数理解析研究所講究録
944 巻 1996 年 177-185

順序付き改良 SOR 法とその応用

早大理工　石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)
早大理工　室谷義昭　(Yoshiaki Muroya)

最近、H.Han ら [6] と H.C.Elman ら [5] は Gauss-Seidel 法について未知数の分割と順序付けに関する研究を行っており、離散移流拡散方程式の一次元及び二次元の問題に対して自動的な分割と順序付けの仕方を示している。また D.B.Russel, P.H.Brazier, J.C.Strikwerda, L.W.Ehrlich [3],[4] らはそれぞれ二次元の問題に対する格子点ごとの緩和係数の特別な選び方を与えている。

そこで非対称行列を係数行列とする連立方程式を実際に解く場合 ([1],[2] 参照) の非対称性を利用した有効な計算法として順序付き改良 SOR 法を提案した ([7]-[11] 参照)。今回はこの手法をブロック三重対角行列に適用した“適応的順序付きブロック改良 SOR 法”を考える。

この手法は緩和係数を各ブロックごとのみならず、各反復に対しても変える手法であり、さらに有効な順序付けを考慮することにより、対称性のある問題に対しても非常に有効性を発揮する。ここではこの手法の理論付けと誤差解析及び数値実験例を示す。

1　適応的順序付きブロック改良 SOR 法

連立方程式 $A\boldsymbol{z}=\boldsymbol{b}$ を考える。ここで A は次のような $n\times n$ ブロック三重対角行列であり、

$$A=[-L_j,P_j,-U_j]=\begin{pmatrix} P_1 & -U_1 & & & \\ -L_2 & P_2 & -U_2 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -L_{n-1} & P_{n-1} & -U_{n-1} \\ \text{\Large 0} & & & -L_n & P_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

P_j,L_j,U_j はすべて $q\times q$ 行列、$\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_n)^T$, $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)^T$ の各 $\boldsymbol{z}_j$, $\boldsymbol{b}_j$ は q 列ベクトルとする。このとき $A\boldsymbol{z}=\boldsymbol{b}$ は次のブロック連立方程式で表せる。

$$\begin{cases} -L_j\boldsymbol{z}_{j-1}+P_j\boldsymbol{z}_j-U_j\boldsymbol{z}_{j+1}=\boldsymbol{b}_j, & 1\le j\le n \\ \boldsymbol{z}_0=\boldsymbol{z}_{n+1}=0 \end{cases} \tag{2}$$

(2) に対して、新しい反復法“適応的順序付きブロック改良 SOR 法”を次のように提案する。

$$\begin{cases} P_j\tilde{\boldsymbol{z}}_j^{(m+1)}=L_j\boldsymbol{z}_{j-1}^{(m+1)}+U_j\boldsymbol{z}_{j+1}^{(m)}+\boldsymbol{b}_j, & \boldsymbol{z}_0^{(m+1)}=\boldsymbol{z}_{n+1}^{(m)}=0 \\ \boldsymbol{z}_j^{(m+1)}=\boldsymbol{z}_j^{(m)}+\omega_j^{(m)}(\tilde{\boldsymbol{z}}_j^{(m+1)}-\boldsymbol{z}_j^{(m)}), & j=1,2,\cdots,n, \quad m=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

この手法は緩和係数 $\omega_j^{(m)}$ をブロック毎のみならず、各反復に対しても変える反復法である。

ここでこの手法に関する幾つかの定義と定理を示しておく。

定義 1.1 $j=1,2,\cdots,n$ に対し、p の有理式 $L_j(p),P_j(p),U_j(p)$ と $q\times q$ 行列 P が存在し、$L_j=L_j(P)$, $P_j=P_j(P)$, $U_j=U_j(P)$ と表せるとき、$n\times n$ ブロック三重対角行列 $A=[-L_j,P_j,-U_j]$ は行列 P により三重対角行列に分解可能であるという。

特に、行列 A が行列 P により三重対角行列に分解可能であり、P の $Jordan$ 標準形が対角行列であるならば、行列 A は狭義の意味で行列 P により三重対角行列に分解可能であるという。([12],[13] 参照)

ここで、[9] で既に得られている 2 つの定理を示す。

定理 1.1 $n\times n$ ブロック三重対角行列 $A=[-L_j,P_j,-U_j]$ が $q\times q$ 行列 P により三重対角行列に分解可能であるならば、連立方程式 $A\boldsymbol{z}=\boldsymbol{b}$ は次の方程式と同等である。ここで $\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{z}_j]$, $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{b}_j]$, $\boldsymbol{z}_j$ と $\boldsymbol{b}_j$ は q 列ベクトルであり、行列 P の相異なる固有値 $\bar{p}_k$ の重複度を ν_k, $k=1,2,\cdots,s$ とする。

$$\bar{A}^k_{i,i}\bar{\boldsymbol{z}}^k_i+\bar{A}^k_{i,i+1}\bar{\boldsymbol{z}}^k_{i+1}+\cdots+\bar{A}^k_{i,\nu_k}\bar{\boldsymbol{z}}^k_{\nu_k}=\bar{\boldsymbol{b}}^k_i,\quad i=1,2,\cdots,\nu_k,\quad k=1,2,\cdots,s \tag{3}$$

ここで

$$\begin{cases}\bar{A}^k_{i,i}=[-L_j(\bar{p}_k),P_j(\bar{p}_k),-U_j(\bar{p}_k)]\\ \bar{A}^k_{i,i+1}=\left[-\dfrac{L'_j(\bar{p}_k)}{1!},\dfrac{P'_j(\bar{p}_k)}{1!},-\dfrac{U'_j(\bar{p}_k)}{1!}\right]\\ \vdots\\ \bar{A}^k_{i,\nu_k}=\left[-\dfrac{L_j^{(\nu_k-i)}(\bar{p}_k)}{(\nu_k-i)!},\dfrac{P_j^{(\nu_k-i)}(\bar{p}_k)}{((\nu_k-i)!},-\dfrac{U_j^{(\nu_k-i)}(\bar{p}_k)}{(\nu_k-i)!}\right]\end{cases}$$

は $n\times n$ 三重対角行列であり、[9] の補題 5.1 で定義される $\boldsymbol{v}_{1,1},\boldsymbol{v}_{1,2},\cdots,\boldsymbol{v}_{1,\nu_1},\boldsymbol{v}_{2,1},\cdots,\boldsymbol{v}_{2,\nu_2},\cdots,\boldsymbol{v}_{s,1},\cdots,\boldsymbol{v}_{s,\nu_s}$ は一次独立で、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}_j&=\bar{z}_j^{1,1}\boldsymbol{v}_{1,1}+\bar{z}_j^{1,2}\boldsymbol{v}_{1,2}+\cdots+\bar{z}_j^{1,\nu_1}\boldsymbol{v}_{1,\nu_1}+\bar{z}_j^{2,1}\boldsymbol{v}_{2,1}+\cdots\\&\quad+\bar{z}_j^{2,\nu_2}\boldsymbol{v}_{2,\nu_2}+\cdots+\bar{z}_j^{s,1}\boldsymbol{v}_{s,1}+\cdots+\bar{z}_j^{s,\nu_s}\boldsymbol{v}_{s,\nu_s}\\ \boldsymbol{b}_j&=\bar{b}_j^{1,1}\boldsymbol{v}_{1,1}+\bar{b}_j^{1,2}\boldsymbol{v}_{1,2}+\cdots+\bar{b}_j^{1,\nu_1}\boldsymbol{v}_{1,\nu_1}+\bar{b}_j^{2,1}\boldsymbol{v}_{2,1}+\cdots\\&\quad+\bar{b}_j^{2,\nu_2}\boldsymbol{v}_{2,\nu_2}+\cdots+\bar{b}_j^{s,1}\boldsymbol{v}_{s,1}+\cdots+\bar{b}_j^{s,\nu_s}\boldsymbol{v}_{s,\nu_s}\end{aligned}$$

$\bar{\boldsymbol{z}}^k_t=(\bar{z}_1^{k,t},\bar{z}_2^{k,t},\cdots,\bar{z}_n^{k,t})^T$, $1\le t\le\nu_k$, $\bar{\boldsymbol{b}}^k_i=(\bar{b}_1^{k,i},\bar{b}_2^{k,i},\cdots,\bar{b}_n^{k,i})^T$ である。

特に、$n\times n$ ブロック三重対角行列 $A=[-L_j,P_j,-U_j]$ が狭義の意味で $q\times q$ 行列 P により三重対角行列に分解可能であるならば、$A\boldsymbol{z}=\boldsymbol{b}$ は次の方程式と同等である([12],[13] 参照)。

$$\bar{A}^k\bar{\boldsymbol{z}}^k=\bar{\boldsymbol{b}}^k,\qquad k=1,2,\cdots,q \tag{4}$$

ここで $\bar{A}^k=[-L_j(\bar{p}_k),P_j(\bar{p}_k),-U_j(\bar{p}_k)]$ は $n\times n$ 三重対角行列であり、行列 P の固有値 $\bar{p}_k$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_k$, $k=1,2,\cdots,q$ に対し、

$$\boldsymbol{z}_j=\bar{z}_j^1\boldsymbol{v}_1+\bar{z}_j^2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\bar{z}_j^q\boldsymbol{v}_q,\qquad \boldsymbol{b}_j=\bar{b}_j^1\boldsymbol{v}_1+\bar{b}_j^2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\bar{b}_j^q\boldsymbol{v}_q$$

で表される。ただし $\bar{\boldsymbol{z}}^k=\left(\bar{z}_1^k,\cdots,\bar{z}_n^k\right)^T$, $\bar{\boldsymbol{b}}^k=\left(\bar{b}_1^k,\cdots,\bar{b}_n^k\right)^T$ は n 列ベクトルである。

(3) の $i=\nu_k,\nu_k-1,\cdots,1$ の順に $\bar{z}^k_{\nu_k},\bar{z}^k_{\nu_k-1},\cdots,\bar{z}^k_{i+1}$ が既知ならば、$\bar{z}^k_i$ に対する方程式 (3) はその非斉次項 $\bar{\boldsymbol{b}}^k$ が既知である方程式 (4) と同じとみなせる。

定理 1.2 $n \times n$ ブロック三重対角行列 $A = [-L_j, P_j, -U_j]$ が正則な $q \times q$ 行列 P により三重対角行列に分解可能であるならば、$q \times q$ 単位行列 I_q と $\Phi^{(m)} = \mathrm{diag}(\omega_1^{(m)} I_q, \omega_2^{(m)} I_q, \cdots, \omega_n^{(m)} I_q)$ に対して、(2) に対する適応的順序付きブロック改良 SOR 法は自然な順序をとる場合、

$$\left.\begin{array}{ll} P_j \tilde{\boldsymbol{z}}_j^{(m+1)} = L_j \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m+1)} + U_j \boldsymbol{z}_{j+1}^{(m)} + \boldsymbol{b}_j, & j = 1, 2, \cdots, n, \\ \boldsymbol{z}_j^{(m+1)} = \boldsymbol{z}_j^{(m)} + \omega_j^{(m)} (\tilde{\boldsymbol{z}}_j^{(m+1)} - \boldsymbol{z}_j^{(m)}), & \boldsymbol{z}_0^{(m+1)} = \boldsymbol{z}_{n+1}^{(m)} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \end{array}\right\} \quad (5)$$

は次の方程式と同等である。

$$\left.\begin{array}{l} P_j(\bar{p}_k) \tilde{\bar{z}}_{j,(k,i)}^{(m+1)} = L_j(\bar{p}_k) z_{j-1,(k,i)}^{(m+1)} + U_j(\bar{p}_k) z_{j+1,(k,i)}^{(m)} + \tilde{b}_j^{k,i}, \quad \bar{z}_{0,(k,i)}^{(m+1)} = \bar{z}_{n+1,(k,i)}^{(m)} = 0, \\ \tilde{b}_j^{k,i} = \bar{b}_j^{k,i} + \displaystyle\sum_{t=i+1}^{\nu_k} \left\{ \frac{L_j^{(t-i)}(\bar{p}_k)}{(t-i)!} \bar{z}_{j-1,(k,t)}^{(m+1)} - \frac{P_j^{(t-i)}(\bar{p}_k)}{(t-i)!} \bar{z}_{j,(k,t)}^{(m)} + \frac{U_j^{(t-i)}(\bar{p}_k)}{(t-i)!} \bar{z}_{j+1,(k,t)}^{(m)} \right\} \\ \tilde{\bar{z}}_{j,(k,i)}^{(m+1)} = \bar{z}_{j,(k,i)}^{(m)} + \omega_j^{(m)} (\tilde{\bar{z}}_{j,(k,i)}^{(m+1)} - \bar{z}_{j,(k,i)}^{(m)}), \qquad j = 1, 2, \cdots, n \\ \qquad i = \nu_k, \nu_k - 1, \cdots, 1, \qquad k = 1, 2, \cdots, s, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \end{array}\right\} \quad (6)$$

ここに
$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_j^{(m)} &= \bar{z}_{j,(1,1)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{1,1} + \bar{z}_{j,(1,2)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{1,2} + \cdots + \bar{z}_{j,(1,\nu_1)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{1,\nu_1} + \bar{z}_{j,(2,1)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{2,1} + \cdots \\ &\quad + \bar{z}_{j,(2,\nu_2)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{2,\nu_2} + \cdots + \bar{z}_{j,(s,1)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{s,1} + \cdots + \bar{z}_{j,(s,\nu_s)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{s,\nu_s} \\ \tilde{\boldsymbol{z}}_j^{(m)} &= \tilde{\bar{z}}_{j,(1,1)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{1,1} + \tilde{\bar{z}}_{j,(1,2)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{1,2} + \cdots + \tilde{\bar{z}}_{j,(1,\nu_1)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{1,\nu_1} + \tilde{\bar{z}}_{j,(2,1)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{2,1} + \cdots \\ &\quad + \tilde{\bar{z}}_{j,(2,\nu_2)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{2,\nu_2} + \cdots + \tilde{\bar{z}}_{j,(s,1)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{s,1} + \cdots + \tilde{\bar{z}}_{j,(s,\nu_s)}^{(m)} \boldsymbol{v}_{s,\nu_s} \end{aligned}$$

これは (3) 式に対する自然な順序をとる場合の適応的順序付き改良 SOR 法である。

特に、A が狭義の意味で行列 P により三重対角行列に分解可能ならば、(5) 式は次の方程式と同等である。

$$\left.\begin{array}{l} P_j(\bar{p}_k) \tilde{\bar{z}}_{j,k}^{(m+1)} = L_j(\bar{p}_k) \bar{z}_{j-1,k}^{(m+1)} + U_j(\bar{p}_k) \bar{z}_{j+1,k}^{(m)} + \bar{\boldsymbol{b}}_j^k, \\ \bar{z}_{j,k}^{(m+1)} = \bar{z}_{j,k}^{(m)} + \omega_j^{(m)} (\tilde{\bar{z}}_{j,k}^{(m+1)} - \bar{z}_{j,k}^{(m)}), \qquad j = 1, 2, \cdots, n, \\ \bar{z}_{0,k}^{(m+1)} = \bar{z}_{n+1,k}^{(m)} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, q, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \end{array}\right\} \quad (7)$$

ここに $\boldsymbol{z}_j^{(m)} = \bar{z}_{j,1}^{(m)} \boldsymbol{v}_1 + \bar{z}_{j,2}^{(m)} \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \bar{z}_{j,q}^{(m)} \boldsymbol{v}_q$, $\tilde{\boldsymbol{z}}_j^{(m)} = \tilde{\bar{z}}_{j,1}^{(m)} \boldsymbol{v}_1 + \tilde{\bar{z}}_{j,2}^{(m)} \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \tilde{\bar{z}}_{j,q}^{(m)} \boldsymbol{v}_q$ である。

これは (4) 式に対する自然な順序をとる場合の適応的順序付きブロック改良 SOR 法となっている。

適応的順序付きブロック改良 SOR 法の収束について次の実用的な定理が得られている。

定理 1.3 $n \times n$ ブロック三重対角行列 $A = [-L_j, P_j, -U_j]$ が $q \times q$ 行列 P により三重対角行列に分解可能であるとする。このとき行列 P の固有値 $\bar{p}_k$, $k = 1, 2, \cdots, q$ に対して

i) $0 < 4 \frac{L_{j+1}(\bar{p}_k) U_j(\bar{p}_k)}{P_{j+1}(\bar{p}_k) P_j(\bar{p}_k)} \cos^2 \frac{\pi}{n+1} < 1$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$, $k = 1, 2, \cdots, q$ ならば、$0 < \underline{\omega} \le \omega_j^{(m)} \le \bar{\omega} < 2$, $j = 1, 2, \cdots, n$, $m = 0, 1, 2, \cdots$ を満たす $\Phi^{(m)} = \mathrm{diag}(\omega_1^{(m)} I_q, \omega_2^{(m)} I_q, \cdots, \omega_n^{(m)} I_q)$ に対して、(5) を $\boldsymbol{z}^{(m+1)} = \mathcal{L}_{\Phi^{(m)}}^{block} \boldsymbol{z}^{(m)} + \boldsymbol{k}$ と表すとき $\rho(\mathcal{L}_{\Phi^{(m)}}^{block}) < 1$ となり (5) 式は収束する。

ii) $0 < 4\left|\frac{L_{j+1}(\bar{p}_k)U_j(\bar{p}_k)}{P_{j+1}(\bar{p}_k)P_j(\bar{p}_k)}\right| \leq 1,\quad j=1,2,\cdots,n-1,\quad k=1,2,\cdots,q$ ならば、

$$0 < \underline{\omega} \leq \omega_j^{(m)} \leq \bar{\omega}_j = \min_{1\leq k\leq q}\left\{\frac{2}{1+\sqrt{\left|\frac{L_j(\bar{p}_k)U_{j-1}(\bar{p}_k)}{P_j(\bar{p}_k)P_{j-1}(\bar{p}_k)}\right|}+\sqrt{\left|\frac{L_{j+1}(\bar{p}_k)U_j(\bar{p}_k)}{P_{j+1}(\bar{p}_k)P_j(\bar{p}_k)}\right|}}\right\},\quad \begin{array}{l} j=1,2,\cdots,n, \\ m=0,1,2,\cdots \end{array}$$

(ただし $\omega_j^{(m)} = \bar{\omega}_j,\ j=1,2,\cdots,n$ を除く) を満たす $\Phi^{(m)} = \mathrm{diag}(\omega_1^{(m)}I_q, \omega_2^{(m)}I_q, \cdots, \omega_n^{(m)}I_q)$ に対して、$\rho(\mathcal{L}_{\Phi^{(m)}}^{block}) < 1$ となり (5) 式は収束する。

系 1.1 $A = [-L_j, P_j, -U_j]$ は各 $L_j = l_j^y I_q,\ U_j = u_j^y I_q, P_j = P = [-l_i^x, 1, -u_i^x]$ が $q\times q$ 三重対角行列で $0 < l_{i+1}^x u_i^x \cos^2\frac{\pi}{q+1} < \frac{1}{16},\ i=1,2,\cdots,q-1$ である $n\times n$ ブロック三重対角行列とする。このとき $0 < l_{j+1}^y u_j^y \cos^2\frac{\pi}{n+1} < \frac{1}{16}$ ならば、$0 < \underline{\omega} \leq \omega_j^{(m)} \leq \bar{\omega} < 2,\ j=1,2,\cdots,n,\ m=0,1,2,\cdots$ に対して $\rho(\mathcal{L}_{\Phi^{(m)}}^{block}) < 1$ であり (5) 式は収束する。また $0 < |l_{j+1}^y u_j^y| \leq \frac{1}{16}$ ならば、$0 < \underline{\omega} \leq \omega_j^{(m)} \leq 1,\ j=1,2,\cdots,n,\ m=0,1,2,\cdots$ に対して $\rho(\mathcal{L}_{\Phi^{(m)}}^{block}) < 1$ であり (5) 式は収束する。

2 順序付けと緩和係数 $\omega_j^{(m)}$ の実用的な選び方

まず、$n\times n$ ブロック三重対角行列 $A = [-L_j, P_j, -U_j]$ に対する順序付けを考える。ここで $L_j = [0, l_y, 0] = l_y I_q,\ \ P_j = [-l_x, 2, -u_x],\ \ U_j = [0, u_y, 0] = u_y I_q$ はそれぞれ $q\times q$ 三重対角行列とし、I_q は $q\times q$ 単位行列、$\sqrt{l_x u_x} + \sqrt{l_y u_y} = 1,\ \ l_x u_x,\ l_y u_y > 0$ とする。

$\bar{l}^k = l_y,\ \bar{p}^k = 2-2\sqrt{l_x u_x}\cos\frac{k\pi}{n+1},\ \bar{u}^k = u_y$ とする $n\times n$ 三重対角行列 $\bar{A}^k = [-\bar{l}^k, \bar{p}^k, -\bar{u}^k]$ を係数行列とする連立方程式に対し、

$$\omega_{opt}^k = \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{l_y u_y}\cos\frac{k\pi}{n+1}}{2-2\sqrt{l_x u_x}\cos\frac{k\pi}{n+1}}\right)^2}}$$

を考えると $\quad \lambda_{opt}^k = \omega_{opt}^k - 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{l_y u_y}}\cdot\frac{2k\pi}{n} + \cdots,\quad k=1,2,\cdots \quad$ となり、

$\lambda_{opt}^k \fallingdotseq (\lambda_{opt}^1)^k$ である。

これらの考察の下で、適応的順序付きブロック改良 SOR 法に対し、次のような順序付けの選び方を提案する (例 3.1 及び 3.2 参照)。

順序付け

i) x と y 方向のどちらを選ぶかは λ_{opt}^k を小さくするように $l_x u_x$ と $l_y u_y$ の大きい方を選ぶ。例えば、$l_x u_x > l_y u_y > 0$ ならば x 方向、つまり自然な順序の行列 A を、$0 < l_x u_x < l_y u_y$ ならば y 方向、つまり行列 $\bar{P}^T A \bar{P}$ を選ぶ。ここに、$\bar{P} = [P_{i,j}]$ は $n\times n$ ブロック置換行列で $P_{i,j} = [p_{k,l}^{i,j}]$ は $q\times q$ 行列で $p_{k,l}^{i,j} = \delta_{k,j}\delta_{l,i}$ とする。

ii) 各方向での正順もしくは逆順のどちらを選ぶかは $|l_x|,\ |u_x|$ の大小かつ $|l_y|,\ |u_y|$ の大小による。例えば、$|l_x| > |u_x| > 0$ ならば正順を、$0 < |l_x| < |u_x|$ ならば逆順を選ぶ ([7]、[8] 参照)。

$n \times n$ 三重対角行列 A に対して、$\rho(\mathcal{L}_\Phi) = 0$ となる Case I_k), $1 \le k \le n$ ([8]-[10] 参照) の n 組の特別な $\Phi = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ を簡単に求めることができる。

ここで緩和係数 $\omega_j^{(m)}$, $j = 1, 2, \cdots, n$ の選び方と収束に必要な反復回数の関係を考える。

定理 2.1 ([10] の定理 2.1-2.3 参照) Case I_k), $2 \le k \le n-1$ において [10] の定理 2.2 と定理 2.3 のように正順でない [10] で定義された置換行列 P_k, Q_k により得られる 2 つの特別な順序付けをとると、m 反復後の誤差ベクトルは $m \ge \max(k, n-k+1)$ に対して 0 となる。一方、正順をとった Case I_n) の誤差ベクトル $\boldsymbol{e}^{(m)} = [e_j^{(m)}]$ に対して $\boldsymbol{e}_j^{(m)} = 0$, $j = n-m+1, n-m+2, \cdots, n$, $m = 1, 2, \cdots, n$ であり、また正順での Case I_1) に対しては $\boldsymbol{e}_j^{(m)} = (\omega_n l_n \omega_{n-1} l_{n-1} \cdots \omega_{j+1} l_{j+1})^{-1} \boldsymbol{e}_n^{(m)}$, $j = n-m, n-m+1, \cdots, n-1$, $m = 1, 2, \cdots, n-1$ となる。

次に、定理 2.1 を用いて (5) 式が有限回で収束するような緩和係数 $\omega_j^{(m)}$ の選び方の例を 3 つ提案する。

簡単のため次の仮定をする。$n \times n$ ブロック三重対角行列 $A = [-L_j, P_j, -U_j]$ は狭義の意味で $q \times q$ 行列 P により三重対角行列に分解可能であり、行列 P の相異なる固有値を $\bar{p}_k$, $k = 1, 2, \cdots, q$ とし $P\boldsymbol{v}_k = \bar{p}_k \boldsymbol{v}_k$, $k = 1, 2, \cdots, q$ とする。

定理 2.2 以上の仮定の下で、$(k-1)n + 1 \le m \le kn$ に対して $\omega_j^{(m)} = \bar{\omega}_j^{(k)}$, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le q$ にとる。ここで

$$\bar{\omega}_1^{(k)} = 1, \quad \bar{\omega}_j^{(k)} = \frac{1}{1 - \frac{L_j(\bar{p}_k)}{P_j(\bar{p}_k)} \bar{\omega}_{j-1}^{(k)} \frac{U_{j-1}(\bar{p}_k)}{P_{j-1}(\bar{p}_k)}}, \quad j = 2, 3, \cdots, n, \quad k = 1, 2, \cdots, q$$

このとき、自然な順序をとる反復 (5) を考えると $m = (k-1)n + \bar{j}$, $1 \le k \le q$, $1 \le \bar{j} \le n$ に対して

$$\begin{aligned} \bar{e}_{j,l}^{(m)} &= 0, \quad l = 1, 2, \cdots, k-1, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \\ \bar{e}_{j,k}^{(m)} &= 0, \quad j = n - \bar{j} + 1, n - \bar{j} + 2, \cdots, n \end{aligned}$$

かつ $m = qn$ に対して $\boldsymbol{e}^{(m)} = 0$ となる。ここに

$$\boldsymbol{e}_j^{(m)} = \boldsymbol{z}_j^{(m)} - \hat{\boldsymbol{z}}_j = \bar{e}_{j,1}^{(m)} \boldsymbol{v}_1 + \bar{e}_{j,2}^{(m)} \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \bar{e}_{j,q}^{(m)} \boldsymbol{v}_q, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

もし $0 < 4 \frac{L_{j+1}(\bar{p}_k) U_j(\bar{p}_k)}{P_{j+1}(\bar{p}_k) P_j(\bar{p}_k)} \cos^2 \frac{\pi}{n+1} < 1$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$, $k = 1, 2, \cdots, q$ ならば、$0 < \bar{\omega}_j^{(k)} < 2$, $j = 1, 2, \cdots, n$ かつ $\rho(\mathcal{L}_{\Phi(m)}^{block}) < 1$ となる。

	1	2	3	$\cdots$	n	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$2n$	$2n+1$	$\cdots$
$z_1^{(m)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(2)}$	$\bar{\omega}_1^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_1^{(2)}$	$\bar{\omega}_1^{(3)}$	$\cdots$
$z_2^{(m)}$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\bar{\omega}_2^{(2)}$	$\bar{\omega}_2^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_2^{(2)}$	$\bar{\omega}_2^{(3)}$	$\cdots$
$z_3^{(m)}$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\bar{\omega}_3^{(2)}$	$\bar{\omega}_3^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_3^{(2)}$	$\bar{\omega}_3^{(3)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$z_n^{(m)}$	$\bar{\omega}_n^{(1)}$	$\bar{\omega}_n^{(1)}$	$\bar{\omega}_n^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_n^{(1)}$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\bar{\omega}_n^{(3)}$	$\cdots$

定理 2.3 上の仮定の下で $m = (k-1)(n+1) + \bar{j}$, $1 \le k \le [\frac{q+1}{2}]$, $1 \le j \le n+1$ に対して

$$\begin{aligned} \omega_j^{(m)} &= \bar{\omega}_j^{(2k-1)}, && 1 \le j \le (n+1) - \bar{j} \\ \omega_j^{(m)} &= \bar{\omega}_j^{(2k)}, && (n+1) - \bar{j} + 1 \le j \le n, \quad 1 \le k \le [\tfrac{q}{2}] \\ \omega_j^{(m)} &= \bar{\omega}_j^{(q)}, && (n+1) - \bar{j} + 1 \le j \le n, \quad k = [\tfrac{q+1}{2}] \end{aligned}$$

にとる。ここで

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1^{(2k-1)} = 1,\ \bar{\omega}_j^{(2k-1)} = \frac{1}{1-\frac{L_j(\bar{p}_{2k-1})}{P_j(\bar{p}_{2k-1})}\bar{\omega}_{j-1}^{(2k-1)}\frac{U_{j-1}(\bar{p}_{2k-1})}{P_{j-1}(\bar{p}_{2k-1})}}, & j=2,3,\cdots,n, \quad k=1,2,\cdots,[\frac{q+1}{2}] \\ \bar{\omega}_n^{(2k)} = 1,\ \bar{\omega}_j^{(2k)} = \frac{1}{1-\frac{U_j(\bar{p}_{2k})}{P_j(\bar{p}_{2k})}\bar{\omega}_{j+1}^{(2k)}\frac{L_{j+1}(\bar{p}_{2k})}{P_{j+1}(\bar{p}_{2k})}}, & j=n-1,n-2,\cdots,1, \quad k=1,2,\cdots,[\frac{q}{2}] \end{cases}$$

このとき、自然な順序をとる反復 (5) を考えると $m=(k-1)(n+1)+\bar{j},\ 1 \le k \le [\frac{q+1}{2}],\ 1 \le \bar{j} \le n+1$ に対して

$$\begin{array}{lll} \bar{e}_{j,l}^{(m)} = 0, & l=1,2,\cdots,2(k-1), & j=1,2,\cdots,n \\ \bar{e}_{j,2k-1}^{(m)} = 0, & (n+1)-\bar{j} \le j \le n, & \bar{e}_{j,2k}^{(k(n+1))} = 0, \quad 1 \le k \le [\frac{q}{2}] \end{array}$$

及び $m=[\frac{q+1}{2}](n+1)-(q-2[\frac{q}{2}])$ に対して $\boldsymbol{e}^{(m)}=0$ となる。ここに

$$\boldsymbol{e}_j^{(m)} = \boldsymbol{z}_j^{(m)} - \hat{\boldsymbol{z}}_j = \bar{e}_{j,1}^{(m)}\boldsymbol{v}_1 + \bar{e}_{j,2}^{(m)}\boldsymbol{v}_2 + \bar{e}_{j,3}^{(m)}\boldsymbol{v}_3 + \bar{e}_{j,4}^{(m)}\boldsymbol{v}_4 + \cdots + \bar{e}_{j,q}^{(m)}\boldsymbol{v}_q, \quad j=1,2,\cdots,n$$

である。

もし $0 < 4\frac{L_{j+1}(\bar{p}_k)U_j(\bar{p}_k)}{P_{j+1}(\bar{p}_k)P_j(\bar{p}_k)}\cos^2\frac{\pi}{n+1} < 1,\quad j=1,2,\cdots,n-1,\quad k=1,2,\cdots,q$ ならば、$0 < \bar{\omega}_j^{(k)} < 2,\ j=1,2,\cdots,n$ かつ $\rho(\mathcal{L}_{\Phi^{(m)}}^{block}) < 1$ となる。

	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\cdots$	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	$\cdots$
$z_1^{(m)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(2)}$	$\bar{\omega}_1^{(3)}$	$\bar{\omega}_1^{(3)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_1^{(3)}$	$\bar{\omega}_1^{(3)}$	$\bar{\omega}_1^{(4)}$	$\cdots$
$z_2^{(m)}$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\bar{\omega}_2^{(2)}$	$\bar{\omega}_2^{(2)}$	$\bar{\omega}_2^{(3)}$	$\bar{\omega}_2^{(3)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_2^{(3)}$	$\bar{\omega}_2^{(4)}$	$\bar{\omega}_2^{(4)}$	$\cdots$
$z_3^{(m)}$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_3^{(2)}$	$\bar{\omega}_3^{(2)}$	$\bar{\omega}_3^{(2)}$	$\bar{\omega}_3^{(3)}$	$\bar{\omega}_3^{(3)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_3^{(4)}$	$\bar{\omega}_3^{(4)}$	$\bar{\omega}_3^{(4)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$z_{n-1}^{(m)}$	$\vdots$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(1)}$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(2)}$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(2)}$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(2)}$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(3)}$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(3)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(4)}$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(4)}$	$\bar{\omega}_{n-1}^{(4)}$	$\cdots$
$z_n^{(m)}$	$\bar{\omega}_n^{(1)}$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\bar{\omega}_n^{(3)}$	$\bar{\omega}_n^{(4)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_n^{(4)}$	$\bar{\omega}_n^{(4)}$	$\bar{\omega}_n^{(4)}$	$\cdots$

定理 2.4 $1 \le \bar{k} \le n$ となる $\bar{k}$ を定め $\bar{k}_1 = \max(\bar{k}, n-\bar{k}+1)$ とする。上の仮定の下で $(k-1)\bar{k}_1 + 1 \le m \le k\bar{k}_1$ に対して $\omega_j^{(m)} = \bar{\omega}_j^{(k)},\ 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le q$ にとる。ここで

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1^{(k)} = 1, \quad \bar{\omega}_j^{(k)} = \frac{1}{1-\frac{L_j(\bar{p}_k)}{P_j(\bar{p}_k)}\bar{\omega}_{j-1}^{(k)}\frac{U_{j-1}(\bar{p}_k)}{P_{j-1}(\bar{p}_k)}}, & j=2,3,\cdots,\bar{k}-1, \\ \bar{\omega}_n^{(k)} = 1, \quad \bar{\omega}_j^{(k)} = \frac{1}{1-\frac{L_j(\bar{p}_k)}{P_j(\bar{p}_k)}\bar{\omega}_{j+1}^{(k)}\frac{U_{j+1}(\bar{p}_k)}{P_{j+1}(\bar{p}_k)}}, & j=n-1,n-2,\cdots,\bar{k}+1, \\ \bar{\omega}_{\bar{k}}^{(k)} = \frac{1}{1-\frac{L_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}{P_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}\bar{\omega}_{\bar{k}-1}^{(k)}\frac{U_{\bar{k}-1}(\bar{p}_k)}{P_{\bar{k}-1}(\bar{p}_k)} - \frac{U_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}{P_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}\bar{\omega}_{\bar{k}+1}^{(k)}\frac{L_{\bar{k}+1}(\bar{p}_k)}{P_{\bar{k}+1}(\bar{p}_k)}} & \end{cases}$$

このとき [10] で定義された置換行列 Q_k により得られる特別な順序付けをとる (5) に対応する反復を考えると $m=(k-1)\bar{k}_1+\bar{j},\ 1 \le k \le q,\ 1 \le \bar{j} \le \bar{k}_1$ に対して、

$$\begin{array}{ll} \bar{e}_{j,l}^{(m)} = 0, & l=1,2,\cdots,k-1, \quad j=1,2,\cdots,n, \\ \bar{e}_{j,k}^{(m)} = 0, & j=\bar{k}-\bar{j}+1, \bar{k}-\bar{j}+2, \cdots, \bar{k}+\bar{j}-1 \end{array}$$

かつ $m=q\bar{k}_1$ に対して $\boldsymbol{e}^{(m)}=0$ となる。ここに

$$\boldsymbol{e}_j^{(m)} = \boldsymbol{z}_j^{(m)} - \hat{\boldsymbol{z}}_j = \bar{e}_{j,1}^{(m)}\boldsymbol{v}_1 + \bar{e}_{j,2}^{(m)}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \bar{e}_{j,q}^{(m)}\boldsymbol{v}_q, \quad j=1,2,\cdots,n$$

である。

もし、$0 < 4\frac{L_{j+1}(\bar{p}_k)U_j(\bar{p}_k)}{P_{j+1}(\bar{p}_k)P_j(\bar{p}_k)}\cos^2\frac{\pi}{n+1} < 1,\ \ j = 1,2,\cdots,n-1,\ \ k = 1,2,\cdots,q$ のとき $\max_k|\frac{L_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}{P_{\bar{k}}(\bar{p}_k)} + \frac{U_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}{P_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}| < \frac{2}{3}$ ならば、$0 < \bar{\omega}_j^{(k)} < 2,\ j = 1,2,\cdots,n$ かつ $\rho(\mathcal{L}_{\Phi(m)}^{block}) < 1$ である（[11] の定理 2.6 参照）。

特に $\max_k|\frac{L_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}{P_{\bar{k}}(\bar{p}_k)} + \frac{U_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}{P_{\bar{k}}(\bar{p}_k)}| \geq \frac{2}{3}$ で $\omega_{\bar{k}}^{(m)} \notin (0,2)$ の場合は [10] で定義された置換行列 Q_k による特別な順序付けの (5) に対応する反復により得られる $\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{k}}^{(m+1)}$ と $m = (k-1)\bar{k}_1 + \bar{j},\ 1 \leq k \leq q,\ 1 \leq \bar{j} \leq \bar{k}_1$ に対し、

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{z}}}_{\bar{k}}^{(m+1)} = \tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{k}}^{(m+1)} + (1-\omega_{\bar{k}}^{(m)})(\boldsymbol{z}_{\bar{k}}^{(m)} - \tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{k}}^{(m+1)}, \boldsymbol{v}_k)/\|\boldsymbol{v}_k\|^2$$

ただし、$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ は内積 $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}$ で $\|\boldsymbol{v}\|^2 = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ とする。これと $\tilde{\omega}_{\bar{k}}^{(m)} = (\omega_{\bar{k}-1}^{(m)} + \omega_{\bar{k}+1}^{(m)})/2$ で定まる $\tilde{\tilde{\boldsymbol{z}}}_{\bar{k}}^{(m+1)}$ と $\tilde{\omega}_{\bar{k}}^{(m)}$ に対し、$\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{k}}^{(m+1)} = \tilde{\omega}_{\bar{k}}^{(m)}\tilde{\tilde{\boldsymbol{z}}}_{\bar{k}}^{(m+1)} + (1-\tilde{\omega}_{\bar{k}}^{(m)})\boldsymbol{z}_{\bar{k}}^{(m)}$ と修正する。この修正をしないと反復回数が増大する。

	1	2	3	$\cdots$	$[\frac{n}{2}]+1$	$[\frac{n}{2}]+2$	$[\frac{n}{2}]+3$	$\cdots$	$2([\frac{n}{2}]+1)$	$2([\frac{n}{2}]+1)+1$	$\cdots$
$z_1^{(m)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_1^{(1)}$	$\bar{\omega}_1^{(2)}$	$\bar{\omega}_1^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_1^{(2)}$	$\bar{\omega}_1^{(3)}$	$\cdots$
$z_2^{(m)}$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_2^{(1)}$	$\bar{\omega}_2^{(2)}$	$\bar{\omega}_2^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_2^{(2)}$	$\bar{\omega}_2^{(3)}$	$\cdots$
$z_3^{(m)}$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_3^{(1)}$	$\bar{\omega}_3^{(2)}$	$\bar{\omega}_3^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_3^{(2)}$	$\bar{\omega}_3^{(3)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$z_n^{(m)}$	$\bar{\omega}_n^{(1)}$	$\bar{\omega}_n^{(1)}$	$\bar{\omega}_n^{(1)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_n^{(1)}$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\cdots$	$\bar{\omega}_n^{(2)}$	$\bar{\omega}_n^{(3)}$	$\cdots$

行列 P の固有値 $\bar{p}_k$ が重複度 $\nu_k > 1$ を持つ場合についても同様な議論ができる。

3　数値実験例

ここで数値実験例を示す。簡単のためすべての例題において $n\times n$ ブロック三重対角行列 $A = [-L, P, -U]$ を係数行列とする連立方程式 $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$ を考え、ここに $L = [0, l_y, 0]$, $P = [-l_x, 2, -u_x]$, $U = [0, u_y, 0]$ は $n\times n$ 三重対角行列とする。連立方程式の解を $\hat{\boldsymbol{z}} = (\hat{\boldsymbol{z}}_1, \hat{\boldsymbol{z}}_2, \cdots, \hat{\boldsymbol{z}}_n)^T$, $\hat{\boldsymbol{z}}_j = (\hat{z}_{1,j}, \hat{z}_{2,j}, \cdots, \hat{z}_{n,j})^T$, $\hat{z}_{i,j} = 1$, $i,j = 1,2,\cdots,n$、出発ベクトルを $\boldsymbol{z}^{(0)} = (\boldsymbol{z}_1^{(0)}, \boldsymbol{z}_2^{(0)}, \cdots, \boldsymbol{z}_n^{(0)})^T$, $\boldsymbol{z}_j^{(0)} = (z_{1,j}^{(0)}, z_{2,j}^{(0)}, \cdots, z_{n,j}^{(0)})^T$, $z_{i,j}^{(0)} = 0$, $i,j = 1,2,\cdots,n$ とし、$\boldsymbol{e}^{(m)} = \boldsymbol{z}^{(m)} - \hat{\boldsymbol{z}}$ の各成分が許容誤差限界 $\delta = 10^{-8}$ よりも小さくなるまで反復させたときの反復回数 m を比較する。（誤差解析は離散フーリエ解析が適用でき、ここでは解 $z_{i,j} = 1$ で 1 の離散フーリエ級数は

$$1 = a_1\sin\pi x + a_3\sin 3\pi x + a_5\sin 5\pi x + \cdots$$
$$a_1 = 1.264573231231\cdots,\quad a_3 = 0.3981262841799\cdots,\quad a_5 = 0.2098293673696\cdots$$

であるので、P の固有値 $\bar{p}_k = 2 - 2\sqrt{l_x u_x}\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1,2,\cdots$ に対し、緩和係数を選ぶ順序は $\bar{\omega}_j^{(1)}, \bar{\omega}_j^{(3)}, \bar{\omega}_j^{(5)}, \bar{\omega}_j^{(7)}, \cdots$ としている。）

例 3.1　非対称な $n\times n$ ブロック三重対角行列 A に対して、自然な順序をとる [9] の順序付きブロック改良 SOR 法を適用し、順序付けの選び方と反復回数の関係を調べる。

通常のブロック SOR 法における最適緩和係数 $\omega = \omega_{opt}$ を用いた場合の反復回数を $m_{\omega_{opt}}$、緩和係数を $\omega = \omega_j$, $j = 1,2,\cdots,n$ とブロックごとに変えた場合の反復回数を m_{ω_j} とする。

表 3.1 における (l_x, l_y) の 4 通りの取り方は 2 節の順序付けに対応しており、$l_x = 0.8$, $u_x = 0.2$, $l_y = 0.9$, $u_y = 0.1$ のとき $l_x > u_x$, $l_y > u_y$ かつ $l_x u_x = 0.16 > l_y u_y = 0.09$ なの

で、2節で提案した順序付けの選び方の通りになっており、反復回数はこの場合が最も少なくなっている。（この例では $m_{\omega_{opt}}$ と m_{ω_i} は同じ値をとっている。）

表 3.1 $l_x \neq l_y$, $l_x + u_x = 1$, $l_y + u_y = 1$, $\delta = 10^{-8}$ **のときの反復回数**

(l_x, l_y)	(0.8, 0.9)		(0.9, 0.8)		(0.2, 0.1)		(0.1, 0.2)	
n	$m_{\omega_{opt}}$	m_{ω_i}	$m_{\omega_{opt}}$	m_{ω_i}	$m_{\omega_{opt}}$	m_{ω_i}	$m_{\omega_{opt}}$	m_{ω_i}
50	16	16	27	27	62	63	67	68
100	23	23	40	40	120	120	128	128
150	29	29	52	52	176	176	187	187
200	34	34	63	62	231	231	245	245
250	38	38	73	73	286	286	303	303

例 3.2 対称な $n \times n$ ブロック三重対角行列 A に対して、定理2.2の適応的順序付きブロック改良SOR法を適用する。

表 3.2 $l_x = u_x$, $l_y = u_y$, $\delta = 10^{-8}$ **のときの反復回数**

(l_x, l_y)	(0.1, 0.9)			(0.9, 0.1)			(0.4, 0.6)			(0.6, 0.4)		
n	$m_{\omega_{opt}}$	m_{ω_j}	$m_{\omega_j^{1,3}}$	$m_{\omega_{opt}}$	m_{ω_j}	$m_{\omega_j^{1,3}}$	$m_{\omega_{opt}}$	m_{ω_j}	$m_{\omega_j^{1,3}}$	$m_{\omega_{opt}}$	m_{ω_j}	$m_{\omega_j^{1,3}}$
50	181	184	124	71	63	57	150	139	89	125	106	78
100	358	371	248	140	125	112	297	276	177	246	209	154
150	535	552	372	209	186	167	443	411	265	368	313	230
200	712	736	495	278	248	224	590	547	353	490	416	307
250	890	920	619	347	310	281	737	683	441	612	520	383

$m_{\omega_{opt}}$ と m_{ω_i} に対し、ブロックごと及び n 回の反復ごとに緩和係数を $\bar{\omega}_j^{(1)}, \bar{\omega}_j^{(3)}, \cdots$ と変える定理2.2の場合の反復回数を $m_{\omega_j^{1,3}}$ と表す。

この表から2節の $l_x u_x > l_y u_y > 0$ となる順序付けが大切なことがわかる。加えて $m_{\omega_{opt}}$ および m_{ω_j} の場合と比較してみると、反復ごとに緩和係数を変化させる $m_{\omega_j^{1,3}}$ の方が収束をさらに早めている。

例 3.3 対称なブロック三重対角行列 A に対して適応的ブロック改良SOR法を適用する。これは五点公式の例題である。

表 3.3 $l_x = u_x = l_y = u_y = 0.5$, $\delta = 10^{-8}$ **のときの反復回数**

n	$m_{\omega_{opt}}$	m_{ω_j}	$m_{\omega_j^{1,3}}$	$m_{\omega_j^{(1,3),(5,7)}}$	$m_{\tilde{\omega}_j^{1,3,5,7}}$
50	137	121	80	65	58
100	271	239	161	131	114
150	406	358	242	198	169
200	540	477	322	265	224
250	675	595	402	332	280

$m_{\omega_{opt}}$ に比べて $m_{\omega_j^{1,3}}$ の方が反復回数が約 3/5 倍と速く収束している。

また、$n+1$ 回の反復ごとに緩和係数 $\bar{\omega}_j^{(1)}, \bar{\omega}_j^{(3)}$ を $\bar{\omega}_j^{(5)}, \bar{\omega}_j^{(7)}, \cdots$ と変える定理2.3の場合の反復回数を $m_{\omega_j^{(1,3),(5,7)}}$ と表す。$m_{\omega_{opt}}$ に比べて $m_{\omega_j^{(1,3),(5,7)}}$ の方が反復回数が約 1 / 2 倍と速く収束している。

同様に $\bar{k} = [\frac{n+1}{2}]$ に対し $\bar{k}_1 = [\frac{n}{2}] + 1$ 回ごとに緩和係数を $\bar{\omega}_j^{(1)}, \bar{\omega}_j^{(3)}, \bar{\omega}_j^{(5)}, \cdots$ と変える定理2.4の場合の反復回数を $m_{\tilde{\omega}_j^{1,3,5,7}}$ と表す。

$l_x = l_y = u_x = u_y = 0.5$, $l^k = \frac{l_y}{2-2\sqrt{l_x u_x}\cos\frac{k\pi}{n+1}}$, $u^k = \frac{u_y}{2-2\sqrt{l_x u_x}\cos\frac{k\pi}{n+1}}$ に対して、$n = 10$, $\bar{k} = 5$, $\bar{k}_1 = 6$ のとき

$$\begin{aligned} l^1 = u^1 &= 0.48053495778581, \quad \omega_{\bar{k}}^{(1)} = 3.30024228 \geq 2 \\ l^3 = u^3 &= 0.37170872386061, \quad \omega_{\bar{k}}^{(3)} = 1.49460196 < 2 \\ l^5 = u^5 &= 0.26915217406121, \quad \omega_{\bar{k}}^{(5)} = 1.18658496 < 2 \end{aligned}$$

となるので、定理 2.4 の最後の $\tilde{z}_{\bar{k}}^{(m+1)}$ の修正が必要となる。$m_{\omega_{opt}}$ に比べて $m_{\bar{\omega}_j^{1,3,5,7}}$ の方が反復回数が約 2/5 と速く収束している。

これらの数値実験例はいずれも緩和係数をブロック及び反復ごとに変える適応的ブロック改良 SOR 法の有効性を示している。

謝辞　数値実験においては磯谷幸太郎君にいろいろとお世話になりました。

参考文献

[1] R. E. Bank and D. J. Rose, Marching algorithms for elliptic boundary value problems. I : The constant coefficient case, *SIAM J. Numer. Anal.* **14** (1977), 792-829.

[2] R. E. Bank, Marching algorithms for elliptic boundary value problems. II : The variable coefficient case, *SIAM J. Numer. Anal.* **14** (1977), 950-970.

[3] L. W. Ehrlich, An Ad-Hoc SOR method, *J. Comput. Phys.* **44** (1981), 31-45.

[4] L. W. Ehrlich, A local relaxation scheme (Ad-Hoc SOR) applied to nine point and block difference equations, in *Iterative Methods for Large Linear Systems,* ed. D.Kincaid and L.Hayes, Academic Press (1990), 81-90.

[5] H. C. Elman and M. P. Chernesky, Ordering effects on relaxation methods applied to the discrete convection-diffusion, in *Recent Advances in Iterative Methods,* ed. G.Golub, A.Greenbaum and M.Luskin (1994), 45-57.

[6] H. Han, V. P. Il'in, W. Yuan and R. B. Kellogg, Analysis of flow directed iterations, *J. Comput. Math.* **10** (1992), 57-76.

[7] E. Ishiwata and Y. Muroya, Improved SOR-like method with orderings for non-symmetric linear equations derived from singular perturbation problems, in *Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations and its Applications*, World Scientific Publishers, Singapore (1995), 59-73.

[8] E. Ishiwata and Y. Muroya, Improved SOR method with orderings and direct methods, Tech. Report 95-34, Waseda University (1995).

[9] E. Ishiwata and Y. Muroya, Main convergence theorems for the improved SOR method with orderings, Tech. Report 95-42, Waseda University (1995).

[10] E. Ishiwata and Y. Muroya, Precise error estimates of the improved SOR method with orderings for tridiagonal matrices, Tech. Report 95-43, Waseda University (1995).

[11] E. Ishiwata and Y. Muroya, The improved SOR method with orderings in n^2 cases of one free relaxation parameter for tridiagonal matrices, Tech. Report 95-45, Waseda University (1995).

[12] R. E. Lynch, J. R. Rice and D. H. Thomas, Direct solution of partial difference equations by tensor product methods, *Numer. Math.* **6** (1964), 185-199.

[13] R. E. Lynch, J. R. Rice and D. H. Thomas, Tensor product analysis of partial difference equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 378-384.