数理解析研究所講究録
940巻 1996年 7-11



# ある種の minimal flow の特徴ずけについて

神大発達科学部 江川治朗 (Jirō Egawa)

$X$を距離$d_X$を持つ距離空間とする。$Z$, $Q$, $R$, $C$をそれぞれ整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体とする。連続写像 $\pi: X\times R\to X$ が次の条件 (1), (2) を満たすとき, $\pi$を相空間$X$上の flow という:

(1) $\pi(x,0)=x \quad (x\in X)$

(2) $\pi(\pi(x,t),s)=\pi(x,t+s) \quad (x\in X,\ t,s\in R)$

$A\subset X$, $B\subset R$に対して, 集合$\{\pi(x,t);\ x\in A, t\in B\}$を$\pi(A,B)$とかく。$A\subset X$の閉包を$\overline{A}$と記す。又$x\in X$を通る軌道を$O_\pi(x)$とかく, 即ち$O_\pi(x)=\pi(x,R)$。$M\subset X$が任意の$x\in M$に対して$O_\pi(x)\subset M$が成り立つとき, $M$は$\pi$の不変集合という。$\pi$の不変集合$M$への制限を$\pi|M$とかく。$\pi$の空でないコンパクトな不変集合$M$が任意の$x\in M$に対して$\overline{O_\pi(x)}=M$が成り立つとき, $M$を$\pi$の minimal set という。$X$自身が minimal set のとき, $\pi$を$X$上の minimal flow と

いう。任意の$\varepsilon>0$に対して$\delta>0$が存在して，$d_X(x,y)<\delta$かつ$t\in R$ならば$d_X(\pi(x,t),\pi(y,t))<\varepsilon$が成り立つとき，$\pi$をequicontinuous flowという。

$\pi$を$X$上のminimal flowとする。任意の$\varepsilon>0$に対して$\alpha>0$が存在して，$d_X(x,\pi(x,n\alpha))<\varepsilon\ (n\in Z)$が成り立つとき，$x\in X$をregularly almost periodic pointという。regularly almost periodic pointの全体を$R(\pi)$とかく。$R(\pi)\neq\phi$のとき，$\pi$はregularly almost periodicという。$R(\pi)=X$のとき，$\pi$はpointwise regularly almost periodicという。$\pi(x,\tau_n)\to y$となる数列$\{\tau_n\}\subset R$に対して，$\pi(y,-\tau_n)\to x$となるとき，$x\in X$をalmost automorphic pointという。almost automorphic pointの全体を$A(\pi)$とかく。$A(\pi)\neq\phi$のとき，$\pi$はalmost automorphicであるという。$R(\pi)$，$A(\pi)$は$\pi$の不変集合であることは容易にわかる。$\lambda\in R$に対して，$\chi_\lambda(\pi(x,t))=\chi_\lambda(x)e^{i\lambda t}$をみたす連続関数$\chi_\lambda: X\to K=\{z\in C;\ |z|=1\}$が存在するとき，$\lambda$を$\pi$の固有値という。このとき，$\chi_\lambda$を$\lambda$に属する固有関数という。$\pi$の固有値の全体を$\Lambda(\pi)$とかく。このとき，$\Lambda(\pi)$は$R$の可算部分加群である。

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R$が

$$r_1\alpha_1+r_2\alpha_2+\cdots+r_n\alpha_n=0\ (r_i\in Q)\Rightarrow r_1=r_2=\cdots=r_n=0$$

が成り立つとき，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は rationally independent という。Rの可算部分集合 $A$ が

(1) $n$ 個の rationally independent な $A$ の要素 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を持ち，

(2) 任意の $a \in A$ に対して，

$$a = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_n\alpha_n \quad (r_i \in \mathbb{Q})$$

とあらわせるとき，

$A$ の次元は $n$ といい，$\dim A = n$ とかく。

[2] で regularly almost periodic minimal flow が discrete flow に対して議論されているが，この報告では，それを continuous flow に対して考察し，次の定理を得た。証明については [1] を見ていただきたい。

定理1　$\pi$ をコンパクト距離空間 $X$ 上の minimal flow とする。このとき，$\pi$ が regularly almost periodic であるための必要十分条件は，$\pi$ が almost automorphic で $\dim\Lambda(\pi) = 1$ となることである。

定理2　$\pi$ をコンパクト距離空間 $X$ 上の minimal flow とする。このとき，$\pi$ が pointwise regularly almost periodic であるための必要十分条件は，$\pi$ が equicontinuous

で $\dim \Lambda(\pi) = 1$ となることである。

$C(R, C)$ を複素数値連続関数の全体に compact-open topology を入れた空間とする。このとき，よく知られているように $C(R, C)$ は距離空間となる。$C(R, C)$ 上の flow $\eta$ を $\eta(f, t) = f_t$ $(f \in C(R, C),\ t \in R)$ で定義する。但し，$f_t(s) = f(t+s)$ $(s \in R)$。$f \in C(R, C)$ に対して，$H(f) = \overline{O_\eta(f)} = \overline{\{f_t\}_{t \in R}}$ と定義し，$\eta_f = \eta | H(f)$ とおく。このとき，$f$ が $\eta_f$ の almost automorphic point であるとは，$f$ が Bochner の almost automorphic function であり，$\eta_f$ が equicontinuous とは $f$ が almost periodic function であることが対応する。更に，$f$ が almost automorphic function のとき，$\Lambda(\eta_f) = \{\lambda_n\}$ とする。このとき，ある $\{a_k^n\} \subset C$ をとると，

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n e^{i\lambda_k t}$$

が $f$ に広義一様収束するようにできることが知られている。勿論 $f$ が almost periodic function のとき，上記の列が一様に $f$ に収束するようにできる。

参考文献

[1] J. Egawa, A characterization of regularly

almost periodic minimal flows, Proc. Japan Acad. Vol. 71 (1995), 225-228.

[2] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Colloquium publication Vol. 36, 1955.