数理解析研究所講究録
938巻 1996年 60-74



# "自己混合性"を持つ近傍族のPoisson法則

都立大・理　平田　雅樹（Masaki Hirata）

## §1. 序及び問題設定

Sinaiは量子カオスに関する論文[2]の中で次のような2次元トーラス $\mathbb{T}^2=[0,1]\times[0,1]$ 上の斜積変換 $T_\alpha$（$\alpha$は定数）

$$T_\alpha(x,y)=(x+\alpha,\ x+y)\pmod 1$$

による力学系を考え、巾$\varepsilon$の水平領域

$$U_\varepsilon=\{(x,y)\ ;\ |y|\leq\varepsilon\}$$

から出発した点の軌道 $\{T_\alpha^n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ の $U_\varepsilon$ への再帰時間について考察した。$U_\varepsilon$ 上の確率測度として規格化したLebesgue測度をとり、確率変数 $\zeta_\varepsilon(x,y)$：

$$\zeta_\varepsilon(x,y)=\#\{0\leq n\leq\tfrac{1}{\varepsilon}\ ;\ T_\alpha^n(x,y)\in U_\varepsilon\}$$

を考える。Sinaiはa.e. $\alpha$に対して、$\zeta_\varepsilon$の$\varepsilon\to0$での極限分布としてPoisson分布が現われると予想した。この予想は現在までのところまだ未解決であるが、計算機の数値実験の結果などから正しいものと考えられている。

Sinaiの問題は、もともとは、物理でkicked rotator modelと呼ばれる一次元Schrödinger方程式で記述される量子系の準エネルギーの間隔分布について（kickの効果→ $\infty$ の極限で）Poisson分布が現われるという理論物理での予想を数学的に正当化するという試みの過程で考察されたものであるが、(詳しくは[2]を参照)，このSinaiの予想が正しければ純粋に力学系理論の立場から見ても大変興味深い現象である。何故なら，力学系の理論において，再帰時間についてはPoincaréの再帰定理や角谷-Ambrose理論など基本的なもの以外にあまり知られているものがなく，特にその分布についてはあまり考察されていないからである。またSinaiは，このPoisson分布の現れ方は，通常の確率論におけるPoisson分布の現れ方と異なるものである可能性を示唆しており，この点も興味深い。

そこで問題を次のように一般化して設定し、考察することとする。

$X$をコンパクト距離空間、$F: X \to X$を連続写像，$\mu$を$X$上の$F$-不変なBorel確率測度とする。$z \in X$を固定し、$U_\varepsilon(z)$を$z$の$\varepsilon$-近傍（以下$U_\varepsilon$と略記する）とする。$U_\varepsilon(z)$上の確率測度として、$\mu$を$U_\varepsilon$に制限して正規化し

た測度 $\mu_\varepsilon$，つまり，

$$\mu_\varepsilon = \mu|U_\varepsilon / \mu(U_\varepsilon)$$

を定める。

Poincaré の再帰定理より，$\overbrace{x}^{a.e.} \in U_\varepsilon$ の軌道 $\{F^i x\}_{i=1}^{\infty}$ は $U_\varepsilon$ に無限回戻ってくることがわかるが，そこで $k$ 回再帰時間 $T_\varepsilon^{(k)}: U_\varepsilon \to \mathbb{N}^+$ を次のように定義する。

$$T_\varepsilon^{(1)}(x) = T_\varepsilon(x) = \inf\{i \in \mathbb{N}^+ ;\ F^i x \in U_\varepsilon\}$$

$$T_\varepsilon^{(k)}(x) = T_\varepsilon(x) + T_\varepsilon(F^{T_\varepsilon^{(1)}(x)} x) + \cdots + T_\varepsilon(F^{T_\varepsilon^{(k-1)}(x)} x) \quad (k \geq 2)$$

もちろん，a.e. $x$ に対して $T_\varepsilon^{(k)}(x) \to \infty$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ であるから正規化した再帰時間：

$$c_\varepsilon T_\varepsilon^{(k)} \qquad \text{ただし，} c_\varepsilon = 1/E_{\mu_\varepsilon}[T_\varepsilon]$$

を考えることとする。そこで問題は次のようになる。

**問題**

$c_\varepsilon T_\varepsilon^{(k)}$ の $\varepsilon \to 0$ での極限分布は何になるか？

また，次のように考えれば，確率過程の問題として考えることもできる。まず，Counting 測度（$\mathbb{N}^+$-値ランダム測度）$Y_{\varepsilon,x}$（$x \in U_\varepsilon$ は固定）：

$$Y_{\varepsilon,x} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{c_\varepsilon T_\varepsilon^{(k)}(x)}$$

を導入する。ただし，$\delta_p$ は $p \in \mathbb{R}^+$ における Dirac の $\delta$-測度とする。このとき，$Y_{\varepsilon,\cdot}$ は $\mathbb{R}^+$ 上の点過程となる。

そこで、問題は、

問題： $Y_\varepsilon$ の $\varepsilon \to 0$ での極限は何か？

ということになる。もちろん、系に何らかの条件を付けなければ、この問題に答えることはできないが、ある条件の下では、$Y_\varepsilon$ の $\varepsilon \to 0$ での極限としてPoisson点過程が現れることがわかる。以下、その条件と結果について、述べていくこととする。

## §2 "自己混合性"条件とPoisson法則

Sinaiの考えた斜積変換による力学系は、$\alpha$ が無理数の場合、エルゴード性は持つが、混合性は持たない。しかし、系がある意味で強い"カオス的"条件を満たせば、先の問題の答えとして、Poisson点過程となることが期待できる。実際、Axiom A 系などに対しては、既に結果が得られている。ただし、ここで確率測度としては、リプシッツ連続なポテンシャルに対する平衡測度をとる。（Cf. [3], [5], etc.）しかし、Axiom A系は大変強い混合性を持つ系であり（弱Bernoulli；corelationが指数的に減少する），その証明方法をより混合性の弱い力学系に対して直接応用することはできない。

ところで、Sinaiの例を観察すると、「$T_\alpha^{-n} U_\varepsilon \cap U_\varepsilon$ は

$U_\varepsilon$ とほぼ均等に交わり、$T_\varepsilon^{-n}U_\varepsilon \cap U_\varepsilon$ の測度は $U_\varepsilon$ の測度の2乗に等しい。」ということがわかる。従って、系が弱Bernoulliほど強い混合性を持たなくとも、$U_\varepsilon$ 上に制限して見たとき何らかの"混合的"条件を持っていれば、Axiom A系の場合と同様な結果が期待できる。そこで、ここでは次のような条件を満たす系を考えることにする。

力学系 $(X, F, \mu)$ は有限な生成分割を持ち、φ-混合性を持つとする。また、$U_\varepsilon$ が次の2つの条件を満たすと仮定する。(このとき、"自己混合性"を持つと呼ぶ。)

(C.1) $\exists C>0,\ \forall i, \forall \varepsilon>0$

$$\mu(F^{-i}U_\varepsilon \cap U_\varepsilon) \le C\,\mu(U_\varepsilon)^2$$

(C.2) $N_\varepsilon := \inf\{ i \in \mathbb{N}^+ ;\ \mu(F^{-i}U_\varepsilon \cap U_\varepsilon) > 0 \}$

$$N_\varepsilon \cdot \mu(U_\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

ここで、(C.2) は $U_\varepsilon$ が再び $U_\varepsilon$ と交わるまでの時間がそれほど長くないことを保証する条件である。

注: Axiom A系など力学系それ自身が強い混合性を持つ場合には、ほとんど全ての点 $z \in X$ について"自己混合性"の条件を満たす。ただし、周期点などはこの条件を満たさない例外点である。(実際、周期点の近傍については (C.1) の条件が崩れる。)

さて、以上のような場合、次の定理が成り立つ。

定理（Poisson 法則）

$z \in X$ の近傍が“自己混合性”を満たすとする。このとき、規格化した再帰時間の作る点過程 $Y_\varepsilon$ の $\varepsilon \to 0$ での極限は（有限次元分布の意味で）Poisson 点過程となる。つまり、任意の $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$ 上の任意の disjoint な Borel 集合 $B_1, \cdots, B_n$, 任意の非負整数 $k_1, \cdots, k_n$ に対し、次式が成立する：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon(\{x ; Y_{\varepsilon,x}(B_1)=k_1, \cdots, Y_{\varepsilon,x}(B_n)=k_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{l(B_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-l(B_i)}$$

ここで、$l$ は Lebesgue 測度。

以下の節でこの定理の証明の概略を述べる。§3では、その準備として、道具となる Perron - Frobenius 作用素及びそれを摂動した作用素とその性質を述べ、§4で規格化した（1回）再帰時間 $c_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}$ の満たす指数法則,及び Poisson 法則について述べる。ただし、今ここで考える力学系は生成分割を持つことを仮定しているので、問題は本質的には $z \in X$ を含む筒集合 $U_m = U_m(z)$ （$z$ を含む $\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i} \xi$

(ここで $\xi$ は生成分割)の元)に対する Poisson 法則を示すことに帰着できる。よって以下では簡集合の場合について説明することとする。

§3. 準備

$\mu$ に関する $F$ の Perron - Frobenius 作用素 $\mathcal{L} : L^1(\mu) \circlearrowleft$ とは次式で定義される作用素である：

$$\int \mathcal{L}f \cdot g \, d\mu = \int f \cdot g \circ F \, d\mu \qquad \text{for } \forall g \in L^\infty(\mu)$$

また、作用素 $E : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$, $\Phi : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ を次のように定義する：

$$E f := E_\mu(f \mid \mathcal{B}_\infty) \qquad \mathcal{B}_\infty = \bigcap_{i=0}^{\infty} F^{-i}\mathcal{B},$$

ただし、$\mathcal{B}$ : Borel $\sigma$-field of $X$

$$\Phi f := \mathcal{L}(f - Ef)$$

今の場合、$F$ は $\psi$-混合的であるから、$Ef = \int f d\mu$ を満たす。作用素 $E$, $\Phi$ が次の性質を満たすことはその定義より簡単にわかる。

<u>補題 1</u> 1) $E\Phi = \Phi E = 0$ 2) $\Phi^n f = \mathcal{L}^n(f - Ef)$

3) $\lim_{n\to\infty} \|\Phi^n f\|_{L^1(\mu)} = 0$

また、$U_m = U_m(z)$ 上の確率測度として

$$\mu_m := \mu|U_m / \mu(U_m)$$

をとり、また $k$ 回再帰時間 $T_m^{(k)}: U_m \to \mathbb{N}^+$ を先と同様に以下の式で定義する。

$$T_m^{(1)}(x) = T_m(x) := \inf\{i \in \mathbb{N}^+;\ F^i x \in U_m\}$$

$$T_m^{(k)}(x) := T_m(x) + T_m(F^{T_m^{(1)}(x)}x) + \cdots + T_m(F^{T_m^{(k-1)}(x)}x)。$$

また、$z \in X$ の近傍系は“自己混合性”の条件：

(C.1) $\forall i, \forall m$ に対し, $\mu(F^{-i}U_m \cap U_m) \leq C\mu(U_m)^2$

（$C$ は $i, m$ に independent な定数）

(C.2) $N_m := \inf\{i \in \mathbb{N}^+;\ \mu(F^{-i}U_m \cap U_m) > 0\}$ について

$$N_m \cdot \mu(U_m) \longrightarrow c \quad (m \to \infty)$$

を満たすと仮定する。

まず考えるべきことは、規格化した再帰時間 $c_m T_m$（ただし $c_m = 1/E_{\mu_m}(T_m)$）の $m \to \infty$ での極限分布である。角谷-Ambrose 理論より $c_m = \mu(U_m)$ となることに注意すれば、$c_m T_m$ の Laplace 変換 $\varphi_m(\alpha)$ は次の様になる。

$$\varphi_m(\alpha) = \int e^{-\alpha c_m T_m}\, d\mu_m$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha\mu(U_m)} \mu_m(T_m = i)。$$

さて、$\varphi_m(\alpha)$ の $m \to \infty$ の極限を計算するため、Perron-Frobenius 作用素 $\mathcal{L}$ を摂動した作用素 $\tilde{\mathcal{L}}_m : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$：

$$\tilde{\mathcal{L}}_m f := \mathcal{L}(1_{U_m^c} \cdot f)$$

ここで $1_{U_m^c}$ は $U_m$ の補集合の定義関数

を導入する。 $\tilde{\mathcal{L}}_m$ について次の補題が成立する。

**補題2** $i \geq 1$ に対して

$$\mu_m(T_m = i) = \int \tilde{\mathcal{L}}_m^{i-1} 1 - \tilde{\mathcal{L}}_m^{i} 1 \, d\mu_m .$$

証明) $\mathcal{L}$ の定義、及び $\mathcal{L}1 = 1$ に注意すれば、単純な計算によってチェックできる。//

**補題3** $i \geq 1$ に対して、

$$\tilde{\mathcal{L}}_m^{i} 1 = \lambda_m^{i} - \lambda_m^{i-1} \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_m^{-k} \tilde{\mathcal{L}}_m^{k} \Phi 1_{U_m}$$

ここで、 $\lambda_m := 1 - \mu(U_m)$.

証明) $i = 1$ のときは、

$$\tilde{\mathcal{L}}_m 1 = \mathcal{L}(1_{U_m^c}) = 1 - \mathcal{L}(1_{U_m}) = 1 - (E 1_{U_m} + \Phi 1_{U_m}) = \lambda_m - \Phi 1_{U_m}$$

あとは、この関係式を用いて帰納法で示せる。//

ここで、

$$\varphi(t) := \sum_{i=1}^{\infty} t^i \mu_m(T_m = i)$$

と定義すれば、 $\varphi_m(\alpha) = \varphi(e^{-\alpha \mu(U_m)})$ であるが、先の補題1，補題2を用いれば $\varphi(t)$ は次のように分解できる：

$$\varphi(t) = t + (t-1) \sum_{i=1}^{\infty} t^i \lambda_m^i$$

$$- (t-1) \sum_{i=1}^{\infty} t^i \lambda_m^{i-1} \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_m^{-k} \int \tilde{\mathcal{L}}_m^{k} \Phi 1_{U_m} d\mu_m .$$

よって、上式に $t = e^{-\alpha \mu(U_m)}$ を代入し、 $m \to \infty$ での極限を計算することによって $c_m T_m$ の極限分布を知ることができる。

## §4. Poisson 法則の証明

まず、$c_m T_m$ の極限分布について次の定理が成り立つ。

**定理3.** (指数法則)

$z \in X$ が"自己混合性"条件 (C.1), (C.2) を満たすとき、規格化した再帰時間 $c_m T_m$ の $m \to \infty$ での極限分布が存在し、それは、パラメータ1の指数分布となる。

この定理は、$\psi_m(\alpha) = \psi(e^{-\alpha\mu(U_m)}) \longrightarrow \frac{1}{1+\alpha} \quad (m \to \infty)$

を示せば、$\frac{1}{1+\alpha}$ がパラメータ1の指数分布の Laplace 変換であることから証明される。そのために、

$$\mathrm{I}(t) := t + (t-1)\sum_{i=1}^{\infty} t^i \lambda_m^i = t + (t-1)\frac{t\lambda_m}{1-t\lambda_m}$$

$$\mathrm{II}(t) := (t-1)\sum_{i=1}^{\infty} t^i \lambda_m^{i-1} \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_m^{-k} \int \tilde{\lambda}_m^k \Psi 1_{U_m} \, d\mu_m$$

とおけば、

$$\mathrm{I}(e^{-\alpha\mu(U_m)}) \longrightarrow \frac{1}{1+\alpha} \quad (m \to \infty)$$

はただちに示せるが、

$$\mathrm{II}(e^{-\alpha\mu(U_m)}) \longrightarrow 0 \quad (m \to \infty)$$

は、以下の補題から導かれる。

**補題4.**

$$\mathrm{II}(t) = \frac{(t-1)^2}{\mu(U_m)(1-t\lambda_m)} \sum_{k=1}^{\infty} t^k \int \tilde{\lambda}_m^k \Psi 1_{U_m} \, d\mu$$

証明) $1_{U_m} = 1 - 1_{U_m^c}$ を使って、

$$\int \tilde{\lambda}_m^k \Psi 1_{U_m} \, d\mu_m = {}^1\!/_{\mu(U_m)} \int 1_{U_m} \cdot \tilde{\lambda}_m^k \Psi 1_{U_m} \, d\mu$$

$$= \frac{1}{\mu(U_m)} \int \tilde{\mathcal{L}}_m^{k} \Phi 1_{U_m} - \tilde{\mathcal{L}}_m^{k+1} \Phi 1_{U_m} \, d\mu$$

これを Ⅱ(t) の定義式に代入すればよい。//

次に、$\int \Phi 1_{U_m} d\mu = 0$ となることに注意して

$$\sum_{k=1}^{\infty} t^k \int \tilde{\mathcal{L}}_m^k \Phi 1_{U_m} d\mu = \sum_{k=1}^{N_m-1} t^k \int \tilde{\mathcal{L}}_m^k \mathcal{L} 1_{U_m} d\mu$$
$$+ \sum_{k=N_m}^{\infty} t^k \int \tilde{\mathcal{L}}_m^k \mathcal{L} 1_{U_m} d\mu$$
$$- \mu(U_m) \sum_{k=1}^{\infty} t^k \int \tilde{\mathcal{L}}_m^k 1 \, d\mu$$
$$=: (i) + (ii) - (iii)$$

と分割すれば、次の補題が成立。

補題5： $N_m' := N_m - 1$.

$$(i) = (1 - t^{N_m'}) \frac{t\,\mu(U_m)}{1-t}.$$

証明） $N_m$ の定義より、$\int \tilde{\mathcal{L}}_m^k \mathcal{L} 1_{U_m} d\mu = \mu(U_m)$ $(k \leq N')$

となり、これを使えば明らか。//

また、$N_m$ の定義から

$$1_{U_m^c} \circ F^{N_m'} \cdots 1_{U_m^c} \circ F \cdot 1_{U_m} = 1_{U_m}$$

であることに注意すれば、(ii) は次の形に書き直せる：

$$(ii) = t^{N_m'} \sum_{l=1}^{N_m'} t^l \int \tilde{\mathcal{L}}_m^{N_m'+l} \mathcal{L} 1_{U_m} d\mu$$
$$+ t^{2N_m'} \sum_{l=1}^{\infty} t^l \{ \mu(V_{m,l} \cap U_m) - \mu(V_{m,l}) \cdot \mu(U_m) \}$$
$$+ t^{2N_m'} \mu(U_m) \sum_{l=1}^{\infty} t^l \int \tilde{\mathcal{L}}_m^l 1 \, d\mu$$
$$- t^{2N_m'} \sum_{l=1}^{\infty} t^l \sum_{j=1}^{N_m'} \mu(V_{m,l} \cap F^{-N_m'-j} U_m \cap U_m)$$

ここで、$V_{m,l} = \bigcap_{j=2N_m'+1}^{2N_m'+l} F^{-j} U_m^c$ 。

以上の変形は、それほど明らかではないが、変形の過程をここで記すには煩雑すぎるので略する。(詳しくは [4])

さて、以上のことから、結局、

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k \int \tilde{\mathcal{L}}_m^k \Psi \mathbf{1}_{U_m}\, d\mu = (1-t^{N_m'})\frac{t\,\mu(U_m)}{1-t}$$

$$+ t^{N_m'} \sum_{l=1}^{N_m'} t^l \int \tilde{\mathcal{L}}_m^{N_m'+l} \mathcal{L}\, \mathbf{1}_{U_m}\, d\mu$$

$$+ t^{2N_m'} \sum_{l=1}^{\infty} t^l \{\mu(V_{m,l}\cap U_m) - \mu(V_{m,l})\,\mu(U_m)\}$$

$$- t^{2N_m'} \sum_{l=1}^{\infty} t^l \sum_{j=1}^{N_m'} \mu(V_{m,l}\cap F^{-N_m'-j} U_m \cap U_m)$$

$$- (1-t^{2N_m'})\,\mu(U_m) \sum_{l=1}^{\infty} t^l \int \hat{\mathcal{L}}_m^l 1\, d\mu$$

$$=: a(t) + b(t) + c(t) - d(t) - e(t) \quad (\text{とおく})$$

と分解できる。

<u>補題6</u>: $\Pi(e^{-\alpha\mu(U_m)}) \to 0 \quad (m\to\infty)$

証明) $z\in X$ が"自己混合性"条件を満たすことから、

$$\lim_{m\to\infty} a(e^{-\alpha\mu(U_m)}) = \lim_{m\to\infty} b(e^{-\alpha\mu(U_m)}) = \lim_{m\to\infty} d(e^{-\alpha\mu(U_m)})$$

$$= \lim_{m\to\infty} e(e^{-\alpha\mu(U_m)}) = 0$$

であることは比較的容易に示せる。 また、系が $\varphi$-混合性を持つことから、次の評価を得る。

$$|\mu(V_{m,l}\cap U_m) - \mu(V_{m,l})\,\mu(U_m)| \le 4\,\varphi(N_m')\cdot\mu(U_m)$$

ここで、条件 (C.1) より $N_m \to \infty$ $(m\to\infty)$ よって、$\varphi(N_m)\to 0$ となることがわかり、このことから

$\lim_{m\to\infty} c(e^{-\alpha\mu(U_m)}) = 0$ も導かれる。 また、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(e^{-\alpha\mu(U_m)}-1)^2}{\mu(U_m)(1-\lambda_m e^{-\alpha\mu(U_m)})} = \frac{\alpha^2}{\alpha+1} \neq 0$$

であるから、$\lim_{m\to\infty} \Pi(e^{-\alpha\mu(U_m)}) = 0$ を得る。//

以上で定理3の証明は終わった。次に Poisson 法則について考えるが、その前に次の2つの事実に注意しよう。

1). $\mu_m$ は $F$ の $U_m$ 上に誘導された変換 $F^{T_m}$ の不変測度であることから、任意の $k \geq 1$ に対して、増分 $C_m T_m^{(k+1)} - C_m T_m^{(k)}$ は $C_m T_m$ と同分布を持つ。

2) 系が $\psi$-混合性を持つことから、$C_m T_m^{(k+1)} - C_m T_m^{(k)}$ の $m \to \infty$ での極限分布は、互いに独立である。

以上のことと、定理3より、規格化された再帰時間 $C_m T_m^{(k)}$ の極限分布について次の命題が導かれる。

命題7

$$\lim_{m\to\infty} \mu_m(C_m T_m^{(k)} \leq t \text{ かつ } C_m T_m^{(k+1)} > t) = \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$

$\mathbb{R}^+$ 上の点過程 $Y_m$ を先と同様に次式で定義する：

$$Y_{m,\cdot} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{C_m T_m^{(k)}}(\cdot) .$$

このとき、命題7から、次の Poisson 法則が得られる。

命題8：任意の $n \in \mathbb{N}^+$ 及び、任意の disjoint な Borel 集合 $B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ と任意の非負整数 $k_1, \cdots, k_n$ に対して、

$$\lim_{m \to \infty} \mu_m \left( Y_m(B_1) = k_1, \cdots, Y_m(B_n) = k_n \right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{l(B_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-l(B_i)}$$

ここで $l$ は Lebesgue 測度。

以上、筒集合についての Poisson 法則ついて述べてきたが、§2で述べた $\varepsilon$−近傍についての Poisson 法則は、$U_\varepsilon(z)$ を筒集合の有限個の和集合でうまく近似することによって示すことができる。この近似の仕方については、[3] の Section 5 を参照して欲しい。

最後に反例について注意しておく。先に周期点は条件 (C.1) を満たさないことを注意したが、この場合、定理3が成立しない。実際、Axiom A 系においては、規格化した再帰時間 $c_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}$ の $\varepsilon \to 0$ での極限分布は、$\delta$−分布と指数分布の線型結合となる。

# 参考文献

[1]. Ya. G. Sinai. Some mathematical problems in the Theory of quantum chaos, Physica A 163, 197-204.

[2]. Ya. G. Sinai. Mathematical problems in the theory of quantum chaos, Lec. Note in Math. 1469, 41-59

[3]. M. Hirata. Poisson law for Axiom A diffeomorphisms, Ergod. Th. & Dynam. Sys (1993), 13, 533-556.

[4]. M. Hirata. Poisson law for the dynamical systems with the "self-mixing" conditions, Proc. of the International Conference on Dynam. Sys. and Chaos, (1995) vol. 1, 87-96 (World Scientific)

[5]. Pitskel. Poisson limit law for Markov chains, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1991), 11, 501-513.