

Coiflet Filter 係数, Biorthogonal wavelet Filter 係数の計算

愛知工業大学・電子工学科 秦野和郎 (Kazuo Hatano)

文献 [2] に, 台が局所的 (compactly supported) な Wavelet を構成するための種々の Filter 係数が与えられている. すなわち,

(1) 正規直交 Wavelet Filter 係数として, (1-1) 台の幅を同一としたとき, 最高次数の近似条件を満足する Filter 係数 (Daubechies の Wavelet), (1-2) 対称性をよくした Coiflet Filter 係数などの表が与えられている. また,

(2) 双直交 Wavelet Filter 係数として, (2-1) Spline Wavelet Filter 係数, (2-2) Coiflet に近い Biorthogonal Wavelet Filter 係数などの表が与えられている. しかし,

(1-1) については, 見かけは 16 桁であるが, 下位 5 桁に誤りのある係数があり, 桁数不足である. (1-2) については,  $K = 1$  の係数に写し間違いと思われる係数がある. また, 12 桁程度与えられているのみであり桁数不足である. (2-1) は簡単に計算できる係数であるが, 僅かな個数しか与えられていない. (2-2) は性質のよい Wavelet であるが, Filter 係数は  $K = 1, 2, 3$  に対して与えられているのみである.

Wavelet 変換は直交変換として非常に有用と思われるので, これらの Filter 係数は少なくとも倍精度計算に使える程度の高精度の値を, 又, より高い近似条件を満足する係数を計算しておく必要がある. このような背景から, ここでは十分な個数の Filter 係数を十分な桁数で計算した. 紙数の関係から, 以下ではこれらの Filter 係数の計算について簡単に述べ,  $K \leq 5$  に対する Coiflet Filter 係数, Biorthogonal Wavelet Filter 係数の表を掲示する.

1. Coiflet Filter 係数.

文献 [2] によれば,  $2K$  次 Coiflet の Filter 係数を,  $c_{-2K}, c_{-2K+1}, \dots, c_{4K-1}$  とすると, それらを係数とする,  $2\pi$ -周期の周期関数,  $m_0(\xi) = \sum_{j=-2K}^{4K-1} c_j e^{-ij\xi}$  に関して,

$$(1) \quad \begin{cases} m_0^{(k)}(\pi) = 0 : 0 \leq k \leq 2K - 1 \text{ (近似条件)}, \\ m_0^{(k)}(0) = 0 : 1 \leq k \leq 2K - 1 \text{ (対称条件)}, \\ |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \equiv 1 \text{ (直交条件)} \end{cases}$$

が成り立つ. 文献 [2] によれば,  $2\pi$ -周期の周期関数,

$$(2) \quad m_0(\xi) = \left(\cos^2 \frac{\xi}{2}\right)^K \left[ \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} \left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right)^k + \left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right)^K \sum_{j=0}^{2K-1} \lambda_j e^{-ij\xi} \right]$$

は, 式 (1) の近似条件と対称条件とを満たす. 従って, 文献 [2] では, 残った直交条件を満たすように,  $\lambda_j$  を決めると言う方針で Coiflet Filter 係数を計算している.  $z = e^{-i\xi}$  とおくと,

$$(3) \quad \cos^2 \frac{\xi}{2} = \frac{(1+z)^2}{4z}, \quad \sin^2 \frac{\xi}{2} = -\frac{(1-z)^2}{4z}, \quad e^{-\frac{\xi}{2}} \cos \frac{\xi}{2} = \frac{(1+z)}{2}$$

である。これを式 (2) に代入して、得られた式を整理して、式 (1) の第三式を適用すると、 $\lambda_j : 0 \leq j \leq 2K - 1$  を未知数とする、 $3K$  個の連立二次方程式が得られる。これを解いて、Filter 係数  $c_j : -2K \leq j \leq 4K - 1$  を得る。しかし、この方法は多分に手計算向きであり、多くの  $K$  について Filter 係数を計算することは非常に難しい。

ここでは次のようにして Filter 係数の計算を行った。まず、式 (1) から、

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_{j=-2K}^{4K-1} (-1)^j j^k c_j = 0 & : 0 \leq k \leq 2K - 1 \text{ (近似条件)}, \\ \sum_{j=-2K}^{4K-1} j^k c_j = 0 & : 1 \leq k \leq 2K - 1 \text{ (対称条件)}, \\ \sum_{j=-2K}^{4K-1-2k} c_j c_{j+2k} = \frac{1}{2} \delta_{k,0} & : 0 \leq k \leq 3K - 1 \text{ (直交条件)} \end{cases}$$

を得ることができる。上式は、 $6K$  個の未知数を持つ、 $7K - 1$  個の方程式である。従って、解が一つだけ存在するときには、全ての方程式が独立な訳ではない。第一式と第二式を連立化して ( $4K - 1$  元の連立一次方程式)、 $c_{-2K}, c_{-2K+1}, \dots, c_{2K-2}$  を  $c_{2K-1}, c_{2K}, \dots, c_{4K-1}$  の線形結合で表すことができる。すなわち、 $c_{-2K}, c_{-2K+1}, \dots, c_{2K-2}$  を未知数とする  $4K - 1$  元の連立一次方程式、

$$(5) \quad \begin{cases} \sum_{j=-2K}^{2K-2} (-1)^j j^k c_j = - \sum_{j=2K-1}^{4K-1} (-1)^j j^k c_j & : 0 \leq k \leq 2K - 1, \\ \sum_{j=-2K}^{2K-2} j^k c_j = - \sum_{j=2K-1}^{4K-1} j^k c_j & : 1 \leq k \leq 2K - 1 \end{cases}$$

を解いて得られた結果、

$$(6) \quad c_k = \sum_{j=2K-1}^{4K-1} \alpha_{k,j} c_j \quad : -2K \leq k \leq 2K - 2$$

を、式 (4) の第三式で、 $0 \leq k \leq 2K$  とした  $2K + 1$  個の方程式に代入すると  $2K + 1$  元の連立二次方程式、

$$(7) \quad f_k = \sum_{l=2K-1}^{4K-1} \sum_{j=2K-1}^l \beta_{l,j}^{[k]} c_l c_j - \frac{1}{2} \delta_{k,0} = 0 \quad : k = 0, 1, \dots, 2K$$

を得る。これを Newton 法で解き、得られた解、 $c_{2K-1}, c_{2K}, \dots, c_{4K-1}$  を、式 (4) の第三式で  $2K + 1 \leq k \leq 3K - 1$  とした方程式、すなわち使わなかった方程式に代入して、それらが十分な精度で成り立つことを確認する。

$1 \leq K \leq 17$  に対して, 10 進 270 桁程度の多倍長計算で, 上の手順を適用し, 4 倍精度の計算に適用できる程度の高精度の Coiflet Filter 係数を計算した. ここでは, これらの結果を,  $1 \leq K \leq 5$  について, Table 1 に示す.

## 2. Spline Wavelet Filter 係数.

文献 [2] によれば,  $\tilde{N} = 2\tilde{l}$ ,  $N = 2l$  のとき, 二つの  $2\pi$ -周期の周期関数,

$$(8) \quad \tilde{m}_0(\xi) = \left(\cos \frac{\xi}{2}\right)^{\tilde{N}}, \quad m_0(\xi) = \left(\cos \frac{\xi}{2}\right)^N \sum_{j=0}^{l+\tilde{l}-1} \binom{l+\tilde{l}-1+j}{j} \left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right)^j$$

は,

$$(9) \quad \begin{cases} \tilde{m}_0(\xi)m_0(\xi) + \tilde{m}_0(\xi+\pi)m_0(\xi+\pi) \equiv 1, \\ \tilde{m}_0(0) = 1, \quad \tilde{m}_0^{(k)}(\pi) = 0 : 0 \leq k \leq 2\tilde{l}-1 \\ m_0^{(k)}(\pi) = 0 : 0 \leq k \leq 2l-1 \end{cases}$$

を満足する. すなわち, 双直交条件を満足し, それぞれ  $2\tilde{l}$  次,  $2l$  次の近似条件を満足する. 従って, 式 (3) を使い, 式 (8) を

$$(10) \quad \tilde{m}_0(\xi) = \sum_{r=-\tilde{l}}^{\tilde{l}} \alpha_r z^r, \quad m_0(\xi) = \sum_{r=-2l-\tilde{l}+1}^{2l+\tilde{l}-1} \beta_r z^r$$

の形に書き改めると, 上式における  $\alpha_r : -\tilde{l} \leq r \leq \tilde{l}$ ,  $\beta_r : -2l-\tilde{l}+1 \leq r \leq 2l+\tilde{l}-1$  は, Spline Wavelet の Filter 係数である. これらの係数はすべて有理数である.  $\tilde{N} = 2\tilde{l}+1$ ,  $N = 2l+1$  のときも同じようにして Filter 係数を得ることができる. このように, Spline Wavelet Filter 係数は容易に計算することができる.

## 3. Coiflet に近い Biorthogonal Wavelet Filter 係数.

文献 [2] によれば, 二つの  $2\pi$ -周期の周期関数,

$$(11) \quad \begin{cases} m_0(\xi) = \left(\cos \frac{\xi}{2}\right)^{2K} \left[ \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} \left(\sin \frac{\xi}{2}\right)^{2k} + a \left(\sin \frac{\xi}{2}\right)^{2K} \right] \\ \tilde{m}_0(\xi) = \left(\cos \frac{\xi}{2}\right)^{2K} \left[ \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} \left(\sin \frac{\xi}{2}\right)^{2k} + \sum_{k=K}^{3K-1} \lambda_k \left(\sin \frac{\xi}{2}\right)^{2k} \right] \end{cases}$$

は,

$$(12) \quad \begin{cases} m_0(0) = 1, \quad m_0^{(k)}(\pi) = 0 : 0 \leq k \leq 2K-1, \\ \tilde{m}_0^{(k)}(\pi) = 0 : 0 \leq k \leq 2K-1 \end{cases}$$

Table 1. Coiflet Filter Coefficients named by Daubechies.(1/3)

	$j$	Coiflet Filter Coefficients $c_j$	
$K = 1$	-2	-5.142972847076845595317549230122688830344559947132656813651045e - 02	
	-1	2.389297284707684559531754923012268883034455994713265681365104e - 01	
	0	6.028594569415369119063509846024537766068911989426531362730209e - 01	
	1	2.721405430584630880936490153975462233931088010573468637269790e - 01	
	2	-5.142972847076845595317549230122688830344559947132656813651045e - 02	
	3	-1.107027152923154404682450769877311169655440052867343186348954e - 02	
	$K = 2$	-4	1.158759673871686817889714882853120395708315073355502818875931e - 02
-3		-2.932013798346856448679594524397843054053420947418409889774786e - 02	
-2		-4.763959031100813225872995081511549408622753909592460525840745e - 02	
-1		2.730210465347666137982239328923516270034828327990699588033501e - 01	
0		5.746823938568638472459483149751499367740786490481481391460366e - 01	
1		2.948671936956191896750637208703777973914107635455611537640778e - 01	
2		-5.408560709171142997443672832006888537570221990444706777525838e - 02	
3		-4.202648046077160694657530752545884878978719268926222513485613e - 02	
4		1.674441016327950635146257083249391698866289538037299820224006e - 02	
5		3.967883612962012109043447090269950094081810916481648252817197e - 03	
6		-1.289203356140659543141355500990678257894936161704492503370186e - 03	
7		-5.095053991076441489598480835620951586540050976664367876412655e - 04	
$K = 3$		-6	-2.682418670922068664584689955153722375535836177157637134187840e - 03
		-5	5.503126707831385107969640263617469178794666057252906037981936e - 03
	-4	1.658356047917034608134280439996549525220639437145367606178002e - 02	
	-3	-4.650776447872697640390293095170192691113917841041002855534619e - 02	
	-2	-4.322076356021191118175840907244577856782537221435748296465882e - 02	
	-1	2.865033352736474630249006862976158896891076238443844211133873e - 01	
	0	5.612852568703300445990941995240077241406247774064453800050914e - 01	
	1	3.029835717728241602862575774374668529867757043461413348549577e - 01	
	2	-5.077014075488886159516471867138370972545857441670871832472707e - 02	
	3	-5.819625076158553022607041679522801089624825903982541419721721e - 02	
	4	2.443409432116695639462954438418928805487699080947974989338820e - 02	
	5	1.122924096203786563399489540091488781245346096838814728167341e - 02	
	6	-6.369601011048822977293753932627342482077585617391852852955559e - 03	
	7	-1.820458915566242322836631665832145136570132777862391313328351e - 03	
8	7.902051009575939937150950543290226440287715441826917281929124e - 04		
9	3.296651737931830308416338897758022998655744276957481989605186e - 04		
10	-5.019277455327664998007173088097694083956570594580641192332170e - 05		
11	-2.446573425530813115445387662881902303945941576472342106918209e - 05		
$K = 4$	-8	6.309612114309468490753696608619526520153127603444406835368201e - 04	
	-7	-1.152225143769973488683007937016166047881572156705066038094891e - 03	
	-6	-5.194525163470323267558201363327294331811309729430512113592118e - 03	

Table 1. Coiflet Filter Coefficients named by Daubechies.(2/3)

	$j$	Coiflet Filter Coefficients $c_j$
$K = 4$	-5	1.136246148326482276463392678363118465908960082105224676102131e - 02
	-4	1.886723856956305960822813160712701905823879297781452350370094e - 02
	-3	-5.746424190192718517290527411385172124443396690932404284859269e - 02
	-2	-3.965265296244913762718094206756579981738035770770645437919302e - 02
	-1	2.936674050161006858761278962798582650835466243678172528509866e - 01
	0	5.531264550395492870333469741987846570947502710783248169642137e - 01
	1	3.071573096678856987248881030393884808414165269795297009902001e - 01
	2	-4.711273752389572084912399351781012121935994396763702238263689e - 02
	3	-6.803811467802056988332974920928626798429778679560269769187728e - 02
	4	2.781363695846951303169163645831936314699164412528991864702607e - 02
	5	1.773583142270308388403079552822372238681544967313003044695583e - 02
	6	-1.075631615508724933047071603601897536695959225169888787867102e - 02
	7	-4.001010844950535391911552472397083276670126595827549403173754e - 03
	8	2.652664913530499860820143301690017184933302935238430721089152e - 03
	9	8.955939276952843603555618778866181384528643960440369133096025e - 04
10	-4.165001950941708741516836418852536615951250588002878691463468e - 04	
11	-1.838296167136253805617482342622910940008368723403836355183423e - 04	
12	4.408022661597206973006038672236031501663774161685451815597956e - 05	
13	2.208284691230832960893331999804142845136324572860276715790883e - 05	
14	-2.304919162676504406778986897925054839632903355820414483306851e - 06	
15	-1.262179179994622253884862172782890488140153502131112374520603e - 06	
$K = 5$	-10	-1.499645228345950331670593167919531667975440598691604525531231e - 04
	-9	2.535527523580334712936363872191554706055603482812691726895588e - 04
	-8	1.540286725995222360335148244676269541414659303531250711822333e - 03
	-7	-2.941078164035693185044038586065593320891475311414770624555173e - 03
	-6	-7.164112349410053294382279572472252500899544810929605832362178e - 03
	-5	1.655218330649288840540841623080651353621667424921282557975513e - 02
	-4	1.991901719798432056056857854066125809443504706772520641876273e - 02
	-3	-6.499837825472324963374262221660858232544804226063450042795603e - 02
	-2	-3.680255347446873527191823500872992242220223547780834450868002e - 02
	-1	2.980959014587191795511466861338063554509597132272839414668911e - 01
	0	5.475082713540367154128337935687830970431964302909253422329131e - 01
	1	3.097002590784203529311533316221254677074498876376965941549923e - 01
	2	-4.386731482823615640442730013366750193381707273908757638050452e - 02
	3	-7.464442013283971243472663968192859562973186442054433655531762e - 02
	4	2.919469277528073666095772398605275751022315529465178441510318e - 02
5	2.310457227706684192610065243663928370022983285246219996141160e - 02	
6	-1.397129268638200558584119246355879336305763752871371182932059e - 02	
7	-6.476749751505861835547590642967453082384538848552165075614441e - 03	

Table 1. Coiflet Filter Coefficients named by Daubechies.(3/3)

	$j$	Coiflet Filter Coefficients $c_j$
$K = 5$	8	4.781116799130657606400088024549264921093190305150784065791191e - 03
	9	1.719383484385504023022397097446276782318002683055773803854075e - 03
	10	-1.174947934413537690027670037110105795928147523549002426409332e - 03
	11	-4.508222400696236312231932151038336110220594834213702970043431e - 04
	12	2.134457975086291667348984871136041914777578046177470626552867e - 04
	13	9.924691139873533169989496559631669037970741600337089424730635e - 05
	14	-2.914684388622130824599478843558087403539428940986384077972155e - 05
	15	-1.504031798197685905639227292876711236513927746903476131955063e - 05
	16	2.616809660013118152124234488302931243021794024318439103773996e - 06
	17	1.457502921355163070577152619048168436286350537937563166257584e - 06
	18	-1.148199649902979726237655584441763456854312591680755421569962e - 07
	19	-6.791060677322355511541065559242475254516249773485524025251102e - 08

を満足する。すなわち、いずれも  $2K$  次の近似条件を満足する。  $m_0(\xi)$  を Coiflet のそれに近づけるために、第一式における、  $a$  を、

$$(13) \quad \left| \int_{-\pi}^{\pi} [1 - |m_0(\xi)|^2 - |m_0(\xi + \pi)|^2] d\xi \right| = 0$$

が満足されるように決める。これは  $a$  についての 2 次方程式である。  $K = 30$  まで計算したところでは、この二次方程式は二つの実根を持つ。得られた  $a$  の絶対値の小さい方を採用し、それに近い有理数を求める。  $K = 1$  では、0.8,  $K = 2$  では 3.2, それ以上の  $K$  では整数にする。これにより、  $m_0(\xi)$  は確定する。次に、式 (11) 第二式における、  $\lambda_k : K \leq k \leq 3K - 1$  を、双直交条件、

$$(14) \quad m_0(\xi)\tilde{m}_0(\xi) + m_0(\xi + \pi)\tilde{m}_0(\xi + \pi) \equiv 1$$

が満足されるように決める。式 (14) から、  $2K$  個の未知数を持つ、  $3K$  個の一次方程式が得られるが、解を得ることは可能である。そのようにして得られた解を使って、式 (11) を

$$\begin{cases} m_0(\xi) = \sum_{k=-2K}^{2K} \alpha_k e^{-ik\xi} = \sum_{k=-2K}^{2K} \alpha_k z^k, & \alpha_{-k} = \alpha_k : k = 1, 2, \dots, 2K, \\ \tilde{m}_0(\xi) = \sum_{k=-4K+1}^{4K-1} \beta_k e^{-ik\xi} = \sum_{k=-4K+1}^{4K-1} \beta_k z^k & : \beta_{-k} = \beta_k : k = 1, 2, \dots, 4K - 1 \end{cases}$$

の形にすれば、上式における  $\alpha_k : -2K \leq k \leq 2K$ ,  $\beta_k : -4K + 1 \leq k \leq 4K - 1$  は双対の Wavelet Filter 係数である。  $1 \leq K \leq 30$  に対して 10 進 270 桁程度の多倍長計算で上の手順を実行し、十分な精度の Filter 係数を算出した。  $1 \leq K \leq 5$  についての Filter 係数を Table 2 に示す。



Table 2. Biorthogonal Wavelet Filter Coefficients.(2/3)

	$j$	Coefficients of $\tilde{m}_0(\xi)$	$\beta_j$
$K = 3$	$\pm 4$	2.198363755465534979423868312757201646090534979423868312757201	$\epsilon - 02$
	$\pm 3$	-5.522013566130963863168724279835390946502057613168724279835390	$\epsilon - 02$
	$\pm 2$	-4.700510032873585390946502057613168724279835390946502057613168	$\epsilon - 02$
	$\pm 1$	2.961449087009508423353909465020576131687242798353909465020576	$\epsilon - 01$
	0	5.601161677356610082304526748971193415637860082304526748971193	$\epsilon - 01$
	$j$	Coefficients of $m_0(\xi)$	$\alpha_j$
$K = 4$	$\pm 8$	7.9345703125000	$\epsilon - 04$
	$\pm 7$	-1.22070312500	$\epsilon - 03$
	$\pm 6$	-6.34765625000	$\epsilon - 03$
	$\pm 5$	1.1962890625000	$\epsilon - 02$
	$\pm 4$	2.2216796875000	$\epsilon - 02$
	$\pm 3$	-5.9814453125000	$\epsilon - 02$
	$\pm 2$	-4.44335937500	$\epsilon - 02$
	$\pm 1$	2.9907226562500	$\epsilon - 01$
	0	5.555419921875000	$\epsilon - 01$
	$j$	Coefficients of $\tilde{m}_0(\xi)$	$\beta_j$
$K = 4$	$\pm 15$	-1.359560541510883460577895801719777440566514921598381385938290	$\epsilon - 06$
	$\pm 14$	-2.091631602324436093196762771876580677794638340920586747597369	$\epsilon - 06$
	$\pm 13$	2.356712441483791713428384758050918900691283088855167762603270	$\epsilon - 05$
	$\pm 12$	4.002205136855001132819086157477659753835778114989040633957174	$\epsilon - 05$
	$\pm 11$	-1.933241274400658640445856516607654695666835272298094756364862	$\epsilon - 04$
	$\pm 10$	-3.764893091703783780401702916877423705951778789411566346315966	$\epsilon - 04$
	$\pm 9$	8.961332853317582331908088855167762603270949249704940145000843	$\epsilon - 04$
	$\pm 8$	2.332784662036062834576799865115494857528241443264205024447816	$\epsilon - 03$
	$\pm 7$	-3.774691291129562951645749030517619288484235373461473613218681	$\epsilon - 03$
	$\pm 6$	-9.352681537519476502565966953296240094419153599730230989715056	$\epsilon - 03$
	$\pm 5$	1.657878255526546361856005521834429269937615916371606811667509	$\epsilon - 02$
	$\pm 4$	2.449250584327235951067484403979092901702916877423705951778789	$\epsilon - 02$
	$\pm 3$	-6.485651277828489903996875526892598212780306862249199123250716	$\epsilon - 02$
	$\pm 2$	-4.304651529948559846107844377002191873208565166076546956668352	$\epsilon - 02$
	$\pm 1$	3.013274047923839789702345198954645085145843871185297588939470	$\epsilon - 01$
	0	5.518249304422016108423958860225931546113640195582532456584049	$\epsilon - 01$
	$j$	Coefficients of $m_0(\xi)$	$\alpha_j$
$K = 5$	$\pm 10$	-1.9741058349609375000	$\epsilon - 04$
	$\pm 9$	2.670288085937500	$\epsilon - 04$
	$\pm 8$	1.9741058349609375000	$\epsilon - 03$
	$\pm 7$	-3.08990478515625000	$\epsilon - 03$
	$\pm 6$	-8.8834762573242187500	$\epsilon - 03$
	$\pm 5$	1.730346679687500	$\epsilon - 02$



