数理解析研究所講究録
941 巻 1996 年 210-214

26.

数式処理による2変数代数曲面の追跡 Hessian が零になる点の近傍の状態

一松 信 東京電機大学・理工
(Sin Hitotumatu)
笠嶋友美 上智大学・理工
(Tomomi Kasajima)

Abstract. Using the graphics functions of two different kinds of computer algebra systems, Risa/asir and Mathematica , we show some 3-dimesional graphics of $z=f(x,y)$ belongs to C^2, especialy at the point (x_0,y_0) satisfied $Hessian=H(x_0,y_0)=0$ where $H(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f}{\partial xy})^2$. To see this structure,there is the Peron's example : $z=(y-x^2)(y-2x^2)$ [1]. This function satisfied (1) $z=y^2$, (2)$z=2x^4$ when $x=0, y=0$ respectively and $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, even when $f(x,y)$ assumes minimun on each straight line passing through the origin. But $Hessian=0$ .We show the graphics why that reasen occurs in this case by useing above two systems.Later we see that its bottom-line is given by (3) $x=t, y=3t^2/2, z=-t^4/4$. This 3-dimensional cureve is with opposit direction to above two curves with z-axis. This is merely an example, and we shall show other interesting example in a comming report.

26.1 はじめに

曲面の明解な描画のためには、与えられた数式の数学的特徴を把握しておくと、思いの他良い描画が描ける場合がある。数式処理システムでは数式のさまざまな演算の他に、グラフィクスの機能も搭載されているものが多い。この点 数式処理システムに組み込まれているグラフィクス機能を利用しての描画は、同時に関連する式の演算を行ないながら、曲面の状況を探索できる特徴がある。

次節に示すように Hessian=0 の場合の一例で 2 変数代数関数

$$z = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

をとりあげる。この関数は Peano's Expample と呼ばれ ている [1]。

数式処理における グラフィクス機能には、それぞれの システムによって得意とするところがあり、本稿では、等高線、陰関数の描画には抜群の Risa/Asir を利用、また 3 次元曲面、曲線の描画には、Mathematica を利用した。Maple でも 面白い描画が出来たが、出力装置が整わなかったので見送ることにした。

単純に見える式の形に似合わず特に原点の近傍では、微妙な数値に敏感に変動する非常に描きにくい曲面である。[1] では「たとえ、点 P_0 を通るすべての直線の上で $f(x, y)$ の極小を与える点であっても P_0は $f(x, y)$ の極小を与える点とはならない。」例として紹介されている。

26.2 Hessian

Hessian は微積分では 周知の式であるが、見ての通り手計算では瞬間的とはいえない。さて、2 変数の関数 $z = f(x, y)$ は C^2級の関数で、z の 表す曲面上の点 (x_0, y_0) は停留点であるとする。点 (x_0, y_0) の 極値 、鞍点の判定にはつぎの式で示す Hessian= $H(x, y)$ が利用される.

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 z}{\partial xy})^2$$

$H(x_0, y_0) \neq 0$ の 場合は (付加する条件 f_{xx}によって) 曲面の形状が極大 (小) と定まり、あるいは 鞍点のいずれかに対応する。いずれもその図形的区別は明解である。 しかし $H(x_0, y_0) = 0$ の場合はこれらのいずれでもなく、対応する曲面の一般的な形状もまちまちである。

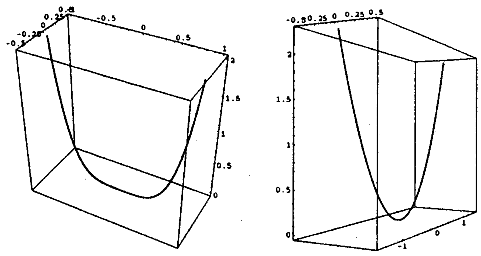
26.3 計算結果からの分析

この関数の特徴は、 $H(0, 0) = 0$ であるにかかわらず、微積の基本的な手順で計算すると、次の節で示されるように、原点は極小点であるかのようである。

原点における z の x, y に関する偏微分係数はそれぞれ零となる。即ち$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ である。さらに (no.1) $x = 0$ のとき $z = f(0, y) = y^2$, (no.2) $y = 0$ のとき $z = f(x, 0) = 2x^4$ である。原点は停留点である。

一変数 (no.1),(no.2) はそれぞれ、原点で 極小値 をとる。(no.1),(no.2) の空間曲線を Mathematica

で 描きだす。

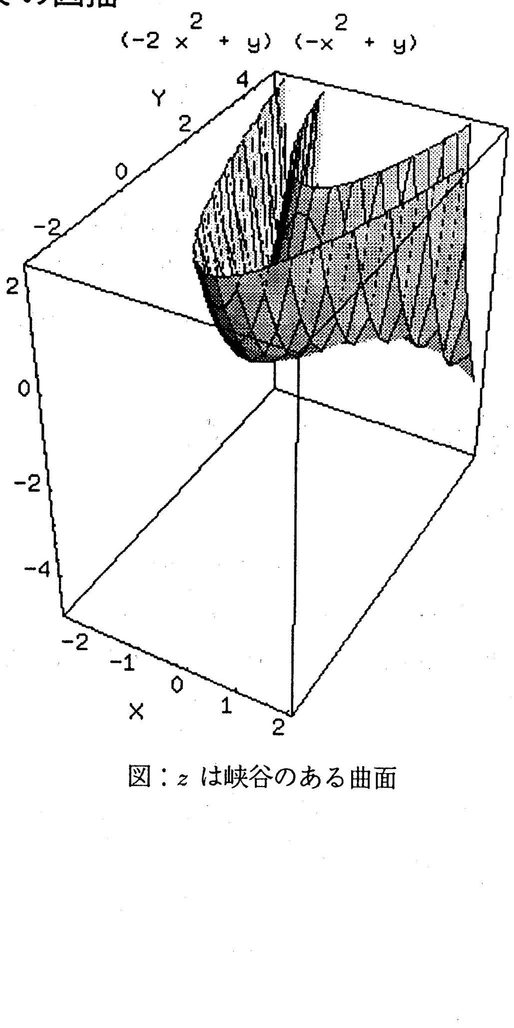


原点を通る曲面 z 上の空間曲線, 原点は極小点であるかのように見える。
左図：(no.2) $f(x,0)=2x^4$, 右図 ：(no.1) $f(0,y)=y^2$

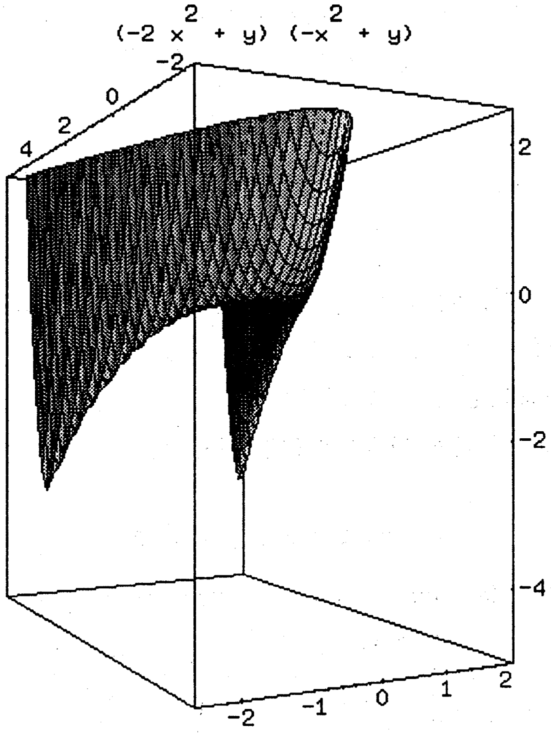
26.4 グラフィクスの観点から

曲面の形状を調べるためには、3次元グラフィクスに描き出すのが効果的である。しかしながら、この 2 変数 4 次式 $z=(y-x^2)(y-2x^2)=2x^4-3x^2y+y^2$ の表す3次元曲面はことに原点の付近では、微妙な数値の変動で曲面の形は大きく変動してくる。$z=f(x,y)$ を実際に 数式処理 のグラフィクス機能を利用して描くことにする。

■ Mathematica での画描

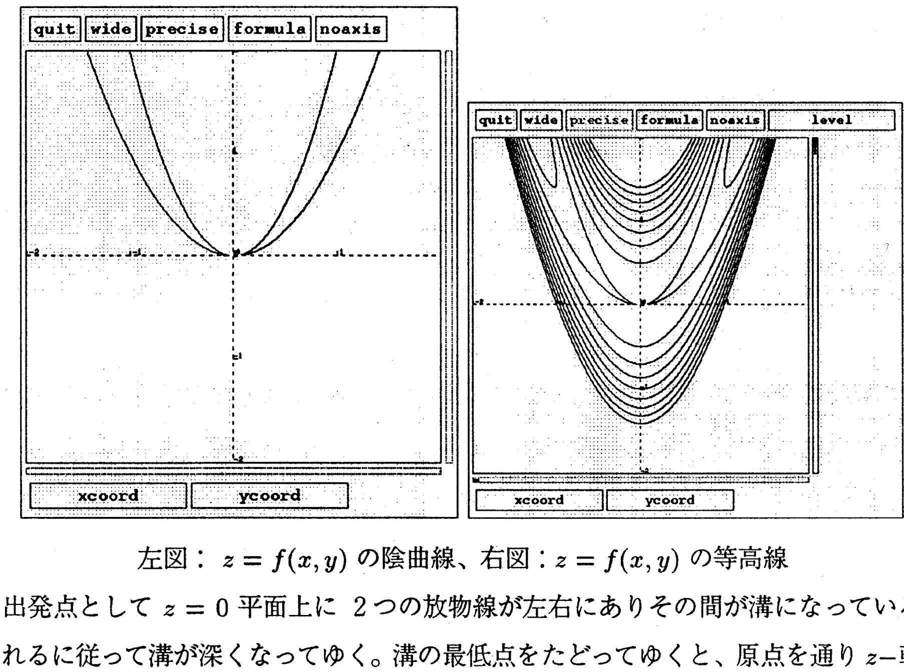


図：z は峡谷のある曲面



図：zを下側から眺めた曲面

■Risa/ Asir での画描



左図： $z = f(x, y)$ の陰曲線、右図：$z = f(x, y)$ の等高線

原点を出発点として $z = 0$ 平面上に 2 つの放物線が左右にありその間が溝になっている。また原点をはなれるに従って溝が深くなってゆく。溝の最低点をたどってゆくと、原点を通り z−軸の負の方向に一本の曲線が存在していることが「見て」確認される。

前述の z 軸に正 の方向の 2 つの曲線 (no.1),(no.2) のほかに (no.3) z−軸に負の方向に向かう別の

曲線 (no.3) が存在している。従って もし $z=(y-x^2)(y-2x^2)$ のような形状の地形があり、原点の位置に泉が噴出しているとすると、水は溜ることはなく、溝を通って流れていくであろう。

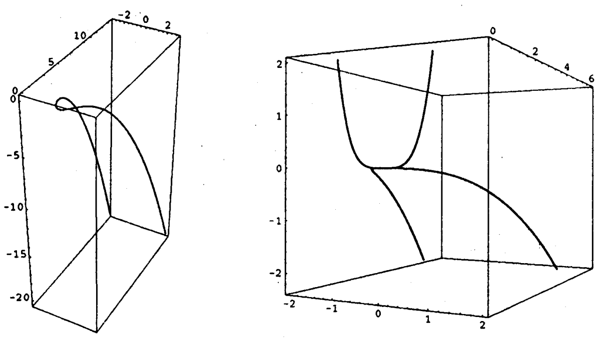
26.5 おわりに

$x-y$ 平面に平行または垂直な観点からでは、原点が極小値であるかの域を脱しない。結局式だけみていたのでは、実際の形 はつかみにくい。グラフィクスを描くことによって、より曲面の状態がはっきりしてくる。数学教育の面にも役にたつことと思う。

なお、講演後に見つけたが 曲面 の 原点を通る空間曲線 は

$$x=t, y=3t^2/2, z=t^4/4$$

であることが確認された。Mathematica で描くとつぎの左図のようになる。



左図：(no.3) の空間曲線 $x=t, y=3t^2/2, z=-t^4/4$

右図：(no.3) と (no.2) を同時に描く。原点で 接線 x 軸 を共有している。

参考文献

[1]一松信 執筆代表, 新数学事典 大阪書籍 1979 年初版、1986 年初版 5 刷、第 4 章解析学 3 節 、476 頁.

[2]S.Wolfram, Doing Mathematica,Wolfram Reseach,1987.