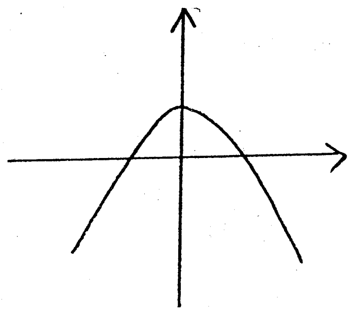
数理解析研究所講究録
938巻 1996年 1-12

一次元力学系における単調性について

東工大　　辻井 正人 (TSUJII Masato)

この論文では一次元力学系における Kneading 不変量の単調増加性について、筆者が得たいくつかの結果について述べる。一次元力学系とは写像 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の反復合成 f^n, $n = 1, 2, \cdots$ を力学系とみなしたものである。ここでは次のような条件をみたす単峰写像と呼ばれるものを考えよう。

(*) $x < 0$ において狭義単調増加、$x > 0$ において狭義単調減少。



このとき $t \in \mathbb{R}$ をパラメーターとする単峰写像の族

(**) $f_t(x) = f(x) + t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

が考えられる。このような力学系及びその族はこれまでよく研究されてきた。特に次の2次写像族と呼ばれる力学系の族は複素力学系の断面とも考えられるために実及び複素一次元力学系の接点として様々な角度から研究されている:

$$Q_t(x) = t - x^2。$$

Milnor と Thurston は1976年の論文において、2次写像族における分岐について3つの予想を提出した。そのうちの1つに単調性予想と呼ばれるものがある。この予想の内容については後程述べるが、2次写像族の分岐に関する精密な情報を与えるものである。1985年になって、Sullivan, Douady, Hubbard 等は複素力学系の理論を使って単調性予想に肯定的な解決を与えた。現在では単調予想にはいくつかの証明が知られているが、それらはいずれも、Q_t をリーマン球面$\hat{\mathbb{C}}$からそれ自身への写像(つまり複素力学系)とみなし、Teichmuller空間の理論を使っている。

そのような状況のもとで筆者は次の問題を動機として研究をしてきた：

"単調性予想(定理)はより一般の(＊＊)の形の族について、成立するだろうか？"

このような問題を考えるのにはいくつかの理由がある。詳しい点は後で述べるが、1つの理由は現在ではよく認識されている実一次元力学系と複素一次元力学系の"緩やかな関係"にある。個別の系の性質の研究において実及び複素一次元力学系の理論はよく似ている。複素力学系において函数論の道具が使われるのに対して、実力学系では一次元射影幾何が使われる。ところが、族における分岐の問題になると複素力学系に

おいてはTeichmuller空間の理論が自然に現れて（困難を伴いながらも）議論が進んでいるのに対し、実力学系にはそのような議論は現在はないのである。そこで上の問題を考えることで、実力学系の族についての議論を始めたいというのが筆者の考えである。

§1 Kneading 理論の復習と単調性予想（定理）

ここでKneading理論について簡単に復習する。$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単峰写像であるとする。このとき f のKneading不変量 $K(f)$ は記号"R", "C", "L" の無限列であって、次のように定義される：

$$K(f) = X_0 X_1 X_2 \cdots\cdots$$

$$X_i = \begin{cases} L & f^{i+1}(0) < 0 \\ C & \quad " \quad = 0 \\ R & \quad " \quad > 0 . \end{cases}$$

このとき $K(f)$ は位相共役についての不変量になる。$K(f)$ は f の組み合せ的性質を決定する強い不変量であり、考える写像をもう少し制限すると、ほぼ完全な不変量になる。（例えば Q_t, $t \in \mathbb{R}$ を含む $C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の開集合 U が存在して

$$U/\sim_{\text{位相共役}} \xrightarrow{K} \{L, C, R\}^{\infty}$$

は高々2対1であって2対1になるのは K の像が周期的であるときであることがわかる。）

従って、$f_t(x)=t+f(x)$ においての分岐を調べるには写像 $t\mapsto K(f_t)$ を調べればよい。

次に記号列の空間 $\{L,C,R\}^{\infty}$ 上に次のように順序 $<$ を考える。$\underline{X}=X_0X_1X_2\cdots$, $\underline{Y}=Y_0Y_1Y_2\cdots$ について

$\underline{X}<\underline{Y}$ $\Leftrightarrow$ $X_i\neq Y_i$ なる最小の i を i_0 とするとき

(i) $X_0X_1\cdots X_{i_0-1}=Y_0Y_1\cdots Y_{i_0-1}$ の中に"R"が偶数個あって $X_{i_0}<Y_{i_0}$、

(ii) $X_0X_1\cdots X_{i_0-1}=Y_0Y_1\cdots Y_{i_0-1}$ の中に"R"が奇数個あって $X_{i_0}>Y_{i_0}$。

ただし1つの記号については $L<C<R$ とする。

以上の記号のもとで Milnor と Thurston によって予想され、Sullivan 等によって証明された命題は次である。

定理 $t\mapsto K(Q_t)$ は広義単調増加である。

この定理は Kneading 不変量の完全性とあわせて、Q_t の組み合せ論的性質が t についてどのように変化するかの順序を与える。我々が考えたい問題(の1つ)は

問題: f についてのいかなる条件のもとで $t\mapsto K(f_t)$ ($f_t(x)=f(x)+t$) は広義単調になるか？

である。条件としては

(i) C^2 級で $f''(x)<0$

(ii) C^3 級で $Sf(x)\overset{\mathrm{def}}{=}(f'''(x)/f'(x))-\frac{3}{2}(f''(x)/f'(x))^2<0$

(iii) 対称 すなわち $f(-x)=f(x)$。

等を考える。ここで Sf はSchwarz微分と呼ばれる量で、一次元射影幾何に対応して一次元力学系ではよく用いられる量である。

Kneading不変量 $K(f_t)$ は0の f^i による像の位置によって決まるので単調性の問題は

"あるiについて $f_t^{i+1}(0)=0$ であるとき $\frac{\partial}{\partial t}(f_t^{i+1}(0))$ が正か負か?"

という問題に帰着される。一般に一次元単峰写像族の分岐の問題は $\frac{\partial}{\partial t}(f_t^i(0))$ の評価が重要になるので、単調性の問題はその中でも基本的なものであるといえる。

$$\delta_i(t_0)=\frac{\partial}{\partial t}(f_t^{i+1}(0))\Big/\left(\frac{\partial}{\partial x}f^i\right)(f(0))$$

とおくと次が成り立つ。

命題 $\underline{X}=X_0X_1\cdots X_{r-1}C\cdots$ $(X_0,X_1,\cdots,X_{r-1}\neq C)$ について

(＊＊＊) $K(f_{t_0})=\underline{X}$ ならば $\delta_r(t_0)>0$

が成立するなら $K(f_{t_0})=\underline{X}$ なるパラメーター t_0 は高々1つであって(存在するかしないかは $\underline{X}$ から判定できる。)、存在するときは $\overline{D}(\underline{X})=\{t\in\mathbb{R} \mid \underset{\in\{L,C,R\}}{K(f_t)}\leqq \underline{X}\}$ は連結な区間になる。もし全ての $\underline{X}$ について(＊＊＊)が成立するならば $t\mapsto K(f_t)$ は単調増加である。

命題の証明は$X_0X_1\cdots X_{r-1}$にRが偶数個(resp. 奇数個)のとき、$\delta_r(t_0)$の分母が正(resp 負)になることと、"順序"の定義に注意すれば易しい。

実はSullivan等が与えた証明は上のように$\frac{\partial}{\partial t}(f_t^j(0))$を評価するという方法をとっていない。実際、彼等の方法はKneading不変量に関する中間値の定理を使って、問題を2次写像の族におけるある種の剛性(rigidity)の問題に帰着している。そこで筆者が最初に考えたことは、彼等の証明を上の命題の(＊＊＊)を評価する形に書き直すことであった。これは比較的簡単であって、論文[ ]においても指摘したことであるが以下ではその証明について簡単に述べる。(§3)そして§4において、より一般のf_tについて、現在どれぐらいのことがわかるかを述べる。これらの結果は現在も研究中であって、中途半端なものである。その点についてはご容しゃいただきたい。ただ、筆者が少し強調しておきたいことは、§4で与える結果の証明は§3で与える証明にかなり対応しているということである。従って、筆者はここで述べる方法を使って、"問題"によい解答を与えることができるだろうと考えている。(もちろん、できるかどうかはわからないのだが…。)

§2　2次写像族の単調性の証明（$\delta_i(t_0)$の評価を通して）

ここでは2次写像族についての単調性（§1の定理）を証明する。ここで述べる証明は明らかにSullivan等のTeichmuller理論を使った証明の変形であるが、最終的に論拠とする事実はかなり異なっている。

まず　$\underline{X} = X_0 X_1 \cdots X_{r-1} C \cdots$　（$X_0, X_1, \cdots, X_{r-1} \neq C$）について

$$K(Q_{t_0}) = \underline{X}$$

であるとしよう。このとき $\delta_r(t_0) > 0$ を証明すれば命題より定理が従う。そこで

$$w_i = Q_{t_0}^{i}(0) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, r-1$$

とおき、$\mathbb{C}$上の2次微分の部分空間として

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} a_i \frac{1}{z - w_i} dz^2 \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\} \qquad dz = dx + i\,dy$$

を考える。このとき $\mathcal{R} = \mathbb{R}^r$ である。このとき$\mathcal{R}$上の

$$Q_{t_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

の作用として，push forward すなわち

$$f_* : \mathcal{R} \to \{2次微分\}$$

として、微分形式として（局所的な微分同相についてのpull backの逆で）送って、足し合せるという写像を考える。このとき計算によって $f_*(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ であることと、次を確めることができる。

$$(****) \quad \delta_r(t_0) = \det\left(Id_{\mathcal{R}} - f_*\right)$$

よって "$f_*: \mathcal{R}\to\mathcal{R}$ の固有値半径<1" を示せば十分である。ところが P: {$\mathbb{C}$上の面積要素}$\circlearrowleft$ をPerron-Frobenius作用素、$\pi: \mathcal{R}\to$ {$\mathbb{C}$上の面積要素} を

$$\pi(f(z)dz^2) = |f(z)|\,dx\wedge dy$$

とすると

$$\pi\circ f_*(\omega)(z) < P\circ\pi(\omega)(z)$$

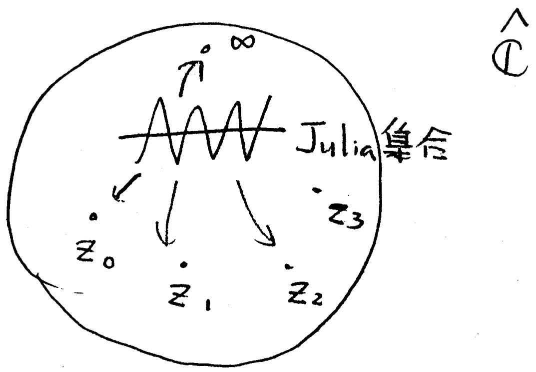
さらに

$$\pi\circ f_*^n(\omega)(z) < P^n\circ\pi(\omega)(z)$$

を各点でみたす。(絶対値をとってから足す方が足してから絶対値をとるより大きい。) 上の状況でJulia setは集積点を少なくとも1つもつ、双曲集合で、Perron-Frobenius作用素の意味(=面積要素の変換)から、Julia集合の点zについて

$$P^n\circ\pi(\omega)\to 0 \qquad (n\to\infty)$$ (下図参照)

であるから、f_*の固有値半径は1より小さい。



§3 単調性についてのいくつかの結果

ここでは複素解析的な拡張を仮定しないで得られる部分的な結果について述べる。まず f は単峰写像とし

$$f_t(x) = f(x) + t$$

とおくことにする。このとき、$\delta_i(t_\cdot)$ は

$$\delta_i(t_\cdot) = \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x} f^j(f(0))} = \sum_{j=0}^{i} \prod_{k=1}^{j} \frac{1}{d_k} \quad (d_k = f'(f^k(0)))$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_k \prod_{k=1}^{j} \left|\frac{1}{d_k}\right|$$

ただし

$$\varepsilon_k = \begin{cases} +1 & X_0 X_1 \cdots X_{k-1} \text{ の中に } R \text{ が偶数個、} \\ -1 & \qquad \text{〃} \qquad \text{奇数個。} \end{cases}$$

と書けることに注意する。以下 $f_t^{j+1}(0) = 0$ とする。

§2 における証明で関係式 (****) が重要であるが実はそれに似た関係が次のように現れる。まず

$$L_k = |f_t^{k+1}(0)| \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, i-1$$

とおき

$$D_k = \frac{|f_t([0, f_t^{k+1}(0)])|}{|[0, f_t^{k+1}(0)]|}$$

とする。このとき

$$D_k L_k = |f_t([0, f_t^{k+1}(0)])| = L_1 \pm L_{k+1}$$

ただし、右辺の復号は $f_t^{k+1}(0) < 0$ のとき＋，そうでないとき－である。この関係式は

$$L_k=\frac{1}{D_k}L_1 \pm \frac{1}{D_k}L_{k+1}$$

さらに

$$\mathbb{L}=\mathbb{D}\,\mathbb{L} \qquad \mathbb{L}=\begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{i-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{D}=\begin{pmatrix} \frac{1}{D_1} & -\frac{1}{D_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{D_2} & 0, & -\frac{1}{D_2} & & 0 \\ \vdots & \vdots, & 0 & & -\frac{1}{D_{i-2}} \\ \frac{1}{D_{i-1}} & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって特に

$$\det(I_i-\mathbb{D})=0$$

であるが、左辺は計算すると

$$\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_k\prod_{k=1}^{j}\left|\frac{1}{D_k}\right|$$

になる。よって、D_kをd_kに入れかえれば$\delta_i(t)$になるというわけである。ここでD_kとd_kは比較しやすい量であるので、上の式から$\delta_i(t_0)$の評価を得るというのが我々の方針である。実際は上の式は少々粗すぎて使えないので、Markov Towerと呼ばれるものを考え([dM-vS]を参照)それに附随する上と似たような長さの関係式を用いるが、基本的には長さの関係式を使う。上の長さの関係式は双対を考えると一次微分形式の(f_tを各部分で線型化した)写像による変換をあらわしていて§2での証明とは次のように対応している。

2次微分形式 on $\mathbb{C}$ $\longleftrightarrow$ 1次微分形式 on $\mathbb{R}$

$\mathcal{R}$ $\longleftrightarrow$ ある区間で一定の微分形式。

ただし現在のところ§3での証明のようにうまくf_tの力学系としての性質と$\delta_i(t)$との関係をみつけられないでいる。ただ組み合せに条件をつけると部分的な結果がいくつか得られた。

まず $\underline{X} = X_0 X_1 \cdots X_n \cdots$ が simple であるとは上で定義された$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ の中に$+1$が続けて現れないことである。これは論文[M]の中の用語からとった。

命題1　fがC^3級の単峰写像で$f''<0$, $Sf<0$とする。このとき$\underline{X} = X_0 X_1 \cdots X_{r-1} C \cdots$がSimpleならば

$$K(f_{t_0}) = \underline{X} \Rightarrow \delta_i(t)_0 > 0$$

つまり、$\underline{X}$がsimpleならば一度$K(f_{t_0}) > \underline{X}$となれば$K(f_t) > \underline{X}$ ($t > t_0$)となるのである。

また$[K(f_t)]_r$は$K(f_t)$の最初のr個の記号列とする。このとき次が成立する

命題2　fがC^3級の単峰写像で$f''<0$, $Sf<0$かつ対称であるならば$r=9$について

$$t \longmapsto [K(f_t)]_r$$

は単調増加である。

よって、上の条件のもとではもし$K(f_t)$が単調でないとしても、それは"ほんの少しだけもどる"ということになる。これは極めて考えにくいことであって、上の条件のもとで$K(f_t)$が単調になることは、もっともらしいといえるのではないだ

ろうか？（もちろん逆の見方も可能だが。）

上の命題の証明は今のところ、わかり易い形にはまとめられていないので、それを書くことは控えるが、準備中の論文[T2]を参照してほしい。

参考文献

[MT] Milnor and Thurston On iterated maps on the interval Lect note in Math 1342 (465-563)

[dM-vS] One dimensional dynamics Springer 1993

[M] S. Matsumoto Bifurcation of Periodic points of maps of intervals, Bull. Sci. Math (2) 107 no 1 (49-75) 1983

[T] Tsujii: A note on Milnor-Thurston's Monotonicity Theorem, in Advanced ~~course~~ series in dynamical Sys. (1994) World Scientific.

[T2] 準備中