数理解析研究所講究録
944 巻 1996 年 1-9

9 段 8 次陽的 Runge–Kutta 系極限公式について

千葉大　工学部　　小野　令美　(Harumi Ono)

1　はじめに

9 段数陽的 Runge–Kutta 公式で達成可能な次数は高々7 次である．この 9 段数陽的 Runge–Kutta 公式の性質については田中らにより詳しく調べられ，さらに，安定性や打ち切り誤差の観点から，従来知られているものより優れたいくつかの公式が提案されている [9],[10]．このうち打ち切り誤差の点で優れている公式から，最初の二つと最後二つの分点をそれぞれ近付けた極限で 8 次の精度が達成されることが予想され，検討の結果分点 $c_9=1$ の公式で最初の分点 c_2を $c_1=0$ に近付け，同時に分点 c_8を $c_9=1$ に近付けた 9 段 8 次極限公式を得たので報告する．この 9 段 8 次極限公式には分点 c_3,c_4,c_6,c_7が自由なパラメタとして残る．他のパラメタはこれらのパラメタを用いて表されているので，これら自由なパラメタを決めることにより任意の公式が得られる．例としてパラメタが有理数の二つの公式を提案する．一つは達成し得る最大に近い安定領域を持つもので，もう一つはパラメタが比較的簡単なものである．

2　極限公式

常微分方程式の初期値問題

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t,y),\quad y(t_0)=y_0\quad (f,y\text{ はベクトル})$$

の s 段陽的 Runge–Kutta 系公式は次のように表わされる：

$$\begin{aligned}
&f_1=f(t_n,y_n),\\
&y_i=y_n+h\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}f_j,\qquad f_i=f(t_n+c_ih,y_i)\quad (i=2,3,\cdots,s),\\
&y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{s}b_if_i.
\end{aligned}$$

9 段公式で，分点 c_2 および c_8 をそれぞれ $c_1=0$ および $c_9=1$ に近付けた極限の次の形の公式を考える：

$$\begin{aligned}
&f_1=f(t_n,y_n),\qquad F_2=D(f(t_n,y_n))\cdot v(f_1),\\
&f_3=f(t_n+c_3h,y_n+h(a_{31}f_1+h\alpha_3F_2)),\\
&y_i=y_n+h(a_{i1}f_1+\sum_{j=3}^{i-1}a_{ij}f_j+h\alpha_iF_2),\qquad f_i=f(t_n+c_ih,y_i)\qquad (i=4,5,\cdots,8),\\
&\tilde{f}_9=A_{91}f_1+\sum_{j=3}^{8}A_{9j}f_j+h\alpha_9F_2,\qquad F_9=D(f(t_n+h,y_8))\cdot v(\tilde{f}_9),\\
&y_{n+1}=y_n+h(b_1f_1+\sum_{i=3}^{8}b_if_i+h\beta_2F_2+h\beta_9F_9)
\end{aligned}$$

ここで，$D(f(t_p, y_p))$ は f の (t_p, y_p) におけるヤコビ行列，$v(f_1)$ はベクトル $(1, f_1^1, f_1^2, \cdots, f_1^n)^T$，$v(\tilde{f}_9)$ はベクトル $(1, \tilde{f}_9^1, \tilde{f}_9^2, \cdots, \tilde{f}_9^n)^T$ である (上付きの数は成分を表す)．この公式を極限公式と呼びパラメタを次の行列の形で表す：

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
c_3 & a_{31} & & & & & & \alpha_3 & \\
c_4 & a_{41} & a_{43} & & & & & \alpha_4 & \\
c_5 & a_{51} & a_{53} & a_{54} & & & & \alpha_5 & \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \\
1 & a_{81} & a_{83} & a_{84} & \cdots & a_{87} & & \alpha_8 & \\
 & A_{91} & A_{93} & A_{94} & \cdots & A_{97} & A_{98} & \alpha_9 & \\
\hline
 & b_1 & b_3 & b_4 & \cdots & & b_8 & \beta_2 & \beta_9.
\end{array}
$$

3　次数条件式とその解

ここでは次の仮定を置く：

$$
b_3 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{c_3^2}{2}, \quad \sum_{j=3}^{i-1} a_{ij} c_j + \alpha_i = \frac{c_i^2}{2} \ (i = 4, 5, \cdots, 8), \quad \sum_{j=3}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{c_i^3}{3} \ (i = 4, 5, \cdots, 8).
$$

8 次までの誤差項の係数を 0 とおき，これらの仮定も入れ式変形を行うと，次の条件式に纏められる：

$$
a_{31} = c_3, \quad a_{i1} + \sum_{j=3}^{i-1} a_{ij} = c_i \ (i = 4, 5, \cdots, 8), \quad A_{91} + \sum_{j=3}^{8} A_{9j} = 1, \quad \alpha_9 + \sum_{j=3}^{8} A_{9j} c_j = 1,
$$

$$
\sum_{i=j+1}^{8} b_i a_{ij} + \beta_9 A_{9j} = b_j(1 - c_j) \quad (j = 4, 5, 6, 7), \qquad \beta_9 A_{98} = -\beta_9,
$$

$$
\sum_{i=4}^{8} b_i a_{i3} + \beta_9 A_{93} = 0, \qquad \sum_{i=5}^{8} b_i \sum_{j=4}^{i-1} a_{ij} a_{j3} + \beta_9 \sum_{j=4}^{8} A_{9j} a_{j3} = 0,
$$

$$
\sum_{i=6}^{8} b_i \sum_{j=5}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} a_{k3} + \beta_9 \sum_{j=5}^{8} A_{9j} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} a_{k3} = 0,
$$

$$
\sum_{i=7}^{8} b_i \sum_{j=6}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} a_{l3} + \beta_9 \sum_{j=6}^{8} A_{9j} \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} c_{l3} = 0,
$$

$$
\sum_{i=6}^{8} b_i \sum_{j=5}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k a_{k3} + \beta_9 \sum_{j=5}^{8} A_{9j} \sum_{k=4}^{j-1} a_{kj} c_k a_{k3} = 0,
$$

$$
b_1 + \sum_{i=4}^{8} b_i = 1, \qquad \sum_{i=4}^{8} b_i c_i + \beta_2 + \beta_9 = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{i=4}^{8} b_i c_i^2 + 2\beta_9 = \frac{1}{3},
$$

$$
\sum_{i=5}^{8} b_i \sum_{j=4}^{i-1} a_{ij} c_j^2 + \beta_9 \sum_{j=4}^{8} A_{9j} c_j^2 = \frac{1}{12}, \qquad \sum_{i=5}^{8} b_i \sum_{j=4}^{i-1} a_{ij} c_j^3 + \beta_9 \sum_{j=4}^{8} A_{9j} c_j^3 = \frac{1}{20},
$$

$$
\sum_{i=5}^{8} b_i \sum_{j=4}^{i-1} a_{ij} c_j^4 + \beta_9 \sum_{j=4}^{8} A_{9j} c_j^4 = \frac{1}{30}, \qquad \sum_{i=6}^{8} b_i \sum_{j=5}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^3 + \beta_9 \sum_{j=5}^{8} A_{9j} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^3 = \frac{1}{120},
$$

$$\sum_{i=5}^{8} b_i \sum_{j=4}^{i-1} a_{ij} c_j^5 + \beta_9 \sum_{j=4}^{8} A_{9j} c_j^5 = \frac{1}{42}, \qquad \sum_{i=6}^{8} b_i \sum_{j=5}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^4 + \beta_9 \sum_{j=5}^{8} A_{9j} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^4 = \frac{1}{210},$$

$$\sum_{i=7}^{8} b_i \sum_{j=6}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} c_l^3 + \beta_9 \sum_{j=6}^{8} A_{9j} \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} c_l^3 = \frac{1}{840},$$

$$\sum_{i=6}^{8} b_i \sum_{j=5}^{i-1} a_{ij} c_j \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^3 + \beta_9 \sum_{j=5}^{8} A_{9j} c_j \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^3 = \frac{1}{168},$$

$$\sum_{i=5}^{8} b_i \sum_{j=4}^{i-1} a_{ij} c_j^6 + \beta_9 \sum_{j=4}^{8} A_{9j} c_j^6 = \frac{1}{56}, \qquad \sum_{i=6}^{8} b_i \sum_{j=5}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^5 + \beta_9 \sum_{j=5}^{8} A_{9j} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^5 = \frac{1}{336},$$

$$\sum_{i=7}^{8} b_i \sum_{j=6}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} c_l^4 + \beta_9 \sum_{j=6}^{8} A_{9j} \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} c_l^4 = \frac{1}{1680},$$

$$b_8 a_{87} a_{76} a_{65} a_{54} c_4^3 + \beta_9 \sum_{j=7}^{8} A_{9j} \sum_{k=6}^{j-1} A_{jk} \sum_{l=5}^{k-1} A_{kl} \sum_{m=4}^{l-1} A_{lm} c_m^3 = \frac{1}{6720},$$

$$\sum_{i=6}^{8} b_i \sum_{j=5}^{i-1} a_{ij} c_j \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^4 + \beta_9 \sum_{j=5}^{8} A_{9j} c_j \sum_{k=4}^{j-1} A_{jk} c_k^4 = \frac{1}{280},$$

$$\sum_{i=6}^{8} b_i \sum_{j=5}^{i-1} a_{ij} c_j^2 \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} c_k^3 + \beta_9 \sum_{j=5}^{8} A_{9j} c_j^2 \sum_{k=4}^{j-1} A_{jk} c_k^3 = \frac{1}{224},$$

$$\sum_{i=7}^{8} b_i \sum_{j=6}^{i-1} a_{ij} c_j \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} c_l^3 + \beta_9 \sum_{j=6}^{8} A_{9j} c_j \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} c_l^3 = \frac{1}{1120},$$

$$\sum_{i=7}^{8} b_i \sum_{j=6}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} c_k \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} c_l^3 + \beta_9 \sum_{j=6}^{8} A_{9j} \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} c_k \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} c_l^3 = \frac{1}{1344}. \tag{1}$$

これらの条件式を解くのに，補助のパラメタ $\rho_i, \sigma_i, \tau_i, \phi_i$ を導入する：

$$\sum_{i=j+1}^{8} b_i a_{ij} + \beta_9 A_{9j} = b_j(1-c_j) \overset{\mathrm{def}}{=} \rho_j \quad (j=4,5,6,7), \qquad \beta_9 A_{98} = \rho_8,$$

$$\sum_{j=k+1}^{8} \rho_j a_{jk} \overset{\mathrm{def}}{=} \sigma_k \ (k=4,5,6,7), \ \sum_{k=l+1}^{7} \sigma_k a_{kl} \overset{\mathrm{def}}{=} \tau_l \ (l=4,5,6), \ \sum_{k=l+1}^{6} \tau_k a_{kl} \overset{\mathrm{def}}{=} \phi_l \ (l=4,5).$$

すると，分母の因数がすべて 0 でないという条件で $\rho_i, \sigma_i, \tau_i, \phi_i$ は

$$\begin{aligned}
\rho_i &= \frac{28c_jc_kc_l - 14(c_kc_l + c_jc_l + c_jc_k) + 8(c_j + c_k + c_l) - 5}{840c_i^2(c_i - c_j)(c_i - c_k)(c_i - c_l)(c_i - 1)} \quad (i,j,k,l = 4,5,6,7), \\
\rho_8 &= (70c_4c_5c_6c_7 - 42(c_5c_6c_7 + c_4c_6c_7 + c_4c_5c_7 + c_4c_5c_6) \\
&\quad +28(c_4c_5 + c_4c_6 + c_4c_7 + c_5c_6 + c_5c_7 + c_6c_7) - 20(c_4 + c_5 + c_6 + c_7) + 15) \\
&\quad /(840(1-c_4)(1-c_5)(1-c_6)(1-c_7)), \\
\sigma_i &= \frac{\rho_i(1-c_i)}{2} \ (i=4,5,6,7), \qquad \tau_i = \frac{14c_jc_k - 6(c_j + c_k) + 3}{5040c_i^2(c_i - c_j)(c_i - c_k)} \ (i,j,k = 4,5,6), \\
\phi_i &= \frac{-8c_j + 3}{20160c_i^2(c_i - c_j)} \qquad (i,j = 4,5)
\end{aligned} \tag{2}$$

と一意に解け，さらに c_4 と c_5 の満たすべき制約条件が得られる：

$$(56c_4^2 - 42c_4 + 9)c_5 - 3c_4 = 0. \tag{3}$$

全てのパラメタは上に得られた補助のパラメタの有理式として以下のように書ける：

$$\begin{aligned} &b_i = \frac{\rho_i}{1-c_i} \quad (i=4,5,6,7), \quad \beta_9 = -\rho_8, \\ &b_8 = \frac{1}{3} - (\sum_{i=4}^{7} b_i c_i^2 + 2\beta_9), \quad \beta_2 = \frac{1}{2} - (\sum_{i=4}^{8} b_i c_i + \beta_9), \quad b_1 = 1 - \sum_{i=4}^{8} b_i. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &A_{98} = -1, \\ &a_{87} = \frac{\sigma_7}{\rho_8}, \quad A_{97} = \frac{\rho_7 - b_8 a_{87}}{\beta_9}, \\ &a_{76} = \frac{\tau_6}{\sigma_7}, \quad a_{86} = \frac{\sigma_6 - \rho_7 a_{76}}{\rho_8}, \quad A_{96} = \frac{\rho_6 - \sum_{i=7}^{8} b_i a_{i6}}{\beta_9}, \\ &a_{65} = \frac{\phi_5}{\tau_6}, \quad a_{75} = \frac{\tau_5 - \sigma_6 a_{65}}{\sigma_7}, \quad a_{85} = \frac{\sigma_5 - \sum_{i=6}^{7} \rho_i a_{i5}}{\rho_8}, \quad A_{95} = \frac{\rho_5 - \sum_{i=6}^{8} b_i a_{i5}}{\beta_9}, \\ &a_{54} = \frac{c_5^3(c_5 - c_4)}{c_4^3}, \quad a_{64} = \frac{\phi_4 - \tau_5 a_{54}}{\tau_6}, \quad a_{74} = \frac{\tau_4 - \sum_{i=5}^{6} \sigma_i a_{i4}}{\sigma_7}, \\ &a_{84} = \frac{\sigma_4 - \sum_{i=5}^{7} \rho_i a_{i4}}{\rho_8}, \quad A_{94} = \frac{\rho_4 - \sum_{i=5}^{8} b_i a_{i4}}{\beta_9}. \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &a_{43} = \frac{c_4^3}{3c_3^2}, \quad a_{i3} = \frac{c_i^3 - 3\sum_{j=4}^{i-1} a_{ij} c_j^2}{3c_3^2} \quad (i=5,6,7,8), \quad A_{93} = -\frac{\sum_{i=4}^{8} b_i a_{i3}}{\beta_9}, \\ &\alpha_3 = \frac{c_3^2}{2}, \quad \alpha_i = \frac{c_i^2}{2} - \sum_{j=3}^{i-1} a_{ij} c_j \quad (i=4,5,\cdots,8), \quad \alpha_9 = 1 - \sum_{j=3}^{8} A_{9j} c_j, \\ &a_{31} = c_3, \quad a_{i1} = c_i - \sum_{j=3}^{i-1} a_{ij} \quad (i=4,5,\cdots,8), \quad A_{91} = 1 - \sum_{j=3}^{8} A_{9j}. \end{aligned} \tag{6}$$

上の式に (3) から得られる c_5 の式と補助のパラメタの式を代入すれば，すべてのパラメタが $c_3, c_4, c_6, c_7,$ の有理式で表される．以上から四つの自由なパラメタを持つ 9 段 8 次極限公式が導かれた．

4 自由なパラメタの決定

自由なパラメタを決める方針としては次の点を考慮する．即ち，絶対安定領域の広さ，パラメタの絶対値の大きさと簡単さである．この公式の安定領域を決める多項式は

$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^8}{8!} + \gamma_9 z^9$$

である．いろいろな γ_9 に対して $|r(z)| < 1$ となる領域を図 1 に示す．図 1 から

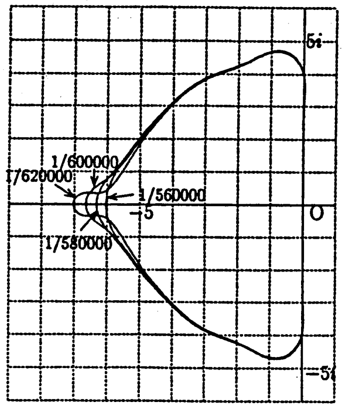

図 1: いろいろな γ_9 の値に対する絶対安定領域

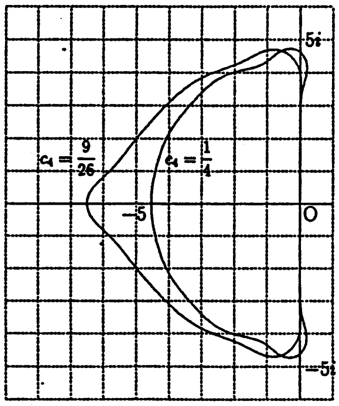

図 2: $c_4 = 9/26$ と $1/4$ に対する絶対安定領域

$$\gamma_9 \in (\frac{1}{620000}, \frac{1}{580000}) \approx (0.1613 \times 10^{-5}, 0.1724 \times 10^{-5}) \tag{7}$$

で安定領域が広いことが分かる．これは c_4 の範囲でほぼ

$$0.1446 < c_4 < 0.1522 \qquad \text{と} \qquad 0.3455 < c_4 < 0.3477 \tag{8}$$

なので，この範囲内の有理数でパラメタの大きさと桁数の長さとから $c_4 = 9/26$ に決め，残りの三つの自由なパラメタをさきに述べた方針に従って決めると次の自由なパラメタの組が得られる：

$$c_3 = \frac{1}{3}, \qquad c_4 = \frac{9}{26}, \qquad c_6 = \frac{3}{4}, \qquad c_7 = \frac{1}{4}. \tag{9}$$

もう一組，安定領域は広くはないが分点の分母分子が全て 1 桁で他のパラメタも比較的簡単な組として

$$c_3 = \frac{1}{4}, \qquad c_4 = \frac{1}{4}, \qquad c_6 = \frac{7}{8}, \qquad c_7 = \frac{3}{4} \tag{10}$$

を挙げる．$c_4 = 1/4$ に対する公式を公式 1，$c_4 = 9/26$ に対する公式を公式 2 と呼ぶことにする．これらの公式のパラメタをそれぞれ表 1 と表 2 に，安定領域を図 2に示す．

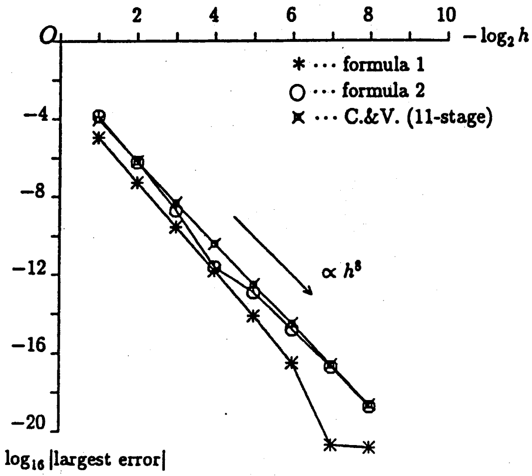

図 3: 例 1 の最終ステップにおける最大の誤差

5　数値例

ここで導いた公式が 8 次の精度であることは，8 次までの誤差項 200 項の係数の元の式に代入して確かめたが，ここでは数値例 [2] に依って示す．

例 1

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2 y_3, \qquad y_1(0) = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = -y_1 y_3, \qquad y_2(0) = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t} = -k^2 y_1 y_2, \quad y_3(0) = 1, \quad k^2 = 0.51$$

を $t = 0$ から 60 まで刻み幅 h を変えて積分する．最終ステップにおける最大の誤差を図 3 に示す．計算は HITAC M-880 の FORTRAN 4 倍精度で行った．参考のため Cooper, Verner の 11 段 8 次公式 [4] による結果も添える．図 3 から，すべての公式の累積誤差は h^8 に比例しており 8 次の精度を達成している事が分かる．

次に，ここで導いた公式の安定区間を確かめるために，中程度の固さの単一方程式 [8] をいろいろな刻み幅で 100 ステップ積分した結果を表 3 に示す．

例 2

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100\,(\sin x - y), \quad y(0) = 0.$$

表 3 から公式 1 では $h \geq 0.05$ で破綻するが，公式 2 では $h < 0.07$ まで計算が続行できていることが分かる．

結論として，予想した通り $c_2 \rightarrow 0$, $c_8 \rightarrow c_9 = 1$ の極限で 9 段 8 次の極限公式が存在することが分かった．さらに，ここで与えた公式は効率のよい公式であると云える．なぜなら，固い方程式に対しては陽的 Runge–Kutta 法，特に高次公式は使わないし，高次公式が適用できる問題に対して 8 次の精度を得ようとすれば通常の Runge–Kutta 法では 11

段が必要である．公式に含まれる微分係数に関していえば，個々の偏微分係数ではなくヤコビ行列とベクトルの積が必要なのであって，これは自動微分法によりほとんどの場合関数計算とほぼ同じ程度の手間で簡単に求められ，現今では幾つかのシステムも提供されている [1],[5],[11]．従って，公式 1 は安定領域こそ広くはないが係数が比較的簡単であり，手間の面で効率の良い推奨できる公式といえる．

参考文献

[1] C. Bischof, A. Carle, G. Corliss, A. Griewank and P. Hovland, ADIFOR—Generating Derivative Codes from Fortran Programs, *Scientific Programming*, **1** (1992) 11–29.

[2] R. Bulirsch and J. Stoer, Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods, *Num. Math.*, **8** (1966) 1–13.

[3] J.C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1987.

[4] G.J. Cooper and J.H. Verner, Some Explicit Runge-Kutta Methods of High Order, *SIAM J. Numer. Anal.*, **9** (1972) 389–405.

[5] K. Kubota, PADRE2, a FORTRAN precompiler yielding error estimates and second derivatives, *Proceedings of the SIAM Workshop on "Automatic Differentiation of Algorithms — Theory, Implementation and Application"* (1991).

[6] H. Ono, Five and Six Stage Runge-Kutta Type Formulas of Orders Numerically Five and Six, *Journal of Information Processing*, **12** (1989) 251–260.

[7] H. Ono, Limiting Formulas of Eight-Stage Explicit Runge–Kutta Method of Order Seven, *Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations and its Applications*, World Scientific, Singapore (1995) 1–14.

[8] A. Ralston and P. Rabinowitz, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[9] 田中正次, 村松茂, 山下茂，9 段数 7 次陽的 Runge–Kutta 法の最適化について，情報処理学会論文誌，**33** (1992) 1512–1526.

[10] 田中正次, 山下茂, 久保栄一, 野崎雄一，安定性のよい 9 段数 7 次陽的 Runge–Kutta 法について，情報処理学会論文誌，**34** (1993) 52–61.

[11] 吉田利信，自動微分法導出システム，情報処理学会論文誌，**30** (1989) 799-806.

表 1: 公式 1

c_i	$a_{ij}\quad (j=1,3,\cdots,8)$							α_i
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$							$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$						$\frac{1}{96}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$-\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$					0
$\frac{7}{8}$	$\frac{12607}{2592}$	$\frac{2303}{576}$	$-\frac{2695}{192}$	$\frac{490}{81}$				$\frac{539}{864}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2297}{2058}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{207}{70}$	$\frac{38}{21}$	$\frac{54}{1715}$			$\frac{199}{1568}$
1	$\frac{32183}{8967}$	$\frac{832}{183}$	$-\frac{600}{61}$	$\frac{320}{183}$	$-\frac{1728}{2989}$	$\frac{280}{183}$		$\frac{1345}{2562}$
A_{9j}	$\frac{16106722}{1640961}$	$\frac{150016}{3721}$	$-\frac{470864}{18605}$	$-\frac{1243520}{33489}$	$-\frac{7922304}{911645}$	$\frac{770224}{33489}$	-1	$\frac{65822}{26047}$
b_j	$\frac{12289}{92610}$	0	$\frac{704}{4725}$	$\frac{2048}{7875}$	$-\frac{2048}{8575}$	$\frac{64}{135}$	$\frac{10537}{47250}$	
β_2, β_9	$\frac{47}{8820}$	$-\frac{61}{6300}$						

表 3: 例 2 の数値解の相対誤差

step size h	relative error	formula 1 $d \approx 4.5$	formula 2 $d \approx 6.5$	Cooper and Verner 11-stage
0.02	first step	$-.365 \times 10^{-3}$	$.270 \times 10^{-3}$	$.134 \times 10^{-2}$
	last step	$.391 \times 10^{-9}$	$-.190 \times 10^{-9}$	$-.339 \times 10^{-6}$
0.03	first step	$-.952 \times 10^{-2}$	$.401 \times 10^{-2}$	$.271 \times 10^{-1}$
	last step	$.239 \times 10^{-6}$	$-.768 \times 10^{-7}$	$-.155 \times 10^{-4}$
0.04	first step	$-.997 \times 10^{-1}$	$.227 \times 10^{-1}$	$.238$
	last step	$-.383 \times 10^{-6}$	$.991 \times 10^{-7}$	$-.557 \times 10^{-3}$
0.05	first step	$-.626$	$.613 \times 10^{-1}$	1.331
	last step	$-.644 \times 10^{38}$	$-.110 \times 10^{-6}$	$-.578 \times 10^{71}$
0.06	first step	-2.826	$.141 \times 10^{-1}$	5.589
	last step	—	$.367 \times 10^{-9}$	—
0.07	first step	—	$-.658$	—
	last step	—	$.632 \times 10^{58}$	—

絶対安定区間を $(-d, 0)$ とする

表 2: 公式 2

c_i	$a_{ij}\quad(j=1,3,\cdots,8)$							α_i
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$							$\frac{1}{18}$
$\frac{9}{26}$	$\frac{3897}{17576}$	$\frac{2187}{17576}$						$\frac{81}{4394}$
$\frac{39}{44}$	$-\frac{8292271}{16866432}$	$-\frac{14414517}{1874048}$	$\frac{38243179}{4216608}$					$-\frac{342563}{1874048}$
$\frac{3}{4}$	$-\frac{349085}{3699072}$	$-\frac{3159}{2432}$	$\frac{1184183}{563616}$	$\frac{27951}{661466}$				$-\frac{1597}{31616}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{63001339}{299624832}$	$-\frac{351}{2432}$	$\frac{7986095}{45652896}$	$-\frac{1164625}{53578746}$	$\frac{5}{162}$			$\frac{38219}{2560896}$
1	$-\frac{3578509}{8993673}$	$-\frac{702}{73}$	$\frac{328398772}{38369457}$	$-\frac{363416240}{720493137}$	$\frac{48640}{41391}$	$\frac{912}{511}$		$-\frac{21163}{153738}$
A_{9j}	$-\frac{16288620394}{3720382731}$	$-\frac{7275528}{90593}$	$\frac{3275107674488}{79360826895}$	$-\frac{2097338476640}{298043994339}$	$\frac{281776384}{17122077}$	$\frac{114146528}{3170755}$	-1	$-\frac{19731878}{31798143}$
b_j	$\frac{1202603}{8624070}$	0	$\frac{501988136}{1563686775}$	$-\frac{2494357888}{8636047875}$	$\frac{9728}{19845}$	$\frac{2432}{33075}$	$\frac{212561}{803250}$	
β_2,β_9	$\frac{857}{147420}$	$-\frac{73}{6300}$						