$(4.5)\quad (\mathbf{T}^B_\gamma \widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} = (\widetilde{b_\gamma}\lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}}))e^{-s_0\lambda} \quad (\lambda \to \infty) \quad ,\gamma \in \Lambda$$
$$\text{with } \widetilde{b_\gamma} \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$$

を得る。仮定(H.9) と $\widetilde{b_\gamma} = \overline{\widetilde{b_{-\gamma}}}$ for $\gamma \in \Lambda$であることを用いて定理の結論を得る。□

References

[1] B. Simon : *Semiclassical Analysis of Low-Lying Eigenvalues III. Width of the Ground State Band in Strongly Coupled Solids,* Anal. Phys. ,158 (1984),415-420.

[2] A. Outassourt: *Comportement semi-classique pour l'opérateurs de Schrödinger à potentiel périodique,* J. Funct. Anal. 72 (1987) 65-93.

[3] B. Helffer-J. Sjöstrand : *Multiple wells in the semi-classisal limit I,* Comm. in P.D.E. , 9(4), (1984) 337-408.