

Bessel 関数の零点を標本点に持つ数値積分公式

—正確な値を与える場合と最適性—

東大・工・物理工学 緒方秀教 (Hidenori Ogata)
東大・工・物理工学 杉原正顯 (Masaaki Sugihara)

我々は過去にべき的特異性を含む積分に対し、Bessel 関数の零点を標本点に持つ数値積分公式を構成し、その誤差解析を行った [3]。今回はその公式が積分の正確な値を与えるような被積分関数のクラス、および公式の最適性について報告する。

1 正確な値を与える場合

α を $-1 < \alpha < 1$ なる実数とし、次のべき的特異性をもつ積分を考える：

$$(1.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} f(x) dx \equiv \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0^+}} \left(\int_{\rho}^{R_1} |x|^{\alpha} f(x) dx + \int_{-R_2}^{-\rho} |x|^{\alpha} f(x) dx \right).$$

ν を $2\{\nu\} - 1 = \alpha$ ($\{\nu\}$ は ν の小数部分) なる実数とすると、積分 (1.1) は位数 ν の第 1 種 Bessel 関数 $J_{\nu}(x)$ の零点を標本点とする次の数値積分公式 $Q_{\nu}(f, h)$ で近似値を求めることが出来る [3]：

$$(1.2) \quad Q_{\nu}(f, h) = h \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{h}{\pi} j_{\nu k} \right|^{2\{\nu\}-1} f\left(\frac{h}{\pi} j_{\nu k}\right) \frac{2/(\pi j_{\nu|k|})}{[J_{\nu+1}(j_{\nu|k|})]^2} + \sum_{l=0}^{[\nu]} d_l^{(\nu)} f^{(2l)}(0),$$

ここで、 $j_{\nu, k}$ ($\dots < j_{\nu, -k} < \dots < j_{\nu, -2} < j_{\nu, -1} < 0 < j_{\nu, 1} < j_{\nu, 2} < \dots < j_{\nu, k} < \dots$, $j_{\nu, -k} = -j_{\nu, k}$) は $J_{\nu}(x)$ の零点、 $d_l^{(\nu)}$ ($l = 0, 1, \dots, [\nu]$) は次で与えられる定数である：

$$(1.3) \quad d_l^{(\nu)} = \frac{1}{(2l)!} \left(\frac{h}{\pi}\right)^{2(l+\{\nu\})} \sum_{m=0}^{[\nu]-l} b_{[\nu]-l-m}^{(\nu)} 2^{\nu-2m} \frac{\Gamma(\nu-m)}{m!},$$

ただし、

$$(1.4) \quad b_p^{(\nu)} = \frac{1}{(2p)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2p} \frac{x^{\nu}}{J_{\nu}(x)} \Big|_{x=0}.$$

数値積分公式 (1.2) の誤差評価に関しては、すでに [3] で報告した。その一方、この公式が積分の正確な値を与える被積分関数 $f(x)$ のクラスが存在する。具体的には次の定理によって示される：

定理 1.1 関数 $f(z)$ は指数型 $A (> 0)$ の整関数で、積分 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} f(x) dx$ ($-1 < \alpha < 1$) が存在するようなものであるとする。このとき ν を $2\{\nu\} - 1 = \alpha$ なる実数、 $h < 2\pi/A$ ととると、 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} f(x) dx = Q_{\nu}(f, h)$ が成立する。 □

同種の結果が [1] によって与えられているが、上記の結果はその拡張にあたり、かつ、我々の証明は次の意味でより簡明になっている：[1] の証明は大雑把にいうと、題意の被積分関数のクラスに対し、同じ標本点を用いた補間公式が正確な関数値を与えることを証明し、次にその補間公式を形式的に積分することによって (標本点は可算無限個存在するから、無限級数の項別積分が生じる) 数値積分公式を導出、最後に項別積分が正当化されることを証明している。一方我々の証

明は、数値積分公式の誤差を複素積分表示、その値を評価するという方法を用いており、見通しのよいものとなっている。

(証明) はじめに、次の等式が成立することに注意する：

$$(1.5) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left(\int_{\rho}^{R_1} + \int_{-R_2}^{-\rho} \right) |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_{\nu}^{n_1, n_2}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_6} f(z) \Phi_{\nu}(z, h) dz,$$

$$(1.6) \quad \Phi_{\nu}(z, h) = \begin{cases} -i\pi z^{2\{\nu\}-1} H_{\nu}^{(1)}(\pi z/h) / J_{\nu}(\pi z/h), & 0 \leq \arg z < \pi, \\ i\pi z^{2\{\nu\}-1} H_{\nu}^{(2)}(\pi z/h) / J_{\nu}(\pi z/h), & -\pi \leq \arg z < 0, \end{cases}$$

ここで $Q_{\nu}^{n_1, n_2}(f, h)$ は (1.2) における $Q_{\nu}(f, h)$ の定義式で無限和 $h \sum_{k=1}^{\infty} + h \sum_{k=1}^{\infty}$ を有限和 $h \sum_{k=1}^{n_1} + h \sum_{k=1}^{n_2}$ に打ち切ったものを表わす。式 (1.6) の右辺において $z^{2\{\nu\}-1}$, $H_{\nu}^{(1)}(\pi z/h)$, $H_{\nu}^{(2)}(\pi z/h)$, $J_{\nu}(\pi z/h)$ は正の実軸で実数値をとるような分枝をとることにする。 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6$ は図 1 のような、各辺が実軸または虚軸に平行な長形状の積分路とする。ただし図 1 において、 $R_1 = h(n_1 + \nu/2 + 1/4)$, $R_2 = h(n_2 + \nu/2 + 1/4)$ (n_1, n_2 は正の整数) であるとする¹。

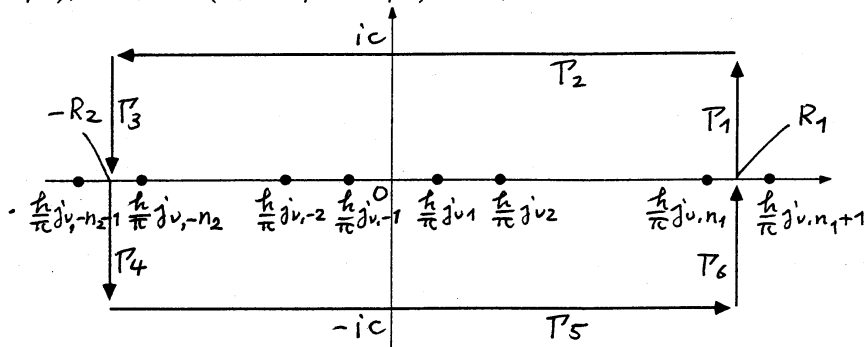


図 1: 積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_6$.

(1.5) において極限 $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ (すなわち $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) $\rho \rightarrow 0^+$ をとると、左辺は数値積分誤差 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_{\nu}(f, h)$ に近づく。その誤差が 0 に等しいことを言えばいいのだが、そのために (1.5) 右辺の積分の大きさを評価する。

まず $|f(z)|, |\Phi_{\nu}(z, h)|$ の値の評価が次の補題によって与えられる：

補題 1.2 関数 $f(z)$ は定理 1 の仮定を満たすとする。このとき、任意の $\delta > 0$ に対し $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_{\delta}(x) = 0$ なる関数 $g_{\delta}(x)$ が存在し、

$$(1.7) \quad |z^{2\{\nu\}-1} f(z)| \leq g_{\delta}(|z|) e^{(A+\delta)|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ。 □

補題 1.3 任意の $M > 0$ に対し定数 $\kappa_{\nu}(M)$ を

$$(1.8) \quad \kappa_{\nu}(M) = \sup_{|\operatorname{Im} z| \geq M} \frac{|\Phi_{\nu}(z, \pi)|}{2\pi |z|^{2\{\nu\}-1} e^{-2|\operatorname{Im} z|}}$$

で定義するとき、(1) $\kappa_{\nu}(M)$ は単調減少、(2) $\kappa_{\nu}(M) < +\infty$ 、(3) $\lim_{M \rightarrow +\infty} \kappa_{\nu}(M) = 1$ が成り立つ。 □

¹このように R_1, R_2 をおくのは、積分路が被積分関数の極を通ることを避けるためである。

補題 1.4 任意の $\epsilon > 0$ に対し正の整数 n を十分大きくとれば, $|\operatorname{Re} z| = h(n + \nu/2 + 1/4)$ なる複素数 z に対し

$$(1.9) \quad |\Phi_\nu(z, h)| \leq (1 + \epsilon)2\pi|z|^{2\{\nu\}-1}e^{-(2\pi/h)|\operatorname{Im} z|}$$

が成り立つ. □

補題 1.2 は [5], p.391 と同様にして証明出来, 補題 1.3, 1.4 は, [4] の補題 A1.5, A1.6 と同様にして証明出来る.

上の補題を用いて (1.5) 右辺の積分を評価することが出来る. まず Γ_2, Γ_5 上の積分は, 補題 1.2, 1.3 を用いて評価できる. 任意の $\epsilon > 0$ に対し c を十分大きくとれば, 補題 1.2 より, $f(z)$ に対して Γ_2, Γ_5 上 $|f(z)| \leq \epsilon|z|^{1-2\{\nu\}}e^{(A+\delta)c}$ と押さえることが出来, 補題 1.3 より $\Phi_\nu(z, h)$ に対して Γ_2, Γ_5 上 $|\Phi_\nu(z, h)| \leq (1 + \epsilon)2\pi|z|^{2\{\nu\}-1}e^{-2\pi c/h}$ と押さえることが出来る. よって Γ_2 上の積分に対する次の評価を得る:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(z)\Phi_\nu(z, h)dz \right| \leq \epsilon(1 + \epsilon)(R_1 + R_2)e^{(A+\delta-2\pi/h)c}.$$

ただし δ は $A + \delta - 2\pi/h < 0$ となるようにとる. Γ_5 上の積分も同様の不等式で評価できる.

次に $\Gamma_6 + \Gamma_1, \Gamma_3 + \Gamma_4$ 上の積分は, 補題 1.2, 1.4 を用いて評価できる. 任意の ϵ に対し n_1, n_2 を十分大きくとれば, 補題 1.2 より, $f(z)$ に対し $\Gamma_6 + \Gamma_1, \Gamma_3 + \Gamma_4$ 上で $|f(z)| \leq \epsilon|z|^{1-2\{\nu\}}e^{(A+\delta)c}$ と押さえることが出来, 補題 1.4 より $\Phi_\nu(z, h)$ に対し $\Gamma_6 + \Gamma_1, \Gamma_3 + \Gamma_4$ 上で $|\Phi_\nu(z, h)| \leq (1 + \epsilon)2\pi|z|^{2\{\nu\}-1}e^{-(2\pi/h)|\operatorname{Im} z|}$, と押さえることが出来る. よって $\Gamma_6 + \Gamma_1$ 上の積分に対する次の評価を得る:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_6 + \Gamma_1} f(z)\Phi_\nu(z, h)dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c 2\pi\epsilon(1 + \epsilon)e^{(A+\delta-2\pi/h)|y|} dy \leq \frac{\epsilon(1 + \epsilon)}{2\pi/h - A - \delta}.$$

$\Gamma_3 + \Gamma_4$ 上の積分の評価も同様の不等式で評価できる.

以上から (1.5) の左辺は次の不等式で押さえられる:

$$(1.10) \quad \left| \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left(\int_{\rho}^{R_1} + \int_{-R_2}^{-\rho} \right) |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu^{n_1, n_2}(f, h) \right| \leq 2\epsilon(1 + \epsilon)(R_1 + R_2)e^{(A+\delta-2\pi/h)c} + \frac{2\epsilon(1 + \epsilon)}{2\pi/h - A - \delta}.$$

上の不等式で先に $c \rightarrow \infty$, その後 $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ (よって $R_1, R_2 \rightarrow \infty$) と極限操作を行うことにより,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu(f, h) \right| \leq \frac{2\epsilon(1 + \epsilon)}{2\pi/h - A - \delta}.$$

を得る. $\epsilon > 0$ は任意にとれるから, 右辺はいくらでも小さく出来る. したがって, 左辺 = 0, すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx = Q_\nu(f, h)$ を得る.

Q. E. D.

2 最適性

2.1 主要結果

べき的特異性をもつ積分 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha f(x) dx$ に対して, いま議論している公式 (1.2) (で $\alpha = 2\{\nu\} - 1$ ととり, 標本点数を有限個に打ち切ったもの) が実は (準) 最適な数値積分公式である. それを

この節で証明していくことにする。なおここで用いる証明のテクニックは [6] で用いられているものと、本質的には同じである。

はじめに、いくつかの記号を定義する。

(I) 領域 \mathcal{D}_d ($d > 0$) を実軸中心、幅 $2d$ の帯状領域とする： $\mathcal{D}_d = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d\}$. 関数族 $B(\mathcal{D}_d)$ を、 \mathcal{D}_d 上正則な関数 $f(z)$ で

$$(2.11) \quad \mathcal{N}(f, \mathcal{D}_d) \equiv \lim_{c \rightarrow d-0} \int_{-\infty}^{\infty} |(x+ic)^{2\{\nu\}-1} f(x+ic)| + |(x-ic)^{2\{\nu\}-1} f(x-ic)| dx < \infty,$$

$$(2.12) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-c}^c |x+iy|^{2\{\nu\}-1} |f(x+iy)| dy = 0, \quad 0 < \forall c < d,$$

を満たすもの全体とする。

(II) $\omega(z)$ を $B(\mathcal{D}_d)$ に属する関数で、任意の実数 x に対し次の (SE) または (DE) の条件を満たすものとする²：

$$(SE) \quad \alpha_1 \exp(-(\beta|x|)^\rho) \leq |\omega(x)| \leq \alpha_2 \exp(-(\beta|x|)^\rho) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0, \rho \geq 1 \text{ は定数}).$$

$$(DE) \quad \alpha_1 \exp(-\beta_1 \exp(\gamma|x|)) \leq |\omega(x)| \leq \alpha_2 \exp(-\beta_2 \exp(\gamma|x|)) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma > 0 \text{ は定数}).$$

(III) 関数族 $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ を、領域 \mathcal{D}_d で正則な関数 $f(z)$ で

$$\|f\| = \sup_{z \in \mathcal{D}_d} |f(z)/\omega(z)| < +\infty$$

なるもの全体とする。

(IV) $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ における数値積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx \approx Q_\nu^{n,n}(f, h)$ の誤差ノルムを $\mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{Bessel}}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$ ($N = 2n + 2\{\nu\} + 1$) と記すことにする：

$$\mathcal{E}_{h,N,\nu}^{\text{Bessel}}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) = \sup_{\|f\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu^{n,n}(f, h) \right|$$

一方で、

$$(2.13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{jk} f^{(k)}(a_j), \quad m_1 + \cdots + m_l = N, \quad 1 \leq l \leq N$$

という形の N 点数値積分公式全体を考え、それらの $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ における誤差ノルムの下限を $\mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{inf}}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$ と記すことにする：

$$(2.14) \quad \mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{inf}}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) = \inf_{\text{公式}} \sup_{\|f\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{jk} f^{(k)}(a_j), \right|$$

以上の準備のもとで公式 $Q_\nu^{n,n}(f, h)$ の準最適性が次の定理で示される：

²(SE) は一重指数関数的減衰 (single exponential decay), (DE) は二重指数関数的減衰 (double exponential decay) の意味である。

定理 2.1 (1) $\omega(z) \in B(\mathcal{D}_d)$ が条件 (SE) を満たす場合、次の不等式が成立する：

$$C_{\nu,d,\omega} N^{\frac{2\{\nu\}}{\rho+1}} \exp\left(-\left(\left(\frac{2}{\rho+1}\right)^{1/\rho} 2\pi d\beta N\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right) \leq \mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{inf}}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$$

$$\leq \mathcal{E}_{h,N,\nu}^{\text{Bessel}}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \leq C'_{\nu,d,\omega} N^{\frac{\rho}{\rho+1}} \exp\left(-(\pi d\beta N)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right),$$

ただし、公式 $Q_\nu^{n,n}(f, h)$ において $h = 2(\pi d)^{1/(\rho+1)}(\beta(N - [\nu] - 2))^{-\rho/(\rho+1)}$ ($N = 2n + 2[\nu] + 1$) ととるものとする。ここで $C_{\nu,d,\omega}, C'_{\nu,d,\omega}$ は $\nu, d, \omega(z)$ にのみ依る正の定数である。

(2) $\omega(z) \in B(\mathcal{D}_d)$ が条件 (DE) を満たす場合、次の不等式が成立する：

$$C''_{\nu,d,\omega} (\log N)^{2\{\nu\}} \exp\left(-\frac{2\pi d\gamma N}{\log(\pi d\gamma N/\beta_1)}\right) \leq \mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{inf}}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$$

$$\leq \mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{Bessel}}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \leq C'''_{\nu,d,\omega} \exp\left(-\frac{\pi d\gamma N}{\log(\pi d\gamma N/\beta_2)}\right),$$

ただし、公式 $Q_\nu^{n,n}(f, h)$ において $h = 2\log(\pi d\gamma(N - [\nu] - 2)/\beta_2)/(\gamma(N - [\nu] - 2))$ ($N = 2n + 2[\nu] + 1$) ととるものとする。ここで $C_{\nu,d,\omega}, C'''_{\nu,d,\omega}$ は $\nu, d, \omega(z)$ にのみ依る正の定数である。 □

上の定理から、 $\mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{Bessel}}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \approx \mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{inf}}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$ すなわち、公式 $Q_\nu^{n,n}(f, h)$ が (準) 最適であることがいえる。

2.2 証明

2.2.1 上からの評価

まず次の不等式が成り立つことに注意する：

$$(2.15) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu^{n,n}(f, h) \right|$$

$$\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu(f, h) \right| + h \sum_{|k|>n} \left| \left(\frac{h}{\pi} j_{\nu k}\right)^{2\{\nu\}-1} f\left(\frac{h}{\pi} j_{\nu k}\right) \frac{2/(\pi j_{\nu|k|})}{[J_{\nu+1}(j_{\nu|k|})]^2} \right|.$$

右辺第1項が離散化誤差、第2項が打ち切り誤差に相当する。

離散化誤差については、次の評価がすでに得られている [3]：

補題 2.2 関数 $f(z)$ が $B(\mathcal{D}_d)$ に属するとき、

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu(f, h) \right| \leq \kappa_\nu(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(f, d, |z|^{2\{\nu\}-1}) \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right),$$

が成立する。ここで $\kappa_\nu(M)$ は (1.8) で定義されている定数である。 □

$f(z) \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ かつ $\|f\| \leq 1$ とすると、 $f \in B(\mathcal{D}_d)$ であり、 $|f(z)| \leq \|f\| |\omega(z)| \leq |\omega(z)|$ より $\mathcal{N}(f, d, |z|^{2\{\nu\}-1}) \leq \mathcal{N}(\omega, d, |z|^{2\{\nu\}-1})$ 、よって

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu(f, h) \right| \leq \kappa_\nu(\pi(d-0)/h) \mathcal{N}(\omega, d, |z|^{2\{\nu\}-1}) \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right)$$

を得る。

打ち切り誤差の評価は、実軸上で $f(x)$ が、すなわち $\omega(x)$ がどのように減衰するかに依存する。

はじめに $\omega(x)$ が条件 (SE) を満たす場合を考える。このとき $|f(x)| \leq \alpha_2 \exp(-(\beta|x|)^\rho)$ 。

$(2/(\pi j_{\nu k})/[J_{\nu+1}(j_{\nu k})]^2) \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$) より $W_\nu \equiv \sup_k \frac{2/(\pi j_{\nu k})}{[J_{\nu+1}(j_{\nu k})]^2} < +\infty$, さらに $\frac{h}{\pi} j_{\nu k} \sim h(k + \nu/2 - 1/4)$ ($k \rightarrow +\infty$) より $|k|$ が十分大きいとき $|\frac{h}{\pi} j_{\nu k}| \geq h(|k| + [\nu]/2 - 1/2)$ であることに注意すると、打ち切り誤差に対する次の不等式が得られる：

$$\begin{aligned} & h \sum_{|k|>n} \left| \frac{h}{\pi} j_{\nu k} \right|^{2\{\nu\}-1} \left| f\left(\frac{h}{\pi} j_{\nu k}\right) \frac{2/(\pi j_{\nu|k|})}{[J_{\nu+1}(j_{\nu|k|})]^2} \right| \\ & \leq \alpha_2 W_\nu h \sum_{|k|>n} \left| \frac{h}{\pi} j_{\nu k} \right|^{2\rho-1} \exp\left(-\left(\beta \left|\frac{h}{\pi} j_{\nu k}\right|\right)^\rho\right) \\ & \leq \alpha_2 W_\nu h \sum_{|k|>n} (h(|k| + [\nu]/2 - 1/2))^{2\rho-1} \exp(-(\beta h(|k| + [\nu]/2 - 1/2))^\rho) \\ & \leq 2\alpha_2 W_\nu \int_{h(n+[\nu]/2-1/2)}^{\infty} x^{2\rho-1} \exp(-(\beta x)^\rho) dx \\ & \leq \frac{2\alpha_2 W_\nu}{\rho\beta^{2\rho}} \left[\left(\beta h \left(n + \frac{[\nu]}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)^\rho + 1 \right] \exp\left(-\left(\beta h \left(n + \frac{[\nu]}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)^\rho\right). \end{aligned}$$

したがって離散化誤差はおおよそ $\exp(-2\pi d/h)$ のオーダー、打ち切り誤差はおおよそ $\exp(-(\beta h(n + [\nu]/2 - 1/2))^\rho)$ のオーダーになる。標本点数 n を固定して h を動かすと、 h を小さくすると離散化誤差は減少する一方、打ち切り誤差は増大する。逆に h を大きくすると、打ち切り誤差が減少する一方で離散化誤差は増大する。標本点数 n が与えられたとき最適な h の値はこの2つの誤差の和が最小になるような h であるが、両誤差の値が同程度の大きさになるような h がおおよそ最適であると考えられる：

$$-\frac{2\pi d}{h} = -\left(\beta h \left(n + \frac{[\nu]}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)^\rho, \quad \therefore h = (2\pi d)^{\frac{1}{\rho+1}} \left(\beta \left(n + \frac{[\nu]}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)^{-\frac{\rho}{\rho+1}}.$$

したがって次の不等式が成立する：

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu^{n,n}(f, h) \right| \leq \tilde{C}'_{\nu,d,\omega} \left(n + \frac{[\nu]}{2} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \exp\left(-\left(2\pi d\beta \left(n + \frac{[\nu]}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right).$$

$N = 2n + 2[\nu] + 1$ より、

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_\nu^{n,n}(f, h) \right| \leq C'_{\nu,d,\omega} N^{\frac{\rho}{\rho+1}} \exp(-(\pi d\beta N)^{\frac{\rho}{\rho+1}})$$

を得る。これより、 $\mathcal{E}_{h,N,\nu}^{\text{Bessel}}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$ に対する上からの評価が得られる。

次に $\omega(x)$ が条件 (DE) を満たす場合を考える。このとき、 $|f(x)| \leq \alpha_2 \exp(-\beta_2 \exp(\gamma|x|))$ 。打ち切り誤差は次のように押さえられる：

$$\begin{aligned} & h \sum_{|k|>n} \left| \frac{h}{\pi} j_{\nu k} \right|^{2\{\nu\}-1} \left| f\left(\frac{h}{\pi} j_{\nu k}\right) \frac{2/(\pi j_{\nu|k|})}{[J_{\nu+1}(j_{\nu|k|})]^2} \right| \\ & \leq \alpha_2 W_\nu h \sum_{|k|>n} \exp\left(\gamma h \left(|k| + \frac{[\nu]}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-\beta_2 \exp\left(\gamma h \left(|k| + \frac{[\nu]}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)\right) \\ & \leq 2\alpha_2 W_\nu \int_{h(n+[\nu]/2-1/2)}^{\infty} e^{\gamma x} \exp(-\beta_2 e^{\gamma x}) dx = \frac{2\alpha_2 W_\nu}{\beta_2 \gamma} \exp\left(-\beta \exp\left(\gamma h \left(n + \frac{[\nu]}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

ここでも離散化誤差, 打ち切り誤差がおおよそ同程度の大きさになるよう h をとることにする。
 $-2\pi d/h = -\beta_2 \exp(\gamma h(n + [\nu]/2 - 1/2))$ を解くと

$$h = \frac{\log(2\pi d/(\beta_2 h))}{\gamma(n + [\nu]/2 - 1/2)} = \frac{\log(2\pi d\gamma(n + [\nu]/2 - 1/2)/\beta_2)}{\gamma(n + [\nu]/2 - 1/2)} - \frac{\log \log(2\pi d/(\beta_2 h))}{\gamma(n + [\nu]/2 - 1/2)}$$

を得るから, 右辺の第1項だけとり,

$$h = \frac{\log(2\pi d\gamma(n + [\nu]/2 - 1/2)/\beta_2)}{\gamma(n + [\nu]/2 - 1/2)}$$

ととることにする。

このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_{\nu}^{n,n}(f, h) \right| \leq \tilde{C}_{\nu,d,\omega}''' \exp\left(-\frac{2\pi d\gamma(n + [\nu]/2 - 1/2)}{\log[2\pi d\gamma(n + [\nu]/2 - 1/2)/\beta_2]}\right).$$

$N = 2n + 2[\nu] + 1$ より,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - Q_{\nu}^{n,n}(f, h) \right| \leq C_{\nu,d,\omega}''' \exp\left(-\frac{\pi d\gamma N}{\log(\pi d\gamma N)/\beta_2}\right),$$

これより, $\mathcal{E}_{h,N,\nu}^{\text{Bessel}}(\mathbf{H}^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega))$ に対する上からの評価が得られる。

2.2.2 下からの評価

(2.14) を下から評価するためには数値積分公式の一般形 (2.13) の誤差を下から評価しなければならない。その目的を果たすため, 次のような関数のクラスを導入する:

$$\mathbf{F}_0(\{a_j\}, \{m_j\}) = \left\{ f \in \mathbf{H}^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega) \mid \|f\| \leq 1; \quad f^{(k)}(a_j) = 0, k = 0, 1, \dots, m_j - 1, j = 1, 2, \dots, l \right\}$$

$\mathbf{F}_0(\{a_j\}, \{m_j\})$ は $\mathbf{H}^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega)$ の部分空間, $f \in \mathbf{F}_0(\{a_j\}, \{m_j\})$ に対しては $\sum_j \sum_k c_{jk} f^{(k)}(a_j) = 0$ であることに注意して, 次の不等式を得る:

$$(2.16) \sup_{\|f\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{jk} f^{(k)}(a_j) \right| \geq \sup_{f \in \mathbf{F}_0(\{a_j\}, \{m_j\})} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx \right|.$$

(2.16) の右辺は解析に便利な形に変形することが出来る。まず次の関数を導入する:

$$B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d) = \prod_{j=1}^N \frac{T(z) - T(b_j)}{1 - \overline{T(b_j)} T(z)}, \quad z \in \mathcal{D}_d,$$

ここで $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$, $b_1, b_2, \dots, b_N \in \mathcal{D}_d$, $T(z) = \tanh\left(\frac{\pi z}{4d}\right)$ である。関数 $B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d)$ は「変換された Blaschke 積」[6] と呼ばれ, 次の性質を満たす: (1) $B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d)$ は \mathcal{D}_d で正則。 (2) $B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d)$ の \mathcal{D}_d における零点は b_1, b_2, \dots, b_N 。 (3) $z \in \mathcal{D}_d$ に対して $|B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d)| < 1$, $z \in \partial\mathcal{D}_d$ に対して $|B_N(z; \mathbf{b}, \mathcal{D}_d)| = 1$ 。

変換された Blaschke 積を用いると関数族 $\mathbf{F}_0(\{a_j\}, \{m_j\})$ は次のように表わされる:

$$\mathbf{F}_0(\{a_j\}, \{m_j\}) = \left\{ g(z) B_N(z; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d) \mid g \in \mathbf{H}^{\infty}(\mathcal{D}_d, \omega), \quad \|g\| \leq 1 \right\},$$

ここで $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots, a_l, \dots, a_l)$ である (各 a_j ($j = 1, 2, \dots, l$) は m_j 回ずつ現われる). したがって,

$$(2.17) \sup_{\|f\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} f(x) dx - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{jk} f^{(k)}(a_j) \right| \geq \sup_{\|g\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} g(x) B_N(z; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d) dx \right|$$

を得る.

$$s(z) = \overline{B_N(\bar{z}; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d)} \omega(z)$$

とおくと $s \in H^\infty(\mathcal{D}, \omega)$, $\|s\| \leq 1$ であるから,

$$(2.18) \quad (2.17) \text{ 右辺} \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} s(x) B_N(x; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d) dx \right| \\ = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\{\nu\}-1} |B_N(x; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d)|^2 |\omega(x)| dx \\ = \sup_{0 < R < \infty} 2R \int_{-R}^R |x|^{2\{\nu\}-1} |B_N(x; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d)|^2 |\omega(x)| \frac{dx}{2R}.$$

$\int_{-R}^R \frac{dx}{2R} = 1$ であるから, Jensen の不等式により,

$$(2.19) \quad (2.18) \text{ 右辺} \geq \sup_{0 < R < \infty} 2R \exp \left(\int_{-R}^R \log (|x|^{2\{\nu\}-1} |B_N(x; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d)|^2 |\omega(x)|) \frac{dx}{2R} \right) \\ = \sup_{0 < R < \infty} 2R \exp \left(\frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |x|^{2\{\nu\}-1} dx + \frac{1}{R} \int_{-R}^R \log |B_N(x; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d)| dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx. \right)$$

ここで [2] により得られる不等式

$$\frac{1}{R} \int_{-R}^R \log |B_N(x; \mathbf{a}, \mathcal{D}_d)| dx = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^l m_j \int_{-R}^R \log \left| \frac{T(x) - T(a_j)}{1 - \overline{T(a_j)} T(x)} \right| dx \\ = \frac{4d}{\pi R} \sum_{j=1}^l m_j \int_{-T(R)}^{T(R)} \log \left| \frac{\xi - T(a_j)}{1 - \overline{T(a_j)} \xi} \right| \frac{d\xi}{1 - \xi^2} \geq \frac{4d}{\pi R} \sum_{j=1}^l m_j \left(-\frac{\pi^2}{4} \right) = -\frac{\pi d N}{R}$$

を用いて,

$$(2.19) \text{ 右辺} \geq \sup_{0 < R < \infty} 2e \left(\frac{R}{e} \right)^{2\{\nu\}} \exp \left(-\frac{\pi d N}{R} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \right)$$

を得る.

結局, 次の不等式を得る:

$$(2.20) \quad \mathcal{E}_{N, \nu}^{\inf} (H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \geq \sup_{0 < R < \infty} 2e \left(\frac{R}{e} \right)^{2\{\nu\}} \exp \left(-\frac{\pi d N}{R} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx \right).$$

あとは (SE), (DE) 各々の場合に $\frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log |\omega(x)| dx$ の値を評価すればよい.

$\omega(x)$ が条件 (SE) を満たす場合：簡単な計算により，

$$\mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{inf}}(\mathbf{H}(\mathcal{D}_d, \omega)) \geq \sup_{0 < R < \infty} 2e\alpha_1 \left(\frac{R}{e}\right)^{2\{\nu\}} \exp\left(-\frac{\pi d N}{R} - \frac{\beta^\rho R^\rho}{\rho+1}\right).$$

R を $\pi d N / R = \beta^\rho R^\rho / (\rho+1)$ ，すなわち $R = (\pi d (\rho+1) N / \beta^\rho)^{1/(\rho+1)}$ ととると，題意の不等式を得る。
 $\omega(x)$ が条件 (DE) を満たす場合：簡単な計算により

$$\mathcal{E}_{N,\nu}^{\text{inf}}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \geq \sup_{0 < R < \infty} 2e\alpha_1 \left(\frac{R}{e}\right)^{2\{\nu\}} \exp\left(-\frac{\pi d N}{R} - \frac{\beta_1}{\gamma R} e^{\gamma R}\right).$$

R を $\pi d N / R = \beta_1 e^{\gamma R} / (\gamma R)$ ，すなわち $R = \log(\pi d \gamma N / \beta_1) / \gamma$ ととると，題意の不等式を得る。

Q. E. D.

参考文献

- [1] Grozev, G. R. and Rahman, Q. I., A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes, *Math. Comp.*, 64(1995), 715–725.
- [2] Newman, D. J., Quadrature formulae for H^p functions, *Math. Z.*, 166(1979), 111–115.
- [3] 緒方秀教, 杉原正顯, 実数次 Bessel 関数の零点を標本点に持つ数値積分公式, 日本応用数理学会平成 7 年度年会予稿集, 1995, 6–7.
- [4] 緒方秀教, 杉原正顯, Bessel 関数の零点を標本点にもつ補間及び数値積分公式, 日本応用数理学会論文誌, 掲載予定.
- [5] Sugihara, M., A class of functions for which the trapezoidal rule gives the exact value of the integral over the infinite interval, *J. Comput. Appl. Math.*, 20(1987), 387–392.
- [6] Sugihara, M., Optimality of the double exponential formulas —Functional analysis approach—, to appear.