数理解析研究所講究録
940巻 1996年 101-109

AN INVERSE BIFURCATION PROBLEM FOR A NONLINEAR STURM-LIOUVILLE PROBLEM

東京水産大学 上村 豊 (YUTAKA KAMIMURA)

表題にある逆分岐問題とは非線形境界値問題の分岐曲線を与えておいてそれを実現するような非線形項を求めよという問題で、そのネーミングは全くの造語ですし問題の解決にもまだほど遠い状態ですけれど、なかなか楽しめるところがありますのでそこいらへんをお話ししたいと思います。なお、きょうの話しでは、部分的に（しかしエッセンシャルなところで）東大の岩崎克則さんとの共同研究の話を用いることをはじめにおことわりさせていただきます。

はじめに、記号等をご理解いただくために線形の Sturm-Liouville 問題から話をさせていただきます。簡単のために境界条件は Dirichlet 条件にして、

$$(0)\qquad \begin{cases} u'' + [\lambda - q(x)]u = 0, & a < x < b, \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

を考えます。ここで、ポテンシャル q は区間 $[a, b]$ 上の連続な実関数とします。もちろん $u(x) \equiv 0$ はこの問題の解ですが、そうでない解は固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ とならべ、それぞれに対応する固有関数を $v_n(x)$ とおけば任意定数 h によって $u(x) = hv_n(x)$ と書けます。ただし、$v_n(x)$ はそのはじめの停留値が 1 であるように正規化しておきます。さて、この状況を図示しておきますと図1のようになります。

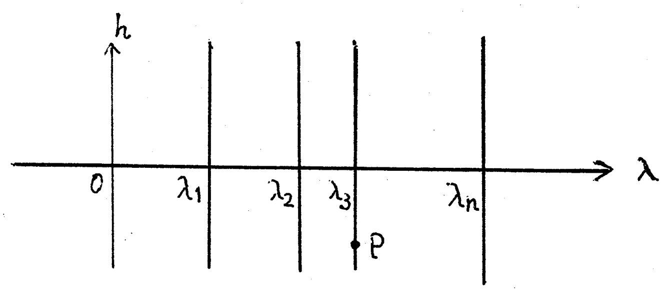
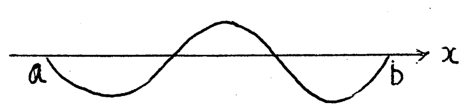


図1

問題 (0) を満たす (λ, u) の組みはこの直線の各点にのっていると考えることができます。たとえば、下図のような解は図1の点P上にあると思うわけです。



さて、(0) 式の右辺の０を u の関数 $g(u)$ に変えて非線形 Sturm-Liouville 問題

$$(1)\qquad \begin{cases} u'' + [\lambda - q(x)]u = g(u), & a < x < b, \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

を考えるとこの状況はどう変わるでしょうか？ただし gは $C^1(\boldsymbol{R})$ 級の実関数で条件 $g(0) = g'(0) = 0$ をみたすものとします。この条件は $g(u) = o(u)$ as $u \to 0$ を意味します。

荒っぽく言えば、この gの効果はλ_nを固定したままこの直線を曲げると言え、従ってできた図式は図２のようになります。曲線上の点が非自明解を表しλ軸上の点が自明解を表しますが、各曲線は点 $(\lambda_n 0)$ で分岐を起こします。これが分岐の原理で、もっと一般の系に対して Crandall, Rabinowitz らによって１９７０年ごろ研究されたものです。(例えば、[1,7,8] を参照のこと。) 本講演では、これらの曲線を$\Gamma_n(g)$ と表し、第n 分岐とか n 本めということにします。

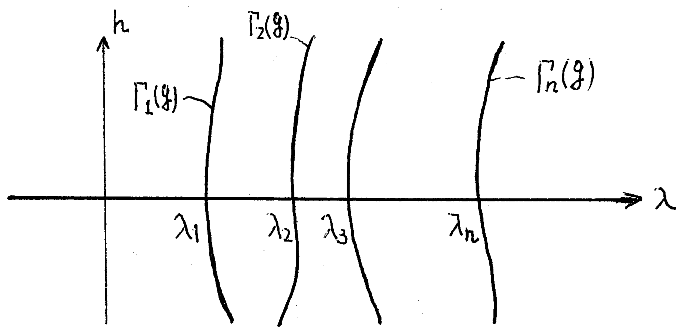


図2

さて、今日の講演のテーマはこの分岐曲線から（１）の非線形項を決めてみようというものです。正確にいうと$\Gamma_n(g)$ を

$$\begin{aligned}\Gamma_n(g) := \{(\lambda, h) \in \boldsymbol{R}^2 \mid & \text{there exists a solution } (\lambda, u) \\ & \text{of (1) satisfying} \\ & \text{(i) } u(x) \text{ has exactly } n-1 \text{ zeros in } (a,b); \\ & \text{(ii) the first stationary value of } u \text{ is equal to } h\} \cup \{(\lambda_n, 0)\}\end{aligned}$$

と定義し、次のように定式化しておきます。

問題. n を固定しλ_nを通る曲線$\lambda(h)$ を与えたとき$\Gamma_n(g) = \{(\lambda(h), h) \mid h \in \boldsymbol{R}\}$ となる gを求めよ。

問題自身は、一般の形で述べておきましたが、本講演では残念ながら、分岐曲線は直線に近いものに限らせていただきます。そうでないものについてはほとんど結果を得ておりませんので。

結果を述べるために、空間を２つ用意しておきます。

$0 < \alpha < 1/2$ とし、X, Y を

$$X := \Big\{g(h) \in C^1(\boldsymbol{R}) \,|\, g(0) = g'(0) = 0,$$
$$\|g\|_X := \sup_{h,k\in\boldsymbol{R}, h\neq k} \frac{|(1+|k|^\alpha)g'(k) - (1+|h|^\alpha)g'(h)|}{|k-h|^\alpha} < \infty\Big\},$$

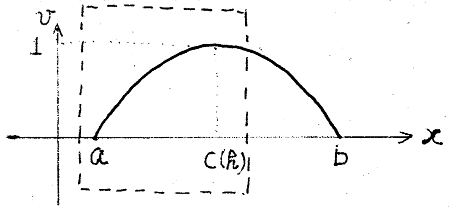
$$Y := \{\mu(h) \in C(\boldsymbol{R}) \,|\, h\mu'(h) \in C(\boldsymbol{R}), \mu(0) = 0,$$
$$\|\mu\|_Y := \sup_{h\in\boldsymbol{R}} |\mu(h)|$$
$$+ \sup_{h,k\in\boldsymbol{R}, h\neq k} \frac{||k|^{3/2}(1+|k|^\alpha)\mu'(k) - |h|^{3/2}(1+|h|^\alpha)\mu'(h)|}{|k-h|^{\alpha+1/2}} < \infty\Big\}$$

と定義します。なにやらごちゃごちゃしてますが、X, Y はそれぞれ、Hölder 空間 $C^{1,\alpha}$, $C^{1,\alpha+1/2}$ を $h = 0$ と遠方の h に関していじったもので、それぞれの norm $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ に関し Banach 空間になります。さて、はじめに 1 本めに関する結果を述べます。

定理 1（岩崎克則氏との共同研究）. $q(x) \in C^2[a,b]$ で
(A1) $v_1(x)$ の停留点はただ一個 c だけであり、$v_1''(c) < 0$
(A2) $v_1''(x)v_1(x) \leqq 2v_1'(x)^2 \quad \text{for} \quad a \leqq x \leqq b$
と仮定する。このとき、$\lambda(h)$ を $\|\lambda(h) - \lambda_1\|_Y$ が十分小さいように与えると $\Gamma_1(g) = \{(\lambda(h), h) \,|\, h \in \boldsymbol{R}\}$ となるような $g \in X$ が存在する。

上の条件 (A1),(A2) は技術的な条件ですが、それほど特殊なものではありません。たとえば、$\lambda_1 > \max_{x\in[a,b]} q(x)$ なら (A1),(A2) は満たされることを注意しておきます。ところで、定理 1 の証明のポイントはある種のアーベル型の積分方程式を解くことにあります。そのことの説明のためにここで定理 1 の証明の概略を述べておきます。詳しくは[2] を参照して下さい。$v(x) := u(x)/h$ とおくと、

$$(\lambda(h), h) \in \Gamma_1(g)$$
$$\iff \quad v'' + [\lambda(h) - q(x)]v = h^{-1}g(hv) \text{ の解で}$$



のようになるものが存在する

となりますがこのうち、図の点線で囲った部分は、$g(h)$ と $\lambda(h) - 1$（以下、これを $\mu(h)$ とおく）が小さければ、各 $(g, \mu) \in X \times Y$ に対し $c(h)$ を調節して実現されることが初等的な考察でわかります。そこで、

$$v'' + [\lambda(h) - q(x)]v = h^{-1}g(hv)$$

の初期条件 $v(c(h))=1, v'(c(h))=0$ による解を $v(h,x,g;\mu)$ と書くと、

$$(\lambda(h),h)\in\Gamma_1(g) \iff F(g,\mu):=v(h,b;g,\mu)=0$$

となります。

$F(g,\mu)$ を上のように定義すると、Fは $X\times Y$ の 0 の近傍 U から Y への C^1-mapping を与えます。明らかに $F(0,0)=0$ ですので、$F_g(0,0):X\to Y$ が isomorphism（すなわち、1対1、onto で行きも帰りも連続）であれば陰関数定理より定理の結論がでてきます。ところが、$F(g,\mu)$ の $(0,0)$ での Fréchet derivative $F_g(0,0)$ を計算してみると、

$$(F_g(0,0)g)(h)=h^{-1}\int_a^b v_1(x)g(hv_1(x))dx$$

となることがわかります。(変数は h です。) $v_1(x)$ は $v_1(c)=1$ で正規化された線形問題の第一固有関数であることを想起してください。このようにして、定理1の証明は $\varphi(h)\in Y$ を既知とし $g(h)$ を未知関数とする積分方程式

$$\int_a^b v_1(x)g(hv_1(x))dx=h\varphi(h) \tag{2}$$

を空間 X で解くことに帰着されます。(2) がどういう積分方程式であるかを見るために $a=-\pi/2, b=\pi/2, q(x)\equiv 0$ のときを例にとってみましょう。このとき、$v_1(x)=\cos x$ ですので、(2) は（定数を省けば）

$$\int_0^h \frac{sg(s)}{\sqrt{h^2-s^2}}ds=h^2\varphi(h)$$

となりますが、これはアーベルの積分方程式の変数を変えたものに他なりませんで

$$\int_0^h \frac{y}{\sqrt{h^2-y^2}}dy\int_0^y \frac{sg(s)}{\sqrt{y^2-s^2}}ds=\int_0^h \frac{y^3\varphi(y)}{\sqrt{h^2-y^2}}dy$$

とし積分の順序交換をして、

$$\int_s^h \frac{y}{\sqrt{h^2-y^2}\sqrt{y^2-s^2}}\equiv\frac{\pi}{2} \tag{3}$$

を用いて一回微分することによって

$$g(h)=\frac{2}{\pi}h\int_0^1 \frac{t^3}{(1-t^2)^{1/2}}\left\{t^{-2}(t^3\varphi(t))'\right\}(ht)dt \tag{4}$$

と解くことができます。この解き方では、$\frac{1}{2}$回積分して一回微分していますので (4) による対応 $\varphi\to g$ は $\frac{1}{2}$回微分と考えることができます。さて、一般の場合には、

$$g(h)=h\int_0^1 T(t)\left\{t^{-2}(t^3\varphi(t))'\right\}(ht)dt,\qquad \left(T(t)\sim\frac{2}{\pi}\frac{t^3}{(1-t^2)^{1/2}}\right) \tag{5}$$

とならぬか？と考えてみましょう。このとき、(5) を (2) に代入して計算してみると (3) 式に対応する条件は$\sigma := s/h$ として

$$\int_0^1 W(\sigma/t)T(t)\frac{dt}{t} = \sigma^2, \quad 0 \leqq \sigma \leqq 1 \tag{6}$$

であることがわかります。ただし、

$$W(y) := \begin{cases} y^2 \left\{ \frac{1}{v'_+(v_+^{-1}(y))} - \frac{1}{v'_-(v_-^{-1}(y))} \right\} & y < 1 \\ 0 & y \geqq 1 \end{cases}$$

とおきました。ここで、$v_\pm$ は$v_1(x)$ のそれぞれ、$[a,c],[c,b]$ の部分への制限を表し、$v_\pm^{-1}$ はそれらの逆関数です。$T(t)$ を $t > 1$ では０として拡張し、またσ^2も$\sigma > 1$ では０として理解すれば (6) 式は Mellin 変換に関する convolution の方程式

$$W * T(\sigma) = \sigma^2 \tag{7}$$

となります。すなわち

$$(\mathcal{M}f(t))(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^{-i\xi-1} f(t)dt (= \mathcal{F}(f(e^x)))$$

で Mellin 変換を定義し

$$(f * g)(\sigma) := \int_0^\infty f(\sigma/t)g(t)\frac{dt}{t}$$

で convolution を定めると、$\mathcal{M}[f*g] = \sqrt{2\pi}\mathcal{M}[f]\mathcal{M}[g]$ ですので、(7) 式を Mellin 変換して$\sqrt{2\pi}\mathcal{M}[W]\mathcal{M}[T] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2-i\xi}$ が得られます。容易にわかるように、

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{M}[W](\xi) = \int_a^b v_1(x)^{1-i\xi}dx$$

であり、これを $\Phi(\xi)$ とかくことにすれば、$\Phi(\xi)$ が$\xi \in \boldsymbol{R}$ で零点をもたなければ、

$$T(t) = \mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}(2-i\xi)\Phi(\xi)}\right)$$

と解かれますが、更に $\Phi(\xi)$ が $\mathrm{Im}\xi > 0$ でも零点をもたなければ、Paley-Wiener の定理から、$T(t)$ は $t > 1$ で消えており (6) 式がこの $T(t)$ で実現されます。この $\Phi(\xi) \neq 0$ for $\mathrm{Im}\xi \geqq 0$ のための（１つの）十分条件として (A1),(A2) をおいたのが定理 1 です。$T(t)$ の $t = 1$ における特異性は $\Phi(\xi)$ の $|\xi| \to \infty$ での order で決まりますが、$q(x) \in C^2[a,b]$ のとき、$\Phi(\xi) \sim (-v_1''(c))^{1/2}|\xi|^{-1/2}$ as $|\xi| \to \infty$ と計算され、仮定$v_1''(c) \neq 0$ から $T(t)$ が $t = 1$ で (5) 式括弧内の挙動をもつことが従います。

こうして得られる (5) 式の対応$\varphi \to g$は$v_1(x)$に付随した$\frac{1}{2}$回微分と考えるのが妥当でしょう。感覚的には、斜めに$\frac{1}{2}$回微分するといった感じです。そしてこのgとφの対応が1対1になるような空間の取り方（の1つ）が定理のX, Yだというわけです。以上が定理1の証明のあらましです。

ところで、上で存在の示された非線形項の一意性は成り立つでしょうか？定理1は陰関数定理で証明したのでlocalには非線形項はただ一つです。すなわち、$\lambda(h)$がλ_1に近いだけでなく$g \in X$も十分小さいとすればそれは定理1で求めたものに限ります。しかし、globalにはどうか？これについては、正しいと予想していますが、証明できておりません。ただし、次のことは示せます。

定理 2．$q(x)$に定理1と同じ仮定をおく。このとき、$\Gamma_1(g) = \{(\lambda_1, h) \,|\, h \in \boldsymbol{R}\}$となるような$g \in X$は$g \equiv 0$に限る。

上の定理は、第一分岐が直線なら境界値問題（1）の非線形項gは0である、すなわち線形の問題であることを意味します。証明には、上で作っておいた斜めに$\frac{1}{2}$回微分するということを用いますが時間の都合で省略します。

定理2は当然の結果にみえますが、実は第2分岐については必ずしも成り立ちません。すなわち：

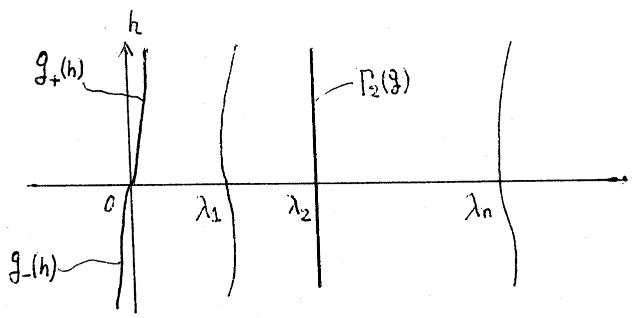
定理 3．$q(x) \in C^2[a,b]$が対称（すなわち、$q(a+x) = q(b-x)$）で

(A1)　$v_2(x)$の停留点はc_1, c_2だけ（$c_1 < c_2$）であり、$v_2''(c_1) < 0, v_2''(c_2) > 0$

(A2)　$v_2''(x)v_2(x) \leqq 2v_2'(x)^2 \quad for \quad a \leqq x \leqq b$

と仮定する。このとき、$\Gamma_2(g) = \{(\lambda_2, h) \,|\, h \in \boldsymbol{R}\}$となるような$g \in X$が無限個存在する。

この定理は、potentialが対称な場合には2本めの分岐が直線でも非線形項が0とは言えないことを意味しております。定理の中の無限個はどういう意味で無限個かというと、前の空間Xの$[0, \infty)$上のものをX_+、$(-\infty, 0]$上のものをX_-とすると、任意の十分小さな$g_- \in X_-$に対し$g_+ \in X_+$を2本めの分岐として直線が実現されるように取ることができるということで、そういう意味で無限個とれるというわけです。正の部分と負の部分でつりあいを取ることにより直線を実現するという仕組みです。



実は今までの話しは free potential の場合に前に得た結果 ([3,4,5] を参照して下さい) の直接の拡張なのですが、その際、potential $q(x) \equiv 0$ の対称性をひどく用いますので potential を一般の q にしてみて、対称性をはずすと何が起きるのかを調べてみようというのがこの研究の motivation でした。そして、その結果、potential の対称性をひどくはずすと２本めの分岐に対する逆問題は local に well-posed 、すなわち、定理１とおなじ結論が得られるという現象がみられます。きちんといいますと :

定理 4． $q(x) \in C^2[a,b]$ で定理３の (A1), (A2) を仮定し、さらに線形問題 (0) の第２固有関数 $v_2(x)$ が

$$
\begin{aligned}
&|v_2''(c_1)| \neq |v_2''(c_2)|,\\
(8) \qquad &\int_a^d |v_2(x)|^{1-i\xi} dx \neq \int_d^b |v_2(x)|^{1-i\xi} dx \quad \text{for } \mathrm{Im}\xi \geqq 0
\end{aligned}
$$

を満たすとする。(ただし、d は $v_2(x)$ の零点。) このとき、$\lambda(h)$ を $\|\lambda(h) - \lambda_2\|_Y$ が十分小さいように与えると $\Gamma_2(g) = \{(\lambda(h), h) \,|\, h \in \boldsymbol{R}\}$ となるような $g \in X$ が存在する。

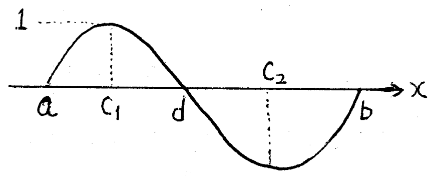
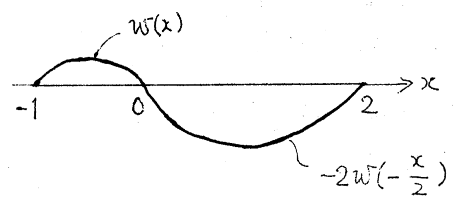


Fig. of $v_2(x)$

条件 (8) はわかりずらいものですが、ひどく対称性をなくせばというぐらいに理解されます。例えば、$a = -1, b = 2, d = 0$ として、



例

で $x = 0$ でポテンシャルがなめらかになるように $v_2(x)$ をつくってやれば例を作ることができます。

定理４がでてくる仕組みを説明しましょう。定理１の証明と同様にして、

$$
\begin{cases}
v'' + [\lambda(h) - q(x)]v = h^{-1} g(hv)0,\\
v(c(h)) = 1, v'(c(h)) = 0
\end{cases}
$$

の解 $v(h,x;g;\mu)$ を用いて $F(g,\mu) := v(h,b;g,\mu)$ とし、これに陰関数定理を使うとき、$F(g,\mu)$ の $(0,0)$ での Fréchet derivative $F_g(0,0)$ は

$$
F_g(0,0)g(h) = h^{-1} \int_a^b v_2(x) g(hv_2(x)) dx
$$

となりますのでやはり、

$$\int_a^b v_2(x)g(hv_2(x))dx = h\varphi(h)$$

が解ければよいということになります。そして、これは、

$$\Phi_+(\xi) := \int_a^d v_2(x)^{1-i\xi}dx,\ \Phi_-(\xi) := \int_d^b (-v_2(x))^{1-i\xi}dx$$

とおくときに

$$(9) \qquad T(t) := \pm\mathcal{M}^{-1}\left(\frac{\Phi_\pm(\xi)}{\sqrt{2\pi}(2-i\xi)[\Phi_+(\xi)^2-\Phi_-(\xi)^2]}\right)(\pm t), \quad \pm t > 0$$

が定義され、$|t| \leqq 1$ に support をもつならば、

$$(10) \qquad g(h) = h\int_{-1}^1 T(t)\left\{t^{-2}(t^3\varphi(t))'\right\}(ht)dt, \qquad \left(T(t) \sim \frac{2}{\pi}\frac{\pm t^3}{(1-t^2)^{1/2}}\right)$$

と解くことができます。

$$[\Phi_+(\xi)^2 - \Phi_-(\xi)^2] = [\Phi_+(\xi)+\Phi_-(\xi)][\Phi_+(\xi)-\Phi_-(\xi)]$$

のうち $\Phi_+(\xi)+\Phi_-(\xi)$ は仮定 (A1),(A2) から $\mathrm{Im}\xi \geqq 0$ で消えません。そこで、仮定 (8) をおきますと、$\Phi_+(\xi)-\Phi_-(\xi)$ もそこで消えず、$|\xi| \to \infty$ において、

$$\Phi_+(\xi)-\Phi_-(\xi) \sim (-|v_2''(c_1)| + |v_2''(c_2)|)|\xi|^{-1/2}$$

という挙動を持ちますので (10) 式に到達します。なお、蛇足ながら、(10) 式で $t<0$ の部分のない場合が定理 1 にあたりますし、上で $\Phi_+(\xi)-\Phi_-(\xi) \equiv 0$ の場合が定理 3 に相当すると考えることができます。

もはや、定理 4 を第 n 分岐に拡張することは難しくありません。それを述べてこの講演を終わることにします。

定理 5. $q(x) \in C^2[a,b]$ で
(A1) $v_n(x)$ の停留点は $c_1, c_2, \cdots, c_n$ だけであり、$v_n''(c_i) \neq 0$
(A2) $v_n''(x)v_n(x) \leqq 2v_n'(x)^2$ *for* $a \leqq x \leqq b$
と仮定する。さらに

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i v_n''(c_i) \neq 0,$$

$$\int_{\{x\,|\,v_n(x)\geqq 0\}} |v_n(x)|^{1-i\xi}dx \neq \int_{\{x\,|\,v_n(x)\leqq 0\}} |v_n(x)|^{1-i\xi}dx$$

とする。このとき、$\lambda(h)$ を $\|\lambda(h)-\lambda_n\|_Y$ が十分小さいように与えると $\Gamma_n(g) = \{(\lambda(h),h)\,|\,h \in \boldsymbol{R}\}$ となるような $g \in X$ が存在する。

References

1. M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Funct. Anal. **8** (1971), 321–340.
2. K. Iwasaki and Y. Kamimura, *An inverse bifurcation problems and an integral equation of Abel type*, Preprint series 94-73, Dept. Math. Sci. Univ. Tokyo (1994).
3. Y. Kamimura, *An inverse problem in bifurcation theory*, J. Differential Equations **106** (1993), 10–26.
4. ———, *An inverse problem in bifurcation theory, II*, J. Math. Soc. Japan **46** (1994), 89–110.
5. ———, *An inverse problem in bifurcation theory, III*, Proc. Amer Math. Soc. **123** (1995), 3051–3056.
6. R. P. Kanwal, *Linear Integral Equations*, Academic Press, San Diego, 1971.
7. L. Nierenberg, *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, Courant Institute of mathematical Sciences, 1974.
8. P. H. Rabinowitz, *Nonlinear Sturm-Liouville problems for second order ordinary differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 939–961.
9. K. Yosida, *Lectures on Differential and Integral Equations*, Interscience, New York, 1960.