数理解析研究所講究録
944巻 1996年 186-189

非線形SOR型反復について

愛媛大学理学部　山本哲朗 (YAMAMOTO Tetsuro)
大阪女子大学学芸学部　石原和夫 (ISHIHARA Kazuo)
早稲田大学理工学部　室谷義昭 (MUROYA Yoshiaki)

§1. はじめに

非線形方程式

$$F(z)=0, \quad F=(F_1,\ldots,F_n)^t, \quad z=(z_1,\ldots,z_n) \tag{1.1}$$

に対するSOR法は $k=0,1,2,\ldots$ につき 次で定義される。

(I) $F_i(z_1^{(k+1)},\ldots,z_{i-1}^{(k+1)},z_i,z_{i+1}^{(k)},\ldots,z_n^{(k)})=0$ を z_i につき解き (1.2)

$$z_i^{(k+\frac{1}{2})}=z_i$$

とおく。

(II) $z_i^{(k+1)}=z_i^{(k)}+\omega(z_i^{(k+\frac{1}{2})}-z_i^{(k)})$ とおく。 $1\le i\le n.$ (1.3)

一般に (1.2) を z_i について解くことはできないから、Newton法の第1近似を z_i として代用し

$$z_i^{(k+\frac{1}{2})}=z_i^{(k)}-\frac{F_i(z^{(k,i-1)})}{F_{ii}(z^{(k,i-1)})}, \qquad 1\le i\le n, \quad k\ge 0$$

とする。但し、$z^{(k,i-1)}=(z_1^{(k+1)},\ldots,z_{i-1}^{(k+1)},z_i^{(k)},\ldots,z_n^{(k)})$. これを (one-step) SOR-Newton 法という。従って そのプロセスは

$$z_i^{(k+1)}=z_i^{(k)}-\omega\frac{F_i(z^{(k,i-1)})}{F_{ii}(z^{(k,i-1)})}, \qquad 1\le i\le n, \quad k\ge 0 \tag{1.4}$$

と書ける。特に $F=Az-b$ の場合にはSOR-Newton法は 通常のSOR法

$$z_i^{(k+1)}=z_i^{(k)}-\omega\frac{\displaystyle\sum_{j<i}a_{ij}z_j^{(k+1)}+\sum_{j\ge i}a_{ij}z_j^{(k)}-b_i}{a_{ii}}, \qquad 1\le i\le n, \quad k\ge 0$$

または、

$$z^{(k+1)}=\mathcal{L}_\omega z^{(k)}+(D-\omega L)^{-1}b, \qquad k\ge 0$$

$$\mathcal{L}_\omega=(D-\omega L)^{-1}\{(1-\omega)D+\omega U\}, \quad A=D-L-U$$

と一致するから、(1.4) も SOR法と呼ばれることが多い。

§2. 多項式解法への応用

近年 研究対象とされる多項式解法は D-K 法、Aberth 法等の いわゆる全根同時型解法であり、それらは

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - P(z_i^{(k)})Q_i(z^{(k)}), \qquad 1 \le i \le n, \quad k \ge 0 \tag{2.1}$$

の形に書ける。例えば D-K 法では、

$$Q_i(z^{(k)}) = \frac{1}{\prod_{j\ne i}(z_i^{(k)} - z_j^{(k)})}.$$

である。 これらのSOR型加速

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \omega P(z_i^{(k)})Q_i(z_1^{(k+1)}, \ldots, z_{i-1}^{(k+1)}, z_i^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}), \qquad 1 \le i \le n, \quad k \ge 0 \tag{2.2}$$

または、

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \omega P(z_i^{(k)})\hat{Q}_i(z_1^{(k+1)}, \ldots, z_{i-1}^{(k+1)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}), \qquad 1 \le i \le n, \quad k \ge 0 \tag{2.3}$$

に対し、次の結果が成り立つ。

定理 2.1 (2.1) が *Traub* の意味で 少なくとも 2 次収束であれば、その *SOR* 型加速 (2.2), (2.3) は $|\omega - 1| < 1$ のとき $P(z) = 0$ の解 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に局所収束し、$|\omega - 1| > 1$ のとき発散する。局所的には $\omega = 1$ のとき最適である。

従って、D-K 法、Aberth 法、Tanabe 法、Nourein 法、Kjurkchiev-Andreev 法 (1992), 等 すべての全根同時型解法には 定理2.1 が適用可能であり、実計算の手法として、反復の初期値の段階では $\omega > 1$, 後半では、$\omega \fallingdotseq 1$ ととるのがよい。

§3. Mildly nonlinear equation への応用

R^n における方程式

$$Ax + \varphi(x) = 0, \qquad A : n\text{次行列},\ \varphi(x) = (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)) \tag{3.1}$$

に対するSOR 法とSOR-Newton 法を考える。A が M-行列、φ が R^n 上 isotone のとき、SOR 法が $0 < \omega < 2$ で局所収束、また $0 < \omega \le 1$ で 大域収束 ($\forall z^{(0)} \in R^n$ につき収束) することはよく知られている。次の結果が成り立つ。

定理 3.1 A を 正値対称行列、φ が R^n 上 *isotone* のとき、*SOR-Newton* 法は $0 < \omega < 2$ で局所収束、$0 < \omega \le 1$ で大域収束する。

また 次の結果が成り立つ。

定理 3.2 Aが 正値対称行列、$0 \le \varphi' \le \kappa$ のとき *SOR-Newton*法は

$$0 < \omega < \omega^* = \min_i \frac{2a_{ii}}{a_{ii} + \kappa}$$

において大域収束する。また、ωは 次の何れかの条件の下で、各ステップ毎、各成分毎に動かしてよい。

(a) $\varepsilon > 0$を与えられた定数として、$0 < \varepsilon \le \omega_i^{(k)} \le \omega^* - \varepsilon, \quad 1 \le i \le n.$ (k は充分大).

(b) $0 < \omega_i^{(k)} = \omega_i < \omega^*, \qquad 1 \le i \le n, \quad k \ge 0.$

特に Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \subset R^N \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

を離散化して生ずる方程式(3.1) においては $\varphi' = h^2 f'$ であるから、定理3.1 より、次のことが結論される: $0 \le f' \le M$ ならば SOR-Newton 法は

$$0 < \omega < \omega_h^* = \min_i \frac{2a_{ii}}{a_{ii} + h^2 M} = 2 - O(h^2)$$

において大域収束する。さらに、次のことも成り立つ。

定理 3.3 $0 \le f' \le M$ のとき、*SOR*型反復

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \omega \frac{\sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j \ge i} a_{ij} x_j^{(k)} + \varphi_i(x_i^{(k)})}{a_{ii} + h^2 M}, \qquad 1 \le i \le n$$

は $0 < \omega < 2$ において大域収束する。ωは 次の何れかの条件の下で動かしてよい。

(a) $0 < \varepsilon \le \omega_i^{(k)} \le \omega_h^* - \varepsilon, \quad 1 \le i \le n$ (k は充分大)

(b) $0 < \omega_i^{(k)} = \omega_i < 2, \qquad 1 \le i \le n, \quad k \ge 0.$

尚、φに関する条件を一般にして $\kappa_* \le \varphi' \le \kappa^*$ (κ_*, κ^* は定数) を仮定するときには、$\tilde{A} = A + \kappa_* I$ が 正値対称のとき、$\tilde{A}x + \psi(x) = 0, \quad \psi(x) = \varphi(x) - \kappa_* x$ として 定理3.1–3.3 を適用すればよい。

(附記) 本稿は 1995 年 10 月 27 日における山本の講演内容に手を加え、その後 著者達との交流により得られた研究成果を追加したものである。

文献

[1] S.Kanno, N.V.Kjurkchiev, T.Yamamoto, On some methods for the simultaneous determination of polynomial zeros, Japan JIAM (掲載予定)

[2] T.Yamamoto, SOR-like methods for the simultaneous determination of polynomial zeros, Proceedings of IMACS-GAMM symposium held in Oldenburg, 1995 (Herzberger編, Elsevierより 1996年4月出版予定)

[3] T.Yamamoto, On nonlinear SOR-like methods, I – Applications to simultaneous methods for polynomial zeros, Japan JIAM (掲載予定)

[4] K.Ishihara, Y.Muroya, T.Yamamoto, On nonlinear SOR-like methods, II – Convergence of the SOR-Newton method for mildly nonlinear equations (準備中)