

可逆力学系における非平衡状態

- 力学と統計力学の対応について -

基礎化学研究所 田崎 秀一 (Shuichi Tasaki)

§1. 序

電気伝導や物質の拡散といった「巨視的」現象は Ohm の法則や拡散の Fick の法則などの現象論的法則によって記述される。これらの現象は原子や分子を支配する「微視的」力学によって説明されている。前者は統計熱力学に対応しており、後者は（ニュートン力学や量子力学という）力学に対応している。通常の見方では、現象とその背景にある力学は1対1に対応していると考えられている。平衡系の統計力学¹⁾では、外界から隔離された孤立系がミクロ・カノニカル分布についてエルゴード性をもち“平均的”に熱平衡状態に接近することを仮定し、熱平衡およびそれに近い状態にある系のふるまいが背景にある力学によって一義的に計算される。しかし、力学系理論でよく知られているように、一つの系は無数に多くのエルゴード的測度をもつことができる。つまり、力学法則と統計的に記述される現象の対応は一般には1対多である。このような場合、測度の滑らかさや Kolmogorov-Sinai エントロピー最大といった条件で、単一の「物理的」測度を選び、他のエルゴード的測度を捨てる工夫がなされてきた。本稿では、この取扱いに力学に還元されない要素が含まれ、統計熱力学と力学の間に溝があることを、統計的性質が厳密に調べられるエルゴード的な可逆力学モデル、多重パイこね変換を用いて示してゆきたい。

多重パイこね変換は拡散を示す純力学的カオスモデルの一つである。拡散現象は酔歩によって確率的にモデル化できる。酔歩でランダム変数の役割を決定論的カオスに置き換えることにより拡散の力学モデルが構成できる²⁻¹⁰⁾。多重パイこね変換はこのカオス系としてパイこね変換を用いたものである⁸⁻¹⁰⁾。モデルについては第2節で説明する。第3節では、この系が非可算無限個の異なる不変測度のそれぞれについて混合的であることを示す。この結果自身、力学法則と統計的記述の対応が1対多であることを意味するが、次の理由から面白みは少ない。まず、後述する意味で巨視的に見ると、これら全ての統計的状态は一様分布に対応しており、その差は観測不可能である。さらに、Lebesgue 測度以外の測度は特異的であるため、「物理的に実現される測度は Lebesgue 測度について非特異である」というもっともらしい仮定を設ければ容易に唯一のエルゴード的測度を選び出すことができる。第4節では、不変測度の一様定常解を求め、その「流れ」の性質を調べる。そして、この解が流れを伴った非平衡定常状態に対応していることを示す。このとき、与えられた一つの巨視的境界条件について非可算無限個の定常状態が存在する。つまり、巨視的境界条件によって一つの状態を選ぶことはできない。また、各状態の輸送の性質及び分布は巨視的に見ても異なり、力学法則と統計的に記述される現象が1対多に対応していることが如実に示される。さらに、すべての非平衡定常分布はフラクタル的で Lebesgue 測度について特異的な成分を持っており、測度の滑らかさから

単一の状態を選ぶこともできない。このような場合、Kolmogorov-Sinai エントロピー最大といった条件で、単一の「物理的」測度が選ばれるが、この「選択則」の根拠は「情報生成速度が大きい状態が実現している」と言ったもので、力学には還元できない。この点については第5節で論じる。

多重パイこね変換は無限に大きい相空間をもつ。従って、物理的に考えると、この系では、異なる境界条件に対応する異なる定常状態がすべて実現されなければならない。実際、平衡分布は周期的有限系のエルゴード測度の極限として、非平衡定常分布は有限開放系のエルゴード測度の極限として特徴付けることができる。これは無限に大きな系の一般的特徴であると期待される。こう考えると、力学法則と統計的記述の対応が1対多であることが、むしろ非平衡定常状態が実現するための必要条件であることが分かる。何故なら、仮に、考えている系が唯一のエルゴード測度しかもたないとすれば、この系ではそれ以外の分布は実現しないことになり、異なった境界条件に応じて異なった状態が実現することが不可能になるからである。つまり、対応の1対多性が、系の状態の多様性の原因となっているのである。しかし、これは同時に、力学法則と統計的記述の間の連続的つながりを否定し、力学と統計力学の間に溝があることを示している。この溝のため、統計力学には力学に見られなかった要素が含まれ、その結果、両者が異なる階層に属していると考えられることもできる。以上のことから、力学・統計力学間の溝、つまり、一つの力学法則に多数の（統計的に記述される）現象が対応していることが、系の状態の多様性および自然法則の階層性の原因の一つであると言えるかもしれない。

§2. 多重パイこね変換：モデルと時間発展

一次元の酔歩では、一次元格子上を動く粒子が各時間ステップに一つの格子点から左右両隣の格子点にそれぞれ $1/2$ の遷移確率で移動する。格子点を単位正方形に、両隣への振り分けをパイこね変換に置き換えることにより、酔歩の性質を持つ可逆な力学系が構成できる。これが、単位正方形と整数の直積空間 $[0, 1]^2 \times \mathbf{Z}$ 上で次のように定義される多重パイこね変換 B である。

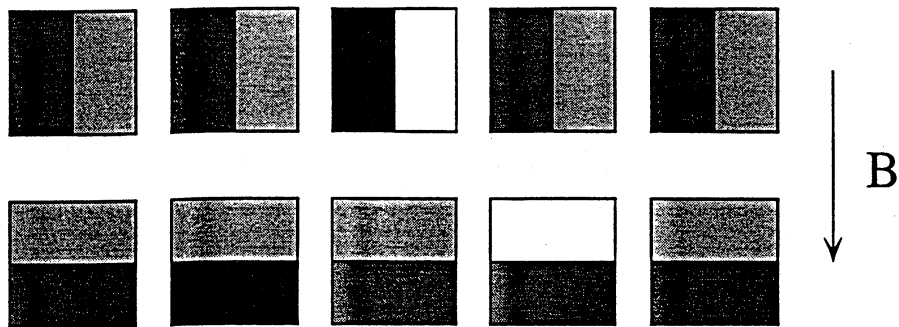


図1: 多重パイこね変換 B

$$B(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, 2x, \frac{y}{2}), & 0 \leq x < 1/2 \\ (n+1, 2x-1, \frac{y+1}{2}), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで、整数 n は、単位正方形のラベルであり、実数の組 (x, y) ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) は、各単位正方形内での座標を表わす。図 1 に、写像 B を模式的に示す。容易にわかる様に、写像 B は、(Lebesgue 測度について) 保測かつ可逆で時間反転不変である。事実、変換

$$I(n, x, y) \equiv (n, 1-y, 1-x) \quad (2.2)$$

に対して

$$B^{-1} = IBI, \quad (2.3)$$

である。また、 B は、一様に双曲的で、最大 Lyapunov 指数 $\ln 2$ を持つ。

統計力学の通常のアプローチでは、考えている系の状態は分布関数によって指定される。分布関数は Liouville 測度に関して絶対連続な測度を定め、逆にそのような測度は分布関数を定める。つまり、系の状態は、相空間上で定義された測度により表わされている。今、測度の時間発展を直接考えると、必ずしも Liouville 測度に関して絶対連続でない測度も含めることができ、より一般の場合も扱える。

多重パイこね変換の場合、測度の時間発展は以下のようなになる。(一般性を損なうことなく) 測度 μ を Borel 測度に限ると、任意の μ -可測集合は、半開矩形

$$\{[0, x] \times [0, y]\}_n, \quad (2.4)$$

の可算個の和集合として表わされる。ここで添字 n は、矩形 $[0, x] \times [0, y]$ が n 番目の単位正方形の部分集合であることを示す。従って、測度 μ は、累積分布関数 G :

$$G(n, x, y) \equiv \mu\left(\{[0, x] \times [0, y]\}_n\right), \quad (2.5)$$

により完全に指定される。測度 μ の時間発展方程式は、Liouville 方程式と同様に導出される。

$$\mu_{t+1}(A) = \mu_t(B^{-1}A), \quad (2.6)$$

ここで、 μ_t は時刻 t での測度を表し、 A は任意の可測集合である。よって、累積分布関数 G の発展方程式は

$$G_{t+1}(n, x, y) = \begin{cases} G_t(n+1, \frac{x}{2}, 2y), & 0 \leq y \leq 1/2 \\ G_t(n+1, \frac{x}{2}, 1) + G_t(n-1, \frac{x+1}{2}, 2y-1) \\ \quad - G_t(n-1, \frac{1}{2}, 2y-1), & 0 \leq y \leq 1/2 \end{cases} \quad (2.7)$$

となる。ここで $G_t(n, x, y) \equiv \mu_t(\{[0, x] \times [0, y]\}_n)$ は時刻 t での測度の累積分布関数である。

§3. エルゴード性

容易に分かるように、累積分布の運動方程式 (2.7) は

$$G(n, x, y) = f_\alpha(x)f_\alpha(y), \quad (3.1)$$

という定常解を持つ。ここで、関数 f_α はパラメータ α ($0 < \alpha < 1$) により特徴付けられ、deRham の関数方程式¹¹⁻¹³⁾

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha f_\alpha(2x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ (1-\alpha)f_\alpha(2x-1) + \alpha, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

の解として定義される。 $\alpha \neq 1/2$ のとき、 f_α は狭義単調増加で Lebesgue 測度についてほとんど至るところ微係数 0 をもつ、つまり、Lebesgue の特異関数である。

(3.1) の測度 $\mu_{\alpha eq.}$ が与えられた相空間 $[0, 1]^2 \times \mathbf{Z}$ は、格子点座標 n について周期性をもち、測度は局所的に有限である。また、そこで定義される多重パイこね変換も n について周期的である。この変換は α ($0 < \alpha < 1$) のすべての値について、次の意味で混合性をもつ：

Proposition 3.1 : 混合性

$A, C \subset [0, 1]^2 \times \mathbf{Z}$ を $\mu_{\alpha eq.}$ -可測で有界な集合とする。すると、次式が成り立つ。

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_{\alpha eq.}(A \cap B^t C) = 0, \quad (3.3)$$

[証明のスケッチ]：まず、 A は有界であるから、 $A \cap \{[0, 1]^2\}_n \neq \emptyset$ を満たす正方形は有限個しかない。この個数を N_A とする。すると $1_{B^t C}$ を集合 $B^t C$ の特性関数とすると

$$\mu_{\alpha eq.}(A \cap B^t C) \leq N_A \sup_n \int_{[0, 1]^2} df_\alpha(x) df_\alpha(y) 1_{B^t C}(n, x, y) \equiv N_A \sup_n \sum_{n'} \int_0^1 dg_t(n', x; n) h_C(n', x), \quad (3.4)$$

が成り立つ。ここで $h_C(n, x) \equiv \int_0^1 df_\alpha(y) 1_C(n, x, y)$ で、関数 $g_t(n', x; n)$ は初期条件 $g_{t=0}(n', x; n) = \delta_{nn'} f_\alpha(x)$ から漸化式

$$g_{t+1}(n', x; n) = \begin{cases} \alpha g_t(n' - 1, 2x; n), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ (1-\alpha)g_t(n' + 1, 2x - 1; n) + \alpha g_t(n' - 1, 1; n), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (3.5)$$

によって生成される。

混合性を言うには、 $\sum_{n'} \int_0^1 dg_t(n', x; n) h_C(n', x)$ が $t \rightarrow \infty$ で n について一様に 0 に収束することを示せばよい。 $\sum_n \int_0^1 df_\alpha(x) |h_C(n, x)| = \mu_{\alpha eq.}(C) < +\infty$ であるから $h_C(n, x)$ は L^1

で、連続関数の空間は L^1 で稠密なので $h_C(n, x)$ は x の連続関数 $\bar{h}_C(n, x)$ によりいくらでも良く近似される。さらに、任意の L^1 関数 h_C について $|\sum_n \sum_{n'} \int_0^1 dg_t(n', x; n) h_C(n', x)| \leq \|h_C\|$ が言えるので ($\|\cdot\|$ は L^1 ノルム)、結局、 $\sum_{n'} \int_0^1 dg_t(n', x; n) \bar{h}_C(n', x)$ が 0 に収束することを示せばよい。さて、

$$\left| \sum_{n'} \int_0^1 dg_t(n', x; n) \bar{h}_C(n', x) \right| \leq \sum_{n'} \int_0^1 dg_t(n', x; n) \sup_x |\bar{h}_C(n', x)| = \sum_{n'} \sup_x |\bar{h}_C(n', x)| g_t(n', 1; n).$$

ただし、 C も有界なので、 n' についての和は有限和である。 $g_t(n', 1; n)$ は (3.5) より $g_{t=0}(n', 1; n) = \delta_{nn'}$ かつ

$$g_{t+1}(n', 1; n) = (1 - \alpha)g_t(n' + 1, 1; n) + \alpha g_t(n' - 1, 1; n), \quad (3.6)$$

を満たす。容易に分かるように、(3.6) の解は n, n' によらない定数 K を用いて $|g_t(n', 1; n)| \leq K/\sqrt{t}$ と評価できる。よって、 n について一様に $\sum_{n'} \int_0^1 dg_t(n', x; n) \bar{h}_C(n', x) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) が言え、(3.3) が示された。 Q.E.D.

多重パイこね変換 B において $-N \leq n \leq N$ の格子座標をもつ正方形から成る $[0, 1]^2 \times \mathbf{Z}$ の部分集合を X_N とし、格子点 $n = N + 1$ と $n = -N$ を同一視して B から得られる X_N 上の変換を ${}_N B$ とする。容易に分かるように力学系 $([0, 1]^2 \times \mathbf{Z}, \mu_{\text{aeq.}}, B)$ は、次の性質をもつ：

- i) 集合 X_N の測度は $N \rightarrow +\infty$ で無限に大きくなる。そして、変換 ${}_N B$ は X_N 上 Kolmogorov 系である。
- ii) $B(\{[0, 1]^2\}_{n=0})$ は有界集合である。
- iii) 変換 ${}_0 B$ はパイこね変換に一致し、有限のエントロピー $h_{KS} = -\alpha \ln \alpha - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha)$ をもつ。

つまり、多重パイこね変換は全ての測度 $\mu_{\text{aeq.}}$ について Goldstein-Lebowitz の意味¹⁴⁾ で周期的 K-系である。性質 i) は変換 B が周期的境界条件を満たす K-系の体積無限大の極限として捉えられることを示している。

以上の結果は、多重パイこね変換が可算無限個の測度 $\mu_{\text{aeq.}}$ のそれぞれについてエルゴード的であることを意味する。つまり、エルゴード性を課しても、力学法則と統計的記述の対応は 1 対多である。しかし、次の理由から面白みは少ない。まず、多重パイこね変換において正方形内の自由度は微視的なダイナミクスに対応していると考えられる。そこでこの自由度を粗視化すると測度 $\mu_{\text{aeq.}}$ はパラメータによらず格子点上の一様分布に対応している。つまり、粗視化によって可算無限個の測度 $\mu_{\text{aeq.}}$ は区別できない。また、 $\alpha \neq 1/2$ のとき測度 $\mu_{\text{aeq.}}$ は Lebesgue 測度について特異的であり、「物理的に実現される測度は Lebesgue 測度について非特異である」という仮定を設ければ唯一のエルゴード的測度を選び出すことができる。そこで次節では、非平衡定常状態を扱う。

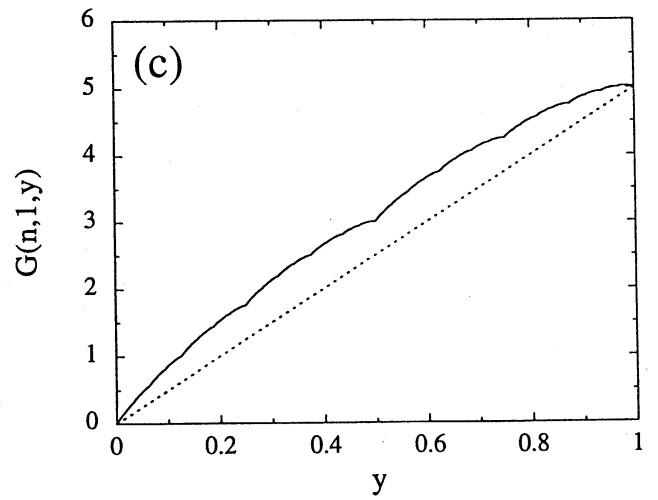
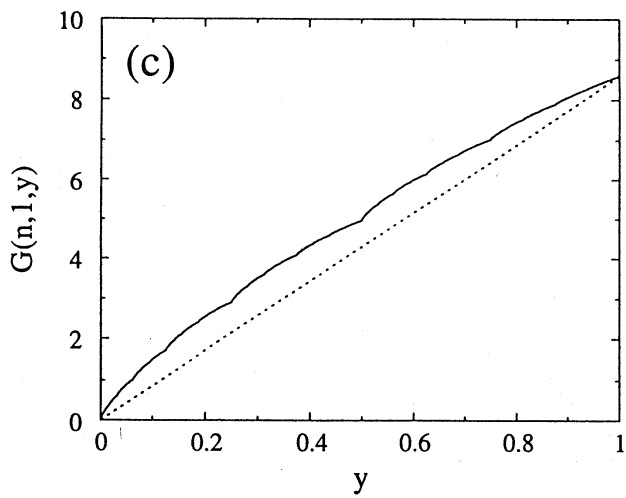
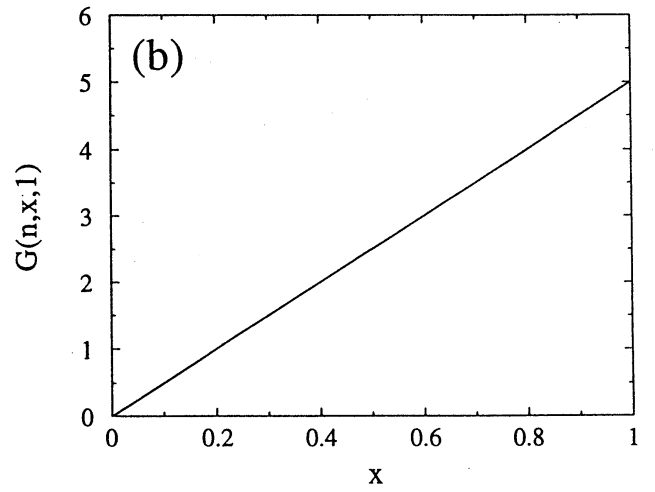
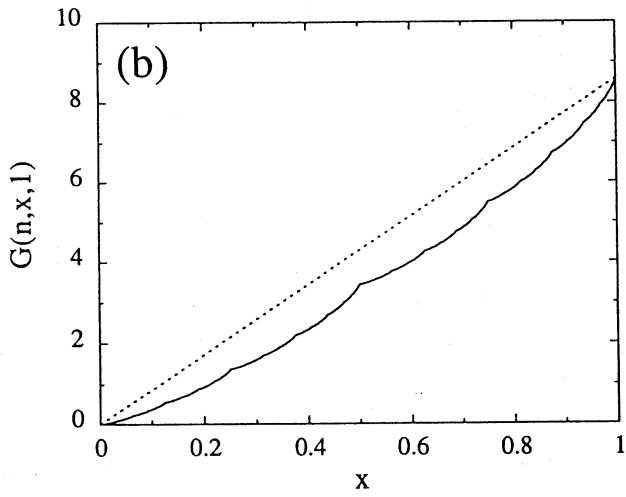
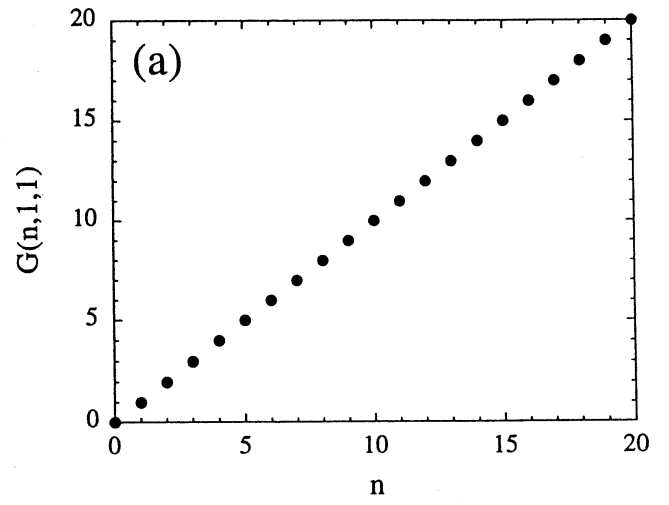
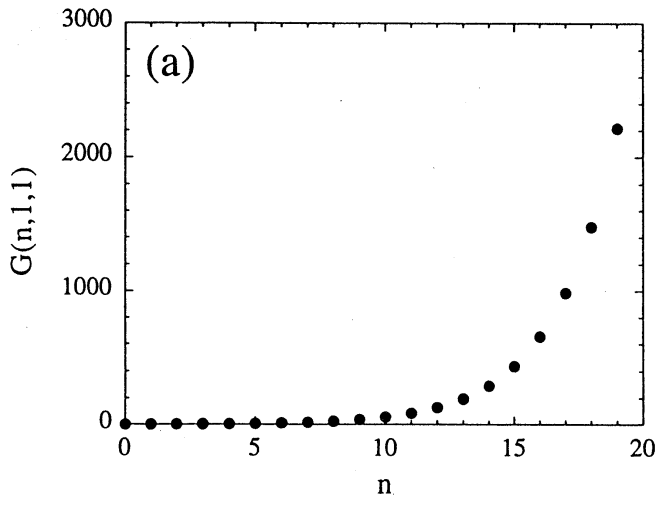


図 2 : 累積分布 $G(n, x, y)$ のふるまい
 $(\alpha = 2/5)$ (a): $G(n, 1, 1)$ v.s. n ,
 (b): $G(5, x, 1)$ v.s. x , (c): $G(5, 1, y)$ v.s. y

図 3 : 累積分布 $G(n, x, y)$ のふるまい
 $(\alpha = 1/2, \text{Fick 状態})$ (a): $G(n, 1, 1)$ v.s. n ,
 (b): $G(5, x, 1)$ v.s. x , (c): $G(5, 1, y)$ v.s. y

§4. 非平衡一様定常状態とその性質

この節では、a) (2.7) 式の定常解で、b) $\alpha_n \equiv G(n, 1/2, 1)/G(n, 1, 1)$ が格子点座標 n によらない一様定常解を調べる。多重パイこね変換は、 x 方向を x 方向に、 y 方向を y 方向に写すので、両方向は独立であると考えられ、積測度 (累積分布関数が x の関数と y の関数の積に書ける測度) で表される定常状態が存在することが示唆される。(因に、前節で扱った測度 μ_{aeq} は積測度かつ B の不変測度である。) このとき累積分布関数は次の様に置ける。

$$G(n, x, y) = G(n, 1, y)F(n, x), \quad (4.1)$$

ただし、 $F(n, 1/2) = \alpha$ は n によらない。 α の値により (2.7) は次のような定常解をもつ。

Proposition 4.1 : (一様定常状態) ^{15,16)}

ア) $\alpha \neq 1/2, 0 < \alpha < 1$ の場合 : 定常状態の累積分布関数は

$$G(n, x, y) = f_\alpha(x) \left\{ A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^n f_{1-\alpha}(y) + A' f_\alpha(y) \right\}. \quad (4.2)$$

となる。ここで A, A' は定数で、 f_α は deRham の関数方程式 (3.2) の解として定まる特異関数である。図 2 (a),(b),(c) のそれぞれに (4.2) の n, x, y 依存性を示す。

イ) $\alpha = 1/2$ の場合 : 定常状態の累積分布関数は

$$G(n, x, y) = x [B \{ny + T(y)\} + B'y]. \quad (4.3)$$

となる。 B, B' は定数である。関数 $T(y)$ は方程式

$$T(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}T(2y) + y, & 0 \leq y \leq 1/2 \\ \frac{1}{2}T(2y-1) + 1-y, & 1/2 < y \leq 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

の一意解として定義される。これは、高木関数^{17,12,13)}と呼ばれ、連続でいたるところ有限な導関数を持たない (図 4 参照)。高木関数とそれに関連した関数の諸性質は畑、山口^{12,13)}により詳しく調べられている。(4.3) の n, x, y 依存性をそれぞれ図 3 (a),(b),(c) に示す。

ウ) 時間反転状態 : 変換 B は時間反転 I (2.2) のもとで不変であるから、定常状態イ) を I で変換したのもも定常状態である :

$$\bar{G}(n, x, y) \equiv \mu \left(I \{ [0, x] \times [0, y] \}_n \right) = y [B \{nx - T(x)\} + B'x]. \quad (4.5)$$

Remark : Proposition 4.1 から、 $\alpha = 1/2$ かつ $B = 0$ の場合を除き、累積分布関数は、特異関数を含む。従って、対応する測度は、Lebesgue 測度に関して絶対連続ではなく、通常の密度分布関数 $\rho_n(x, y)$ を用いて表わすことはできない :

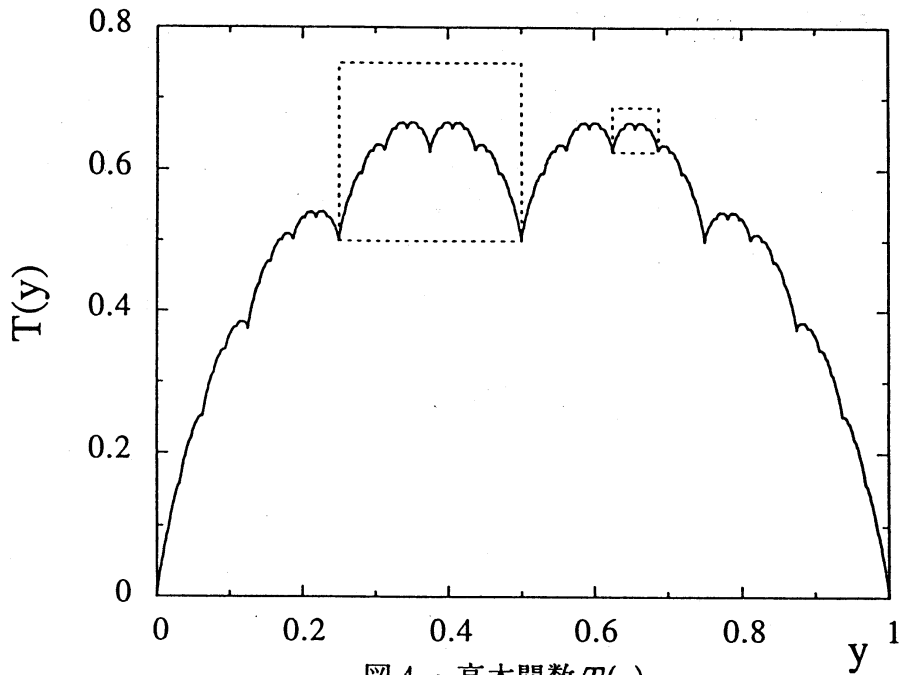


図4：高木関数 $T(y)$

$$G(n, x, y) \neq \int_0^x dx' \int_0^y dy' \rho_n(x', y'). \quad (4.6)$$

Proposition 4.1 の一様定常状態は流れを伴っている。 n 番目と $n+1$ 番目の正方形の境界を考えると (図5参照)、一回の多重パイコね変換 B の作用により半正方形の移動が起こる。図5から、右に移動する n 番目の正方形内の $[1/2, 1] \times [0, 1]$ という領域の測度と左に移動する $n+1$ 番目の正方形内の $[0, 1/2] \times [0, 1]$ という領域の測度の差が境界を左から右へ横切る流れを表わしていることが分かる：

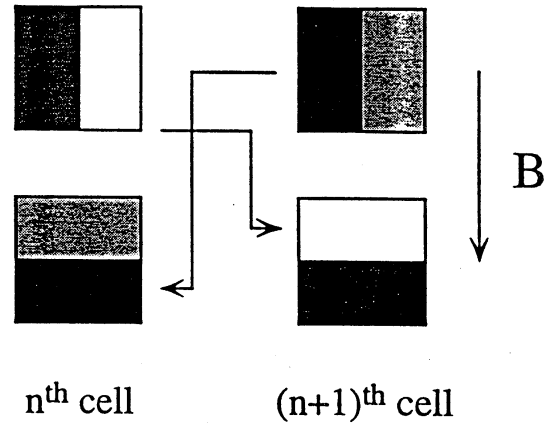


図5： n と $n+1$ 番目の境界を横切る流れ

$$\begin{aligned} J_{n|n+1}(t) &= \mu_t \left(\left\{ \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times [0, 1] \right\}_n \right) - \mu_t \left(\left\{ \left[0, \frac{1}{2} \right] \times [0, 1] \right\}_{n+1} \right) \\ &= G_t(n, 1, 1) - G_t(n, \frac{1}{2}, 1) - G_t(n+1, \frac{1}{2}, 1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Proposition 4.1 の各状態の「流れ」は次の様になる。

Proposition 4.2 : (定常状態の流れ) ^{15,16)}

ア) $\alpha \neq 1/2$, $0 < \alpha < 1$ の場合: 流れは分布の格子点座標 n に依存しない部分から生じる。

$$J_{n|n+1} = (1 - 2\alpha)A'. \quad (4.8)$$

イ) $\alpha = 1/2$ の場合: 流れは分布の格子点座標 n に依存する部分から生じ、拡散の Fick の法則が成り立つ。

$$J_{n|n+1} = -\frac{B}{2} = -\frac{1}{2}\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}. \quad (4.9)$$

ウ) 時間反転状態: 流れは「反」Fick の法則に従う。

$$J_{n|n+1} = \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}. \quad (4.10)$$

前節扱った平衡測度が周期的有限系の極限として捉えられたように、非平衡定常測度は有限開放系の極限として捉えられる。

Proposition 4.3 : (有限開放系の漸近状態と一様定常状態) ¹⁶⁾

ア) 格子点座標 $n = 0$ と $n = N$ の半正方形で

$$\begin{cases} \mu_t(\{[0, x] \times [1/2, y]\}_{n=0}) = \rho_- f_\alpha(x) [f_\alpha(y) - f_\alpha(1/2)], & 1/2 \leq y \leq 1 \\ \mu_t(\{[0, x] \times [0, y]\}_{n=N}) = \rho_+ f_\alpha(x) f_\alpha(y), & 0 \leq y \leq 1/2 \end{cases} \quad (4.11)$$

という固定境界条件を測度に課す。すると、初期累積分布 $G_{t=0}$ が x について可微分な部分密度によって $G_{t=0}(n, x, y) = \int_0^x df_\alpha(x') G(n, x', y)$ と表わされるなら、 $t \rightarrow +\infty$ で累積分布は Proposition 4.1 ア) の分布 (4.2) に漸近する。ただし、定数 A, A' は条件 $\rho_- = A' + \alpha A / (1 - \alpha)$, $\rho_+ = A' + A \{(1 - \alpha) / \alpha\}^{N+1}$ から定まる。

イ) 格子点座標 $n = 0$ と $n = N$ の半正方形で

$$\begin{cases} \mu_t(\{[0, x] \times [1/2, y]\}_{n=0}) = \rho_- x [y - 1/2], & 1/2 \leq y \leq 1 \\ \mu_t(\{[0, x] \times [0, y]\}_{n=N}) = \rho_+ xy, & 0 \leq y \leq 1/2 \end{cases} \quad (4.12)$$

という固定境界条件を測度に課す。すると、初期累積分布 $G_{t=0}(n, x, y)$ が x について 2 階可微分であれば、 $t \rightarrow +\infty$ で累積分布は

$$G(n, x, y) = x \left[\frac{\rho_+ - \rho_-}{N+2} \{(n+1)y + T_n(y)\} + \rho_- y \right]. \quad (4.13)$$

に漸近する。ここで、関数 $T_n(y)$ は高木関数に似た関数で図 5 のようなグラフを持つ。状態 (4.13) は、無限系の場合と同様 Fick の法則をみたす「流れ」を伴っている。 $N \rightarrow \infty$ の極限で (4.13) の状態の中心近く ($n \simeq N/2$) の分布は無限系の分布 (4.3) に漸近する。

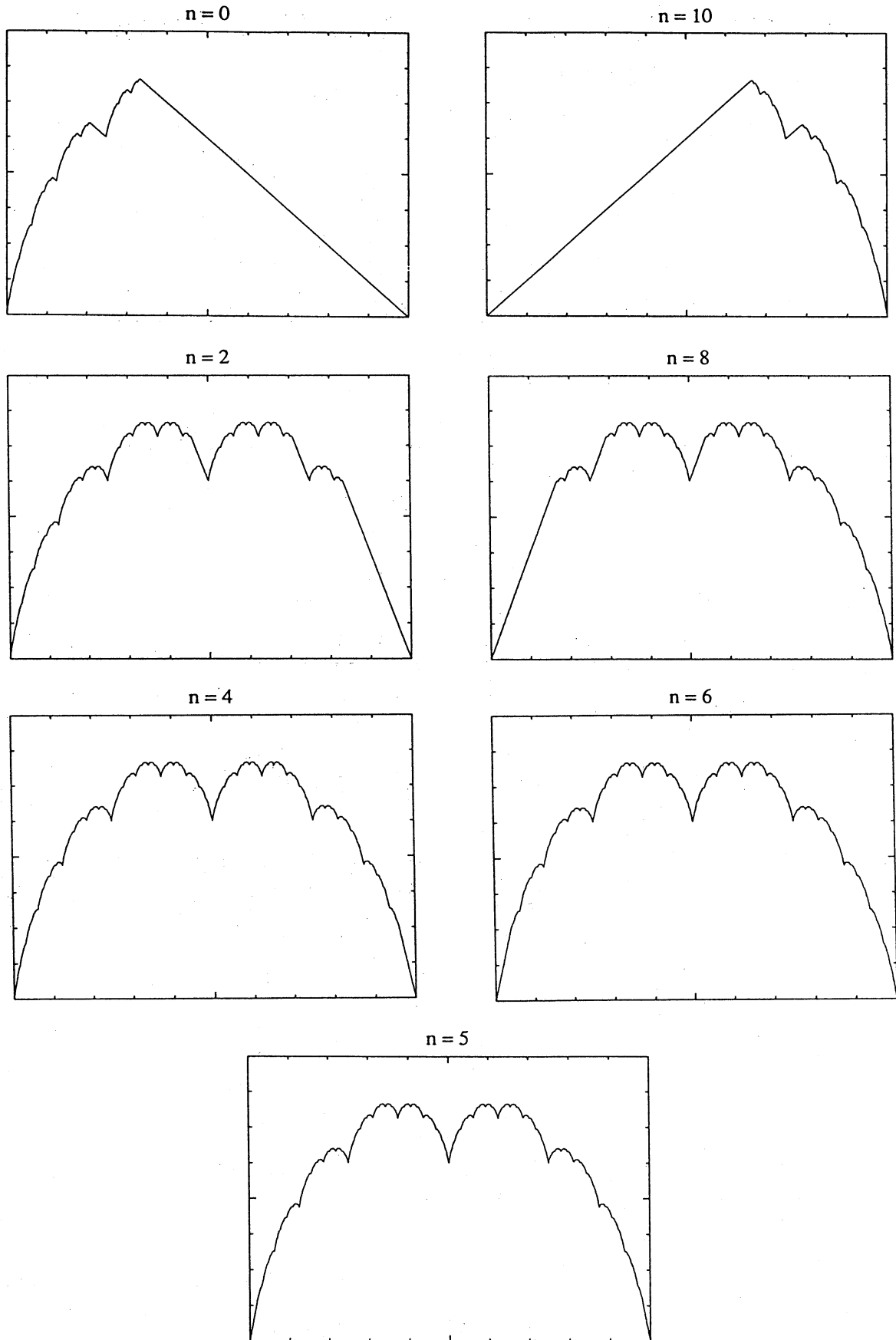


図5：不完全高木関数 $T_n(y)$. 長さ $N+1=11$ の有限長多重パイこね変換の場合。
 $T_5(y)$ は高木関数 $T(y)$ とほぼ同一。

Remark : Proposition 4.3 の境界条件で正の時間発展を考える限り、反転状態 (Proposition 4.1 のウ) の状態) は現れない。

さて、前節で見たように各格子点上の正方形の全測度 $G_t(n, 1, 1)$ を考えることは巨視的記述に対応している。Proposition 4.1 の結果は、巨視的分布 $G_t(n, 1, 1)$ の一つの境界条件について非可算無限個の非平衡定常状態が存在することを意味する。これらの状態は微視的分布だけでなく、巨視的分布も異なっており、さらに、Proposition 4.2 に示すように、巨視的に見られる輸送過程も異なっている。つまり、力学法則と統計的に記述される現象の対応が1対多であることが如実に示された。また、Proposition 4.1 の注に述べたように、これらすべての非平衡定常分布はフラクタル的で Lebesgue 測度について特異的成分を含む。この結論は一般的であると考えられる。実際、考えている系が唯一のエルゴード的測度を持つとすれば、境界条件に依らず、すべての初期状態はこの測度で表わされる状態に漸近するはずである。しかし、実験的に系は境界条件に応じて、様々な定常状態をとることが分かっている。これらの定常状態も同じ境界条件の下で必ず実現するという意味でエルゴード性をもつ。よって、異なる境界条件に対応する定常状態は異なるエルゴード測度に対応し、その結果、互いに特異的になると考えられる。このことから、非平衡定常状態の記述に特異測度が不可欠で、前節で扱った平衡状態の場合と違って測度の滑らかさから単一の状態を選ぶことができないと考えられる。結局、非平衡定常状態を考えることにより、力学法則と統計的に記述される現象の対応の1対多性が浮き彫りにされるのである。このような状況下では、付加的条件を課して力学法則と現象の1対1対応を回復させる試みがなされている。これについては、次節で論じる。

§5. 状態の選択

一つの力学系が無数に多くの不変測度をもつことは、力学系理論ではよく知られており、付加条件を課して単一の測度を選ぶという議論がなされている。ここでは、このような条件のうち二つについて、それらが力学に還元できない点を強調しつつ、有用性について論じる。

a). KS エントロピー最大 : これは「物理的」状態では KS エントロピーが最大になるという条件で、考えている状態において単位時間に生成される「情報量」が最大になるという条件にあたる。しかし、なぜ情報生成速度が最大でなければならないかという理由は力学的に答えられず、ここに力学に還元できない要素がある。多重パイこね変換の場合、(単位正方形あたりの) KS エントロピーは $h_{KS} = -\alpha \ln \alpha - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha)$ となり、Fick 状態、「反」Fick 状態の双方で最大値 $h_{KS} = \ln 2$ をとる。つまり、KS エントロピーは Fick 状態と「反」Fick 状態を区別しない。これは一般論からも結論することもできる。事実、Fick 状態 G と多重パイこね変換 B の組、 (G, B) は、「反」Fick 状態 \bar{G} と逆変換 B^{-1} の組 (\bar{G}, B^{-1}) と、時間反転 I により同型であるから、両者は等しい KS エントロピーを持つ¹⁸⁾。他方 (\bar{G}, B^t) の KS エントロピーは (\bar{G}, B) のそれの $|t|$ 倍であるから¹⁸⁾、結局 (G, B) と (\bar{G}, B) の KS エントロピーは一致するのである。さらに、KS エントロピーは境界条件によらない。つまり、これは系が平衡状態にあるか非平衡状態にあるかを区別できない。この意味で KS エントロピーは非平衡状態を

分類するには十分な量ではない。

b). Lebesgue 測度についての滑らかさ：これは「物理的」測度は引き伸ばされる方向に関し、Lebesgue 測度について絶対連続であるというもので、Sinai-Ruelle-Bowen 測度¹⁹⁾の条件に対応している。これを多重パイこね変換の場合に適用すると、Fick の法則に従う非平衡定常状態のみが選ばれる。この付加条件には次のような「物理的説明」を与えることもできる：多重パイこね変換による引き伸ばしのため分布は伸びる方向に沿って一様化される傾向がある。従って、伸びる方向に関して特異的な分布が終状態として実現するには伸びる方向に自己相似的な初期分布から出発しなければならない。このような分布は、準備をするのに fine tuning が必要であるから実現されない。しかし、この考えの背景には、Lebesgue 測度について滑らかな分布が実現されやすいという考えがあり、この考えは力学に還元できず、恣意的な感じを与える。結局、この条件は経験に合う非平衡定常分布を選ぶことができるが、その根拠は不確かである。

ここでは多重パイこね変換を例にとり、力学法則と統計的に記述される現象の間に 1 対多の対応関係があり、これが非平衡状態では、より顕著に現れることを見てきた。前節の終わりで議論したように、この 1 対多の対応は、系が「境界条件に依存する複数の定常状態をもち、各定常状態へは初期状態によらずに漸近する」という多様性をもつために不可欠な要素である。そして、この節で見たように、多数の統計的状态から単一の状態を選択するには、力学に還元できない付加条件を課さなくてはならない。つまり、実際の観測結果と合う統計的現象を選ぶには力学の情報だけでは不十分なのである。このことから、力学と統計的記述の間には溝があり、ひいては両者が異なる階層に属していると考えられることもできる。この力学・統計力学間の溝、つまり、一つの力学法則に多数の（統計的に記述される）現象に対応していることは、系の状態の多様性および自然法則の階層性の原因の一つであるとも言えるかもしれない。

謝辞

本稿は Brussels 自由大学の Dr. P. Gaspard との共同研究によって得られた結果を基にしており、この共同研究に関し Dr. P. Gaspard に感謝したい。また、本研究への支援および有益なコメントを頂いた基礎化学研究所の福井謙一所長、龍谷大学の山口昌哉教授、Solvay 研究所 (Brussels) の Prof. I. Prigogine、Dr. I. Antoniou、Dr. Z. Suchanecki に感謝します。さらにこの研究は、文部省の科学研究補助金、国際学術研究から助成を受けています。

参考文献

- [1] e.g., ランダウ、リフシッツ「統計物理学 (第 3 版)」(上、下) 小林秋男他訳 (岩波書店、1980)、
戸田盛和、久保亮五、斎藤信彦、橋爪夏樹「統計物理学 (第 2 版)」岩波講座 現代物理学の基礎 5 (岩波書店、1978) .

- [2] S. Grossman and H. Fujisaka, *Phys. Rev.*A**26** (1982) 1779.
- [3] S. Thomae, "Chaos-induced diffusion", in *Statics and Dynamics of Nonlinear Systems*, G. Benedek et al., Eds. (Springer, Berlin, 1983) 204.
- [4] H.H. Hasegawa and D.J. Driebe, *Phys. Lett.* **A168** (1992) 18.
- [5] P. Gaspard, *Phys. Lett.* **A168** (1992) 13.
- [6] S. Tasaki, I. Antoniou and Z. Suchanecki, *Phys. Lett.***A179** (1993) 97.
- [7] P. Gaspard, *J. Stat. Phys.* **68** (1992) 673.
- [8] P. Gaspard, *Chaos* **3** (1993) 427.
- [9] H.H. Hasegawa and D.J. Driebe, *Phys. Rev.* **E 50** (1994) 1781.
- [10] S. Tasaki, A. Hakmi and I. Antoniou, to appear.
- [11] G. de Rham, *Rend. Sem. Mat. Torino***16** (1957) 101.
- [12] M. Hata and M. Yamaguti, *Japan J. Appl. Math.* **1** (1984) 183.
- [13] M. Hata, in *Patterns and Waves* eds. T. Nishida, M. Mimura and H. Fujii, Studies in mathematics and its Application, Kinokuniya & Northholland, 1986, p.259.
- [14] S. Goldstein and J. L. Lebowitz, *Commn. Math. Phys.***37** (1974) 1.
- [15] S. Tasaki and P. Gaspard, in *Towards the Harnessing of Chaos*, Ed. M. Yamaguti, Elsevier, Amsterdam, 1994, p.273.
- [16] S. Tasaki and P. Gaspard, *J. Stat. Phys.* issue 5/6 (1995) in press.
- [17] T. Takagi, *Proc. of Physico-Mathematical Society of Japan, ser.II*, **1** (1903) 176.
- [18] Ya. G. Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1972.
- [19] J.-P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 617.